

УДК 537.87

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ БИИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

SOME SOLUTIONS OF THE DISPERSION EQUATION FOR A MOVING BIISOTROPIC MEDIUM

Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai

Francisk Skorina Gomel State University

Получено дисперсионное уравнение для плоских монохроматических электромагнитных волн, распространяющихся в движущейся с постоянной скоростью биизотропной среде. В частных случаях распространения волны вдоль направления движения среды и противоположно ему найдены точные решения дисперсионного уравнения.

Ключевые слова: движущаяся биизотропная среда, материальные уравнения, уравнения Максвелла, показатель преломления, дисперсионное уравнение.

The dispersion equation is obtained for plane monochromatic electromagnetic waves propagating in a biisotropic medium moving at a constant speed. Exact solutions of the dispersion equation are found in the case of wave propagation along or opposite to the medium motion direction.

Keywords: moving biisotropic medium, material equations, Maxwell equations, refractive index, dispersion equation.

Введение

В настоящее время биизотропные и бианизотропные среды активно изучаются [1]–[3]. В данной статье мы обсуждаем распространение плоских монохроматических волн в движущейся биизотропной среде.

Пусть биизотропная среда движется в инерциальной системе отсчёта K с постоянной скоростью $V = V\tau$, где τ – единичный вектор, задающий направление движения среды. Векторные величины, определённые в системе покоя среды K' , будем обозначать штрихами, а в лабораторной системе отсчёта K – записывать без штрихов. В системе отсчёта K' материальные уравнения биизотропной среды в системе единиц Хевисайда – Лоренца имеют вид [1]–[4]

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' &= \varepsilon \mathbf{E}' + \xi \mathbf{H}'; \\ \mathbf{B}' &= \xi^* \mathbf{E}' + \mu \mathbf{H}'; \\ \xi &= \chi + i\alpha, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды соответственно, χ – параметр Теллегена, α – киральный параметр, символом «*» обозначена операция комплексного сопряжения.

1 Материальные уравнения в случае движущейся среды

Представим материальные уравнения (0.1) в матричной форме, выражая векторы электрической индукции \mathbf{D}' и магнитной напряжённости \mathbf{H}' через векторы электрической напряжённости \mathbf{E}' и магнитной индукции \mathbf{B}' :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}' \\ \mathbf{H}' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon - \frac{|\xi|^2}{\mu} & \xi \\ -\xi^* & \mu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Законы преобразования векторов электромагнитного поля при переходе из лабораторной системы отсчёта в систему покоя имеют вид [5]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{D}' \\ \mathbf{H}' \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \Lambda & \beta\gamma \tau^\times \\ -\beta\gamma \tau^\times & \Lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \Lambda & \beta\gamma \tau^\times \\ -\beta\gamma \tau^\times & \Lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В формулах (1.2) использованы следующие обозначения: $\beta = V/c$, c – скорость электромагнитной волны в вакууме, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\Lambda = \gamma + (1 - \gamma)(\tau \circ \tau)$ – матрица размера 3×3 , символом « \circ » обозначена операция тензорного произведения, τ^\times – дуальный вектору τ тензор, компоненты которого определяются в соответствии с выражением $(\tau^\times)_{nm} = \varepsilon_{nkm} \tau_k$, где ε_{nkm} – компоненты псевдотензора Леви-Чивиты. Из уравнений (1.1) с учётом преобразований (1.2) получим материальные уравнения для движущейся в инерциальной системе отсчёта K биизотропной среды

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P & L \\ M & Q \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 P &= \mu^{-1} \left(\varepsilon \mu - |\xi|^2 \right) \Lambda^2 + \mu^{-1} \beta \gamma \left(\xi^* \tau^\times \Lambda - \xi \Lambda \tau^\times \right) + \\
 &\quad + \mu^{-1} \beta^2 \gamma^2 \tau^\times \tau^\times; \\
 L &= \mu^{-1} \left(\varepsilon \mu - |\xi|^2 \right) \beta \gamma \Lambda \tau^\times + \\
 &\quad + \mu^{-1} \beta^2 \gamma^2 \xi^* \tau^\times \tau^\times + \mu^{-1} \xi \Lambda^2 - \mu^{-1} \beta \gamma \tau^\times \Lambda; \\
 M &= \mu^{-1} \left(\varepsilon \mu - |\xi|^2 \right) \beta \gamma \tau^\times \Lambda - \mu^{-1} \beta^2 \gamma^2 \xi \tau^\times \tau^\times - \\
 &\quad - \mu^{-1} \xi^* \Lambda^2 - \mu^{-1} \beta \gamma \Lambda \tau^\times; \\
 Q &= \mu^{-1} \left(\varepsilon \mu - |\xi|^2 \right) \beta^2 \gamma^2 \tau^\times \tau^\times + \\
 &\quad + \mu^{-1} \beta \gamma \left(\xi \tau^\times \Lambda - \xi^* \Lambda \tau^\times \right) + \mu^{-1} \Lambda^2.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Материальные уравнения (1.3) содержат шести-мерные векторы и матрицу размера 6×6 , состоящую из блоков – матриц P, L, M, Q размера 3×3 . Учитывая свойства матриц Λ и τ^\times :

$$\begin{aligned}
 \tau^\times \Lambda &= \Lambda \tau^\times = \gamma \tau^\times; \\
 \tau^\times \tau^\times &= \tau \circ \tau - 1; \\
 \Lambda^2 &= \gamma^2 \left(1 - \beta^2 (\tau \circ \tau) \right),
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

представим выражения (1.4) в более удобном для дальнейших вычислений виде

$$\begin{aligned}
 P &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[\varepsilon \mu - |\xi|^2 - \beta^2 - \beta^2 \left(\varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) (\tau \circ \tau) - 2i \alpha \beta \tau^\times \right]; \\
 L &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[\xi - \beta^2 \xi^* - 2i \alpha \beta^2 (\tau \circ \tau) + \left(\varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) \beta \tau^\times \right]; \\
 M &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[\beta^2 \xi - \xi^* - 2i \alpha \beta^2 (\tau \circ \tau) + \left(\varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) \beta \tau^\times \right]; \\
 Q &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[1 - \beta^2 \left(\varepsilon \mu - |\xi|^2 \right) + \left(\varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) \beta^2 (\tau \circ \tau) + 2i \alpha \beta \tau^\times \right].
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Нетрудно видеть, что матрицы P, L, M, Q удовлетворяют условиям

$$P^+ = P, \quad Q^+ = Q, \quad L^+ = -M,$$

где знаком «+» обозначена операция эрмитова сопряжения.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением плоских монохроматических волн

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0 \\ \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t); \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t).
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Подставляя выражения (1.7) в уравнения Максвелла без источников, получим алгебраические уравнения

$$n_0 (i\mathbf{n})^\times \mathbf{H} = -i\mathbf{D}; \quad n_0 (i\mathbf{n})^\times \mathbf{E} = i\mathbf{B}, \tag{1.8}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.9}$$

в которых единичный вектор \mathbf{n} связан с волновым вектором \mathbf{k} по формуле

$$\mathbf{k} = \mathbf{n} \omega n_0 / c$$

и для показателя преломления введено обозначение n_0 .

Исключая с учётом уравнений (1.8) векторы \mathbf{D} и \mathbf{B} из системы уравнений (1.3), а затем исключая и вектор \mathbf{H} , получим следующее алгебраическое уравнение для вектора \mathbf{E} :

$$\left[P - in_0 L(i\mathbf{n}^\times) - in_0 (i\mathbf{n}^\times) M - n_0^2 (i\mathbf{n}^\times) Q(i\mathbf{n}^\times) \right] \mathbf{E} = 0. \tag{1.10}$$

Используя (1.3), исключим вектор \mathbf{D} из первого уравнения (1.9), в результате получим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} \cdot (P\mathbf{E} + L\mathbf{B}) &= 0; \\
 \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

В дальнейшем уравнения (1.11) нам понадобятся для упрощения процедуры нахождения собственных значений показателя преломления.

Из (1.10) следует, что дисперсионное уравнение для величины n_0 имеет форму:

$$\det \left[P - in_0 L(i\mathbf{n}^\times) - in_0 (i\mathbf{n}^\times) M - n_0^2 (i\mathbf{n}^\times) Q(i\mathbf{n}^\times) \right] = 0. \tag{1.12}$$

Решение алгебраического уравнения (1.12) в случае произвольного направления распространения волны относительно направления движения среды – весьма громоздкая задача, поэтому в данной работе мы ограничимся рассмотрением двух частных случаев.

2 Распространение волн вдоль и против направления движения среды

Пусть волновой вектор \mathbf{k} распространяющейся волны и вектор скорости движения среды \mathbf{V} коллинеарны. При этом мы будем полагать, что $\tau = \mathbf{n}$. В этом случае из выражений (1.6) следуют формулы для матриц –

$$\begin{aligned}
 P &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[\varepsilon \mu - |\xi|^2 - \beta^2 - \beta^2 \left(\varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) (\mathbf{n} \circ \mathbf{n}) - 2i \alpha \beta \mathbf{n}^\times \right]; \\
 L(i\mathbf{n}^\times) &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[\left(\xi - \beta^2 \xi^* \right) (i\mathbf{n}^\times) - i\beta \left(\varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) (1 - \mathbf{n} \circ \mathbf{n}) \right]; \\
 (i\mathbf{n}^\times) M &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[\left(\beta^2 \xi - \xi^* \right) (i\mathbf{n}^\times) - i\beta \left(\varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) (1 - \mathbf{n} \circ \mathbf{n}) \right]; \\
 (i\mathbf{n}^\times) Q(i\mathbf{n}^\times) &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[\left(1 - \beta^2 \left(\varepsilon \mu - |\xi|^2 \right) \right) (1 - \mathbf{n} \circ \mathbf{n}) + 2i \alpha \beta (i\mathbf{n}^\times) \right],
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

а также выражения для векторов

$$\mathbf{n}P = \mu^{-1} \left(\mu \varepsilon - |\xi|^2 \right) \mathbf{n};$$

$$\mathbf{n}L = \mu^{-1} \gamma^2 \left[\xi - \beta^2 \xi^* - 2i \alpha \beta \right] \mathbf{n}. \tag{2.2}$$

Учитывая (2.2) в уравнениях (1.11), получим условие ортогональности

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0. \tag{2.3}$$

Условие (2.3) и структура входящих в уравнение (1.10) матриц (2.1) определяют возможность нахождения собственных значений величины n_0 не в результате прямого решения дисперсионного уравнения (1.12), а с использованием метода, посредством которого удастся упростить задачу. Для этого рассмотрим следующее вспомогательное равенство [6]:

$$(in^*)E = \lambda E, \quad (2.4)$$

которое по сути является формулировкой задачи на собственные значения λ для матрицы in^* . Найдём эти значения. Умножая (2.4) слева на in^* и выполнив в правой части полученного таким образом равенства замену по формуле (2.4), приведём его к виду

$$(in^*)(in^*)E = \lambda^2 E. \quad (2.5)$$

С учётом второй из формул (1.5) и условия ортогональности векторов n и E (2.3) преобразуем (2.5) к следующему виду:

$$(1 - \lambda^2)E = 0,$$

откуда следует, что $\lambda = \pm 1$.

Учитывая условие ортогональности (2.3), можно исключить из формул (2.1) слагаемые, содержащие матрицу $n \circ n$, так как при подстановке (2.1) в уравнение (1.10) эти слагаемые обуславливают появление скалярного произведения $n \cdot E$. Учитывая равенство (2.4), заменим в (2.1) матрицы in^* величиной λ . С учётом этих преобразований представим уравнение (1.10) в виде

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon\mu - |\xi|^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta\lambda + \right. \\ & \left. + 2n_0(\alpha(1 + \beta^2)\lambda - \beta(\varepsilon\mu - |\xi|^2 - 1)) - \right. \\ & \left. - n_0^2(1 - \beta^2(\varepsilon\mu - |\xi|^2) + 2\alpha\beta\lambda) \right] E = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) содержит только единичную матрицу, поэтому задача о нахождении собственных значений величины n_0 теперь состоит в решении квадратного уравнения, получаемого приравниванием к нулю множителя при E в (2.6). Для упрощения решения этого уравнения введём обозначения [7]

$$\begin{aligned} n_+ &= \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} + \alpha; \\ n_- &= \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} - \alpha. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Величины, определённые по формулам (2.7), являются показателями преломления неподвижной биизотропной среды, в которой распространяется плоская монохроматическая волна – правоциркулярно поляризованная и левоциркулярно поляризованная соответственно. Из (2.7) следуют выражения

$$\begin{aligned} n_+ n_- &= \varepsilon\mu - |\xi|^2; \\ n_+ - n_- &= 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.8)$$

С учётом (2.8) уравнение для n_0 запишем в форме

$$\begin{aligned} & (n_+ + \lambda\beta)(n_- - \lambda\beta) - \\ & - n_0((\beta n_+ + \lambda)(n_- - \lambda\beta) + (\beta n_- - \lambda)(n_+ + \lambda\beta)) + \\ & + n_0^2(\beta n_+ + \lambda)(\beta n_- - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Решения этого уравнения представим в виде

$$\begin{aligned} n_{0(+)}^{(\lambda)}(\beta) &= \frac{n_+ + \lambda\beta}{\beta n_+ + \lambda}; \\ n_{0(-)}^{(\lambda)}(\beta) &= \frac{n_- - \lambda\beta}{\beta n_- - \lambda}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

