

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Э.И. Старовойтов¹, Ю.М. Плескачевский², А.В. Яровая¹

¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

²Белорусский национальный технический университет, Минск

DEFORMATION OF A THREE-LAYER CIRCULAR PLATE UNDER CREEP CONDITIONS

E.I. Starovoitov¹, Yu.M. Pleskatshevsky², A.V. Yarovaya¹

¹Belarusian State University of Transport, Gomel

²Belarusian National Technical University, Minsk

Аналитическое решение краевой задачи об осесимметричном изгибе круговой трехслойной пластины в условиях ползучести получено с помощью экспериментально-теоретического метода Ильющина. Используются физические уравнения состояния наследственной теории линейной вязкоупругости. Предполагалось подобие ядер ползучести материалов слоев. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластины принята гипотеза ломаной линии. В несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом наполнителе принята гипотеза Тимошенко. В качестве исходного взято известное решение аналогичной задачи теории упругости для подобной трехслойной пластины. Проведена численная апробация полученного решения.

Ключевые слова: трехслойная пластина, изгиб, подобие ядер ползучести, экспериментально-теоретический метод.

The analytical solution of the boundary value problem of axisymmetric bending of a circular three-layer plate under creep conditions is obtained using the experimental-theoretical Ilyushin method. The physical equations of state of the hereditary theory of linear viscoelasticity are used. The similarity of the creep cores of the layer materials was assumed. The polyline hypothesis is used to describe the kinematics of a plate package that is not symmetric in thickness. In the bearing layers, the Kirchhoff hypotheses are valid. In a relatively thick placeholder, the Timoshenko hypothesis is accepted. The well-known solution of a similar problem in the theory of elasticity for such a three-layer plate is taken as the initial one. Numerical approbation of the obtained solution is carried out.

Keywords: three-layer plate, bending, similarity of creep nuclei, experimental-theoretical method.

Введение

В процессе развития техники и строительства все большее распространение получили слоистые конструкции, одним из элементов которых являются трехслойные пластины. При условии обеспечения минимальных весовых показателей и удовлетворения ограничений на прочность и жесткость они являются оптимальными несущими конструкциями.

Квазистатическому и динамическому деформированию слоистых элементов конструкций посвящен ряд публикаций. Постановки и методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач рассмотрены в монографиях [1]–[5]. Динамике оболочек под действием различных нагрузок посвящены статьи [6]–[8]. В публикациях [9]–[12] рассмотрены колебания трехслойных пластин под действием локальных, резонансных и мгновенных нагрузок. Решения выписаны в виде разложения в ряд по собственным функциям.

Изучение изгиба трехслойных и многослойных балок проведено в работах [13], [14]. Результаты исследования изотермического деформирования трехслойных круговых и прямоугольных

пластин, в том числе со сжимаемым наполнителем и связанных с упругим основанием Винