Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (126), 2021

Физика

УДК 539.12.01

Критические значения расширения Фридрихса релятивистской кулоновской задачи

В.В. Андреев

В работе представлена методика расчета критических значений параметра кулоновского потенциала α на основе решения бесспинового уравнения Солпитера в импульсном пространстве. В предлагаемой методике вычисление $\alpha_{\text{crit.}}$ сводится к задаче собственные значения. Для бесспинового уравнения Солпитера с $m = 0$ получены новые аналитические выражения $\alpha_{\text{crit.}}$ основного состояния с произвольным орбитальным моментом ℓ. Проведен численный расчет критических значений $\alpha_{\text{crit.}}$ для уравнения Солпитера с $m \neq 0$.
Ключевые слова: уравнение Солпитера, импульсное пространство, гамильтониан, кулоновский потенциал.

The paper presents a technique for calculating the critical values of the parameter α of the Coulomb potential based on the solution of the spinless Salpeter equation in momentum space. In the proposed method, the calculation of $\alpha_{\text{crit.}}$ is reduced to an eigenvalue problem. For the spinless Salpeter equation with $m = 0$, new analytical expressions $\alpha_{\text{crit.}}$ of the ground state with an arbitrary orbital angular momentum ℓ are obtained. A numerical calculation of the critical values of $\alpha_{\text{crit.}}$ for the Salpeter equation with $m \neq 0$ is carried out.
Keywords: Salpeter equation, momentum space, Hamiltonian, Coulomb potential.

Введение. Для вычисления характеристик двухчастичных связанных квантовых систем используют уравнения вида

$$H\left|\Phi\right\rangle = E\left|\Phi\right\rangle, \tag{1}$$

где H – оператор Гамильтона (гамильтониан), $E > 0$ – полная энергия связанной системы, которая описывается волновой функцией Φ. При этом гамильтониан в многих случаях можно представить в виде, разделив кинетическую и потенциальную части:

$$H = T\left(k\right) + V\left(\mathbf{r},\eta\right). \tag{2}$$

Здесь $V\left(\mathbf{r},\eta\right)$ статический потенциал взаимодействия частиц, зависящий от координаты $\mathbf{r}$ и некоторого набора параметров $\eta = \left\{\alpha,\sigma,\ldots\right\}$, которые характеризуют интенсивность взаимодействия частиц с другом; часто потенциал считается центральным, т. е. зависит только от радиальной координаты $r = \left|\mathbf{r}\right|$.

Оператор кинетической энергии $T\left(k\right)$ в случае полурелятивистской кинематики определяется соотношением ($\hbar = c = 1$)

$$T\left(k\right) = \sum_{i=1}^{2}\sqrt{k^2 + m_i^2}\,, \quad k = \left|\mathbf{k}\right|, \tag{3}$$

где $m_{1,2}$ – массы частиц, образующих систему. В нерелятивистском пределе имеем

$$T\left(k\right) = \sum_{i=1}^{2}\frac{k^2}{2m_i} + m_i\,. \tag{4}$$

Очень часто для выявления характерных особенностей уравнения (1) используют «одночастичный» вариант оператора $T(k)$

$$T(k,m)=\sqrt{k^2+m^2}\,. \tag{5}$$

Уравнение (1) с оператором (3) или (5) (бесспиновое уравнение Солпитера) обычно используется, когда нельзя пренебречь кинетическими релятивистскими эффектами [1]. Заметим, что аналогичное уравнение появляется в рамках пуанкаре-инвариантной квантовой механики [2]. Это уравнение используют при описании спектроскопии мезонов в рамках потенциальных моделей [3]. Обзор некоторых аспектов «полурелятивистского» описания связанных состояний можно найти в работе [4].

Из-за псевдодифференциальной природы оператора кинетической энергии для уравнения (1) трудно найти точные аналитические результаты. Большинство этих результатов было получено для кулоновского потенциала с константой взаимодействия α

$$V(|\mathbf{r}|)=-\frac{\alpha}{r} \tag{6}$$

и являются приближенными. Например, в работах [4]–[6] найдены аналитические оценки верхней и нижней границы уровней основного состояния энергии, а также проведены численные расчеты возможных спектров для различных потенциалов [4]–[7].

Требование положительности полной энергии E для гамильтониана H приводит к условию вида (расширение Фридрихса)

$$E(\eta)=\frac{\langle\Phi|H(\eta)|\Phi\rangle}{\langle\Phi|\Phi\rangle}\geqslant 0\,. \tag{7}$$

Уравнение (7) определяет ограничения на набор параметров потенциала взаимодействия η, при которых существует дискретный спектр оператора H. Значения параметров $\eta_{\text{crit.}}$, при которых $E(\eta_{\text{crit.}})=0$, называют критическими.

Одной из интересных задач, связанных с решением уравнения (1) с кулоновским потенциалом (6), является существование критического значения $\alpha_{\text{crit.}}$ параметра α, при котором дискретный спектр связанной системы перестает существовать (при этом энергия системы $E(\alpha_{\text{crit.}})=0$).

По теме существования критического значения и его оценки имеются многочисленные работы, начиная с работы [8]. Чаще всего, с помощью вариационных методов вычислялось аналитическое выражение для верхней границы энергии E, а затем из него извлекалось критическое значение константы взаимодействия α.

В данной работе излагается новая методика получения критических значений кулоновской задачи на основе уравнения (1) в импульсном пространстве. Будут получены аналитические и численные значения $\alpha_{\text{crit.}}$ в безмассовом пределе и для варианта с $m\neq 0$.

Бесспиновое уравнение Солпитера в импульсном пространстве. Для поиска критических значений используем «одночастичный» вариант оператора кинетической энергии (5).

Уравнение (1) для центрально-симметричных потенциалов после парциального разложения примет вид:

$$T(k,m)\Phi_{n\ell}(k)+\int_0^\infty V_\ell(k,k')\Phi_\ell(k')k'^2\mathrm{d}k'=E_{n\ell}\Phi_{n\ell}(k)\,, \tag{8}$$

где $\Phi_{n\ell}(k)$ – радиальная часть фурье-образа волновой функции в координатном представлении; $V_\ell(k,k')$ – оператор ℓ-той составляющей парциального разложения потенциала взаимодействия.

Для кулоновского потенциала (6) импульсное представлении имеет вид

$$V_\ell(k,k')=-\frac{\alpha}{\pi}\frac{Q_\ell(y)}{kk'}\,. \tag{9}$$

Здесь y – комбинация импульсов

$$y = \frac{k^2 + k'^2}{2kk'}, \tag{10}$$

функция $Q_\ell(y)$ – полином Лежандра 2-го рода:

$$Q_\ell(y) = P_\ell(y)Q_0(y) - w_{\ell-1}(y), \tag{11}$$

$$Q_0(y) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|; \quad w_{\ell-1}(y) = \sum_{n=1}^{\ell}\frac{1}{n}P_{n-1}(y)P_{\ell-n}(y), \tag{12}$$

где $P_\ell(y)$ – полином Лежандра 1-го рода.

Уравнение (8) с помощью замен

$$\begin{aligned} &k = \beta\tilde{k}, \qquad \phi_{n\ell}(\tilde{k}) = \beta^{1/2}k\Phi_{n\ell}(k), \\ &E_{n\ell} = \beta\varepsilon_{n\ell}, \quad m_\beta = m/\beta, \ \beta > 0 \end{aligned} \tag{13}$$

трансформируется к виду с безразмерными величинами:

$$\left(\varepsilon_{n\ell} - T(\tilde{k}, m_\beta)\right)\phi_{n\ell}(\tilde{k}) = -\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty Q_\ell(y)\phi_{n\ell}(\tilde{k}')\mathrm{d}\tilde{k}'. \tag{14}$$

Однако описание связанных состояний в импульсном представлении усложняется необходимостью решения интегрального уравнения (8), содержащего сингулярные члены, тип которых определяется видом $V_\ell(k,k')$. Поскольку функция Q_ℓ сингулярная, поэтому в данном случае требуются специальные методы решения.

Рассмотрим методы решения уравнения (14) с кулоновским потенциалом, имеющим логарифмическую сингулярность. Численное решение интегрального уравнения (8) может быть сведено к задаче на собственные значения для матрицы, которая возникает при использовании квадратурных формул для интегралов, входящих в уравнение.

Сначала трансформируются пределы интегрирования от $\left[0,\infty\right[$ к «стандартному» $\left[-1,1\right]$ с помощью замены переменных

$$\int_0^\infty f\left(\tilde{k}\right)\mathrm{d}\tilde{k} = \int_{-1}^{1} f\left(\tilde{k}(t)\right)\frac{\mathrm{d}\tilde{k}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t. \tag{15}$$

Среди различных возможностей в литературе часто встречается вариант отображения вида:

$$\tilde{k}(t) = \beta_0\frac{1+t}{1-t}, \tag{16}$$

где β_0 – некоторый параметр, позволяющий улучшить процесс сходимости вычислений.

Стандартный подход основан на аппроксимации интеграла (15) посредством квадратурной формулы

$$\int_0^\infty f\left(\tilde{k}\right)\mathrm{d}\tilde{k} \approx \sum_{j=1}^{N}\tilde{\omega}_j f\left(\tilde{k}_j\right), \tag{17}$$

где множители $\tilde{\omega}_j$ связаны с табличными весовыми множителями ω_j для области $\left[-1,1\right]$ соотношением: $\tilde{\omega}_j = (\mathrm{d}\tilde{k}/\mathrm{d}t)_j\,\omega_j$, а величина N задает число узлов.

В итоге, численное решение интегрального уравнения (1) может быть сведено к задаче на собственные значения для матрицы H_{ij}:

$$\sum_{j=1}^{N}H\left(\tilde{k}_i, \tilde{k}_j\right)\phi(\tilde{k}_j) = \sum_{j=1}^{N}H_{ij}\phi_j = E^{(N)}\phi_i. \tag{18}$$

Стандартные методики численного решения уравнения (8) с потенциалом (9) дают относительно невысокую точность [9], [10]. В работах [11]–[13] развиты высокоточные методы решения (8), позволяющие провести численный анализ значений $\alpha_{\text{crit.}}$.

В нашем случае используем модификацию уравнения (8) с помощью контрчлена, позволяющего избежать проблем с логарифмической сингулярностью потенциала (9) [12]:

$$\mathcal{C}_\ell = \int_0^\infty \frac{Q_\ell(y)}{k} \mathrm{d}k = \left[\frac{(\ell-1)!!}{\ell!!}\right]^2 \times \begin{cases} \pi^2/2 \;, \ell = 2m\,,\; m = 0,1,2\ldots \\ 2 \qquad ,\ell = 2m+1\,,\; m = 0,1,2\ldots \end{cases}. \tag{19}$$

Контрчлен (19) максимально удобен для вычитания и позволяет повысить точность решения по сравнению с вариантами работ [9], [14] на два порядка [12].

В итоге уравнение (14) после добавления (19), запишется в виде

$$\left(T(\tilde{k}, m_\beta) - \varepsilon_{n\ell}\right)\phi_{n\ell}(\tilde{k}) = \frac{\alpha}{\pi}\left[\mathcal{C}_\ell \tilde{k}\phi_{n\ell}(\tilde{k}) + \int_0^\infty Q_\ell(y)\left(\phi_{n\ell}(\tilde{k}') - \frac{\tilde{k}}{\tilde{k}'}\phi_{n\ell}(\tilde{k})\right)\mathrm{d}\tilde{k}'\right]. \tag{20}$$

Критические значения кулоновской задачи. Используем уравнение (20) для вычисления критических значений α. Спектр гамильтониана в этом случае будет положительным при условии, если

$$0 < \alpha < \alpha_{\text{crit.}}\,. \tag{21}$$

Рассмотрим три варианта оператора $T(k)$ в кулоновской задаче: 1) ультрарелятивистский предел – $T(k, m=0) = k$; 2) нерелятивистское приближение – $T^{\mathrm{NR}}(k,m) = m + k^2/(2m)$; 3) бесспиновое уравнение Солпитера с $T(k,m) = \sqrt{k^2+m^2}$. Обозначим критические значения для данных вариантов, как $\alpha^{\mathrm{H}}_{\text{crit.}}$, $\alpha^{\mathrm{NR}}_{\text{crit.}}$ и $\alpha^{\mathrm{S}}_{\text{crit.}}$. Поскольку

$$k < \sqrt{k^2+m^2} < m + \frac{k^2}{2m}\,, \tag{22}$$

то

$$\alpha^{\mathrm{H}}_{\text{crit.}} < \alpha^{\mathrm{S}}_{\text{crit.}} < \alpha^{\mathrm{NR}}_{\text{crit.}}\,. \tag{23}$$

В случае $m = 0$, вследствие того, что $\varepsilon_{n\ell}\left(\alpha^{\mathrm{H}}_{\text{crit.}}\right) = 0$, уравнение (20) преобразуется к виду

$$\int_0^\infty Q_\ell(y)\left(\phi_{n\ell}(\tilde{k})/\tilde{k}' - \phi_{n\ell}(\tilde{k}')/\tilde{k}\right)\mathrm{d}\tilde{k}' = \left(\mathcal{C}_\ell - \frac{\pi}{\alpha^{\mathrm{H}}_{\text{crit.}}}\right)\phi_{n\ell}(\tilde{k})\,. \tag{24}$$

При решении уравнения (24) использовались квадратурные формулы на основе полиномов Чебышева 1-го рода $T_n(x)$, для которых имеются аналитические выражения весовых коэффициентов и нулей. Это позволяет исследовать поведение собственных значений для матриц уравнения (24) размерности $N \times N$ для широкой области N.

Используя методику решения интегральных уравнений (смотри формулы (15)–(17)), получим задачу на собственные значения для функции $\left(\mathcal{C}_\ell - \pi/\alpha^{\mathrm{H}}_{\text{crit.}}\right)$ вида

$$\sum_{j=1}^{N} W_{ij}\phi_j = \left(\mathcal{C}_\ell - \frac{\pi}{\alpha^{\mathrm{H}}_{\text{crit.}}}\right)\phi_i\,,\quad i = 1,\ldots N\,. \tag{25}$$

Матричные элементы W_{ij} уравнения (25) запишутся в виде:

$$W_{ii} = \sum_{r=1}^{N} \omega_r^{\mathrm{st}} Q_\ell(y_{ri} \neq 1)\frac{\overline{dk}_r}{\bar{k}_r}, \qquad H_{ij} = -\omega_j^{\mathrm{st}} Q_\ell(y_{ij})\frac{\overline{dk}_j}{\bar{k}_i}\,,\; (i \neq j)\,, \tag{26}$$

где для сокращения записи введены обозначения:

$$\bar{k}_i = \left(\frac{1+\xi_{i,N}}{1-\xi_{i,N}}\right),\; \overline{dk}_i = \frac{1}{\left(1-\xi_{i,N}\right)^2}, \tag{27}$$

$$Q_\ell(y(z,t)) = P_\ell(y(z,t))\log\left|\frac{1-tz}{t-z}\right| - w_{\ell-1}(y(z,t))\,, \tag{28}$$

$$y(z,t) = \frac{2(t-z)^2}{\left(1-t^2\right)\left(1-z^2\right)} + 1\,,\; y_{ij} = y(\xi_{i,N}, \xi_{j,N})\,. \tag{29}$$

Нули полиномов Чебышева $T_N(x)$ и весовые множители определяются соотношениями:

$$\xi_{i,N} = \cos\left(\frac{i-1/2}{N}\pi\right), \quad \omega_i^{\text{st}} = -\frac{4}{N}\sum_{k=0}^{[(N-1)/2]} \frac{T_{2k}(\xi_{i,N})}{4k^2-1}. \tag{30}$$

Расчеты проводились в системе Wolfram Mathematica [15], а выбранная точность весовых коэффициентов и нулей была равна 90. Для проверки выполнялось вычисление энергетического спектра путем решения уравнения (20) с полученными критическими значениями $\alpha_{\text{crit.}}$.

В этом случае, полагаем, что числовой параметр $\beta_0 = 0{,}999992\times\alpha$, который воспроизводит решение нерелятивистской задачи с кулоновским потенциалом с относительной точностью от 10^{-7} до 10^{-4} для первых трех уровней и различных ℓ [12], [13], [16].

Решение задачи (25) приводит к тому, что для основного состояния критические значения определяются соотношением

$$\alpha_{\text{crit.}}^{\text{H}} = \frac{\pi}{\mathcal{C}_\ell} = \left[\frac{\ell!!}{(\ell-1)!!}\right]^2 \times \begin{cases} 2/\pi \ , \ell = 2m\,, \ m = 0,1,2\ldots \\ \pi/2 \ , \ell = 2m+1\,, \ m = 0,1,2\ldots \end{cases}. \tag{31}$$

Ответ (31) проверен для $\ell = 0,1,\ldots 7$. Для $\ell = 0$ имеем, что $\alpha_{\text{crit.}}^{\text{H}} = 2/\pi$, что совпадает с выводом работы [8]. В таблице 1 представлены некоторые значения, полученные из формулы (31). Отметим, что для $\ell \geqslant 1$ критическое значение становится большим единицы, что связанном с появлением вклада от центробежного потенциала.