После подстановки в (2.9) значений $\lambda = \pm 1$ получим четыре выражения для показателя преломления в лабораторной системе отсчёта K :

$$\begin{aligned} n_{0(+)}^{(+)}(\beta) &= \frac{n_+ + \beta}{\beta n_+ + 1}; & n_{0(+)}^{(-)}(\beta) &= \frac{n_+ - \beta}{\beta n_+ - 1}; \\ n_{0(-)}^{(-)}(\beta) &= \frac{n_- + \beta}{\beta n_- + 1}; & n_{0(-)}^{(+)}(\beta) &= \frac{n_- - \beta}{\beta n_- - 1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из формул (2.10) видно, что они попарно связаны между собой равенствами

$$\begin{aligned} n_{0(+)}^{(+)}(\beta) &= -n_{0(+)}^{(-)}(-\beta); \\ n_{0(-)}^{(+)}(\beta) &= -n_{0(-)}^{(-)}(-\beta). \end{aligned}$$

Величины $n_{0(+)}^{(+)}(\beta)$, $n_{0(-)}^{(-)}(\beta)$ положительно определены, а знак величин $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$, $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$ может меняться в зависимости от значения параметра β . Далее произведём анализ показателей преломления (2.10) и их трансформацию при переходе в покоящуюся систему отсчёта.

3 Анализ показателей преломления

При переходе из лабораторной системы отсчёта K в покоящуюся K' величины $n_{0(+)}^{(+)}(\beta)$ и $n_{0(-)}^{(-)}(\beta)$ преобразуются в показатели преломления n_+ и n_- соответственно. Так как все эти четыре величины положительны, то в обеих системах отсчёта волны распространяются вдоль направления движения среды.

Величины $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$ и $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$ при переходе в покоящуюся систему отсчёта становятся равными $-n_+$ и $-n_-$ соответственно, т. е. электромагнитные волны распространяются против направления движения среды в этой системе отсчёта.

Обсудим теперь, как будут распространяться эти волны в лабораторной системе отсчёта. При этом будем полагать, что $n_{\pm} > 1$.

Рассмотрим четыре случая:

1) $\beta < 1/n_{\pm}$ ($V < c/n_{\pm}$). При таких значениях β величины $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$, $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$ отрицательны. Таким образом, в лабораторной системе отсчёта волны будут распространяться против направления движения среды;

2) $\beta > 1/n_{\pm}$ ($V > c/n_{\pm}$). В этом случае величины $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$, $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$ положительны и

соответствующие волны распространяются вдоль направления движения среды в лабораторной системе отсчёта;

3) $\beta = 1/n_{\pm}$ ($V = c/n_{\pm}$ – фазовая скорость волны в системе покоя). При таком значении β волна будет «покоиться» в лабораторной системе отсчёта;

4) $1/n_{+} < \beta < 1/n_{-}$ ($c/n_{+} < V < c/n_{-}$). В случае таких значений β величина $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$ положительна, а величина $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$ отрицательна, т. е. в лабораторной системе отсчёта правоциркулярно поляризованная волна распространяется вдоль направления движения среды, а левоциркулярно поляризованная – противоположно.

Отметим, что выводы, аналогичные первым трём, могут быть сделаны и при анализе формулы (7.8) для $\vartheta = 0$, приведенной в работе [8] для описания движущейся изотропной среды. Четвёртый вывод не применим в случае изотропной среды.

Заключение

Таким образом, в данной работе получено дисперсионное уравнение для описания распространения плоской монохроматической волны в движущейся биизотропной среде в произвольном направлении относительно направления движения среды. Точные решения дисперсионного уравнения (показатели преломления) найдены в частных случаях: когда волновой вектор направлен вдоль направления движения биизотропной среды и противоположно ему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aladadi, Y.T. Classification and characterization of electromagnetic materials / Y.T. Aladadi, M.A.S. Alkanhal // Scientific Reports. – 2020. – Vol. 10, № 11406. – P. 1–11.
2. Tanisli, M. Octonionic Maxwell's equations for bi-isotropic media / M. Tanisli, M.E. Kansu // Journal of Mathematical Physics. – 2011. – Vol. 52, № 5. – P. 053511.
3. Иванов, О.В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах / О.В. Иванов. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 262 с.
4. *Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media* / I.V. Lindell [et. al.]. – Boston and London: Artech House, 1994. – 500 p.
5. *Теоретическая физика: в 10 т.* / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 4-е изд. – Москва: Физматлит, 2005. – Т. 8: Электродинамика сплошных сред. – 656 с.
6. Годлевская, А.Н. Волновые функции фотона в естественно гиротропной среде / А.Н. Годлевская, В.Н. Капшай // Оптика и спектроскопия. – 1989. – Т. 66, № 4. – С. 830–834.
7. Капшай, В.Н. Рассеяние электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 7–21.
8. Болотовский, Б.М. Современное состояние электродинамики движущихся сред (Безграничные среды) / Б.М. Болотовский, С.Н. Столяров // УФН. – 1974. – Т. 114, Вып. 4. – С. 569–608.

Поступила в редакцию 29.04.2021.