Таблица 1 – Значения $\alpha_{\text{crit.}}^{\text{H}}$ основного состояния уравнения (24)

ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha_{\text{crit.}}^{\text{H}}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{8}{\pi}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{128}{9\pi}$	$\frac{225\pi}{128}$	$\frac{512}{25\pi}$	$\frac{1225\pi}{512}$

В нерелятивистском варианте оператора $T(k,m)$ критическое значение $\alpha_{\text{crit.}}^{\text{NR}}$ найти несложно, поскольку энергетический спектр такого уравнения хорошо известен

$$E_{n\ell}^{\text{NR}} = m\left(1-\frac{\alpha^2}{2(n+\ell+1)^2}\right), n,\ell = 0,1,\ldots. \tag{32}$$

В этом случае для $\alpha_{\text{crit.}}^{\text{NR}}$ имеем, что

$$\alpha_{\text{crit.}}^{\text{NR}} = \sqrt{2}\,(n+\ell+1). \tag{33}$$

Рассмотрим вариант бесспинового уравнения Солпитера для кулоновского потенциала. Для кулоновских взаимодействий единственной размерной величиной среди параметров этой теории является масса m взаимодействующих частиц. Следовательно, в этом случае все собственные значения энергии $E_{n\ell}$ пропорциональны m. Поэтому в уравнении (20) без потери общности положим $\beta = m$. Тогда критическое значение $\alpha_{\text{crit.}}^{\text{S}}$ находится путем решения уравнения

$$\frac{\tilde{k}}{\sqrt{\tilde{k}^2+1}}\left[\mathcal{C}_\ell\phi_{n\ell}(\tilde{k}) + \int\limits_0^\infty Q_\ell(y)\left(\frac{\phi_{n\ell}(\tilde{k}')}{\tilde{k}} - \frac{\phi_{n\ell}(\tilde{k})}{\tilde{k}'}\right)\mathrm{d}\tilde{k}'\right] = \frac{\pi}{\alpha_{\text{crit.}}^{\text{S}}}\phi_{n\ell}(\tilde{k}). \tag{34}$$

В таблице 2 представлены отношения $\alpha_{\text{crit.}}^{\text{S}}/\alpha_{\text{crit.}}^{\text{H}}$ для различных значений квантовых чисел n и ℓ, полученные в результате численного расчета (34).

Таблица 2 – Значения отношения $\alpha_{\text{crit.}}^{\text{S}}/\alpha_{\text{crit.}}^{\text{H}}$

$\ell = 0$			
N	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
100	1,01308578	1,11733981	1,32860675
300	1,00945533	1,08461706	1,23472381
500	1,00826293	1,07393346	1,20462677

Окончание таблицы 2

$\ell = 1$			
N	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
100	1,00309170	1,02195779	1,07145974
300	1,00224353	1,01639418	1,04827638
500	1,00195928	1,01457764	1,04144405
$\ell = 2$			
N	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
100	1,00094317	1,00523391	1,02752665
300	1,00076932	1,00371834	1,01760214
500	1,00069823	1,00329528	1,01473026

Анализ представленных в таблице результатов показывает, что $\alpha^{\mathrm{S}}_{\mathrm{crit.}}$ удовлетворяет соотношению (23) и возрастает с ростом n и ℓ. С другой стороны, скорей всего, $\alpha^{\mathrm{S}}_{\mathrm{crit.}} \to \alpha^{\mathrm{H}}_{\mathrm{crit.}}$ при $N \to \infty$ (асимптотически) для всех n.

Следует отметить, что $\alpha^{\mathrm{S}}_{\mathrm{crit.}} \neq \alpha^{\mathrm{H}}_{\mathrm{crit.}}$, так как решение уравнения (20) для бесспинового уравнения Солпитера дает, что $E/m = 0,484256$ при $n = \ell = 0$. Этот ответ согласуется с результатами работы [4], где получены нижняя и верхняя границы E/m. Результаты расчетов позволяют утверждать, что $\alpha = 2/\pi$ является критическим для уравнения с $T\left(k, m = 0\right)$, а не для задачи с $T\left(k, m \neq 0\right)$.

Заметим, что прямое решение уравнение (20) с подстановкой полученных критических значений показывает, что энергетический спектр чувствителен к небольшим изменениям $\alpha_{\mathrm{crit.}}$ (меньше 10^{-4} %).

Заключение. В работе представлена методика расчета критических значений кулоновского параметра α для бесспинового уравнения Солпитера. В отличие от работ [4], [5] и др., в данном подходе не требуется вычисление энергетического спектра с последующим расчетом $\alpha_{\mathrm{crit.}}$. В предлагаемой методике вычисление $\alpha_{\mathrm{crit.}}$ сводится к задаче собственные значения. Для бесспинового уравнения Солпитера с $m = 0$ получены новые аналитические выражения $\alpha_{\mathrm{crit.}}$ для основного состояния с произвольным орбитальным моментом ℓ. В частном случае, когда $\ell = 0$, полученное значение совпадает с оценкой $\alpha_{\mathrm{crit.}}$ работы [8].

Проведен численный расчет критических значений $\alpha^{\mathrm{S}}_{\mathrm{crit.}}$ для уравнения Солпитера с $m \neq 0$. Показано, что в данном случае вычисление энергетического спектра становится численно нестабильным в области $\alpha^{\mathrm{S}}_{\mathrm{crit.}}$, в отличие от варианта с $m = 0$.

Литература

1. Salpeter, E. E. Mass-corrections to the fine structure of Hydrogen-like atoms/ E. E. Salpeter// Phys. Rev. – 1952. – Vol. 87, № 2. – P. 328–343.

2. Keister, B. D. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics/ B. D. Keister, W. N. Polyzou// Adv. Nucl. Phys. – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.

3. Андреев, В. В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами/ В. В. Андреев. – Гомель : Гомельский гос. ун-т им.Ф. Скорины, 2008. – 294 с.

4. Lucha, W. Semirelativistic treatment of bound states/ W. Lucha, F. F. Schoberl // Int. J. Mod. Phys. – 1999. – Vol. A14. – P. 2309–2334.

5. Lucha, W. The One-dimensional spinless relativistic Coulomb problem / W. Lucha, F. F. Schoberl // J. Math. Phys. – 2000. – Vol. 41. – P. 1778–1787.

6. Hall, R. L. Discrete spectra of semirelativistic Hamiltonians / R. L. Hall, W. Lucha, F. F. Schoberl // Int. J. Mod. Phys. – 2003. – Vol. A18. – P. 2657–2680.

7. Lucha, W. The Spinless Relativistic Yukawa Problem / W. Lucha, F. F. Schöberl// Int. J. Mod. Phys. A. – 2014. – Vol. 29, № 31. – P. 1450195.

8. Herbst, I. W. Spectral theory of the operator $(p^2+m^2)^{1/2}-Ze^2/r$ /I. W. Herbst // Communications in Mathematical Physics. – 1977. – Vol. 53, № 3. – P. 285–294. – ibid. 55 (1977) 316 (addendum).
9. Tang, A. The Nyström plus correction method for solving bound state equations in momentum space / A. Tang, J. W. Norbury // Phys. Rev. – 2001. – Vol. E63. – P. 066703.
10. Norbury, J. W. Confining potential in momentum space / J. W. Norbury, D. E. Kahana, K Maung // Can. J. Phys. – 1992. – Vol. 70. – P. 86–89.
11. Андреев, В. В. Квантовые и релятивистские эффекты для двухчастичных систем с корнельским потенциалом / В. В. Андреев, К. С. Бабич // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3 (8). – С. 7–14.
12. Andreev, V. Precision solution of the Schrödinger equation with Coulomb and linear confining potentials in momentum space / V. Andreev // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2017. – Vol. 14, № 1. – P. 66–76.
13. Андреев, В. В. Прецизионные методы решения уравнения Шрёдингера с сингулярными потенциалами в импульсном пространстве / В. В. Андреев // Журнал Белорусского государственного университета. Физика. – 2019. – № 1. – С. 97–109.
14. Norbury, J. W. Exact numerical solution of the spinless Salpeter equation for the Coulomb potential in momentum space / J. W. Norbury, K. M. Maung, D. E. Kahana // Phys. Rev. A. – 1994. – Vol. 50. – P. 3609–3613.
15. Wolfram, S. The Mathematica Book : Wolfram Research / S. Wolfram. – 5th edition. – Place unknown : Wolfram Media, 2003. – 1488 p. – ISBN 1–57955–022–3.
16. Andreev, V. V. On solving the Schrödinger equation with hypersingular kernel in momentum space / V. V. Andreev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2016. – № 1 (26). – P. 7–10.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 19.04.2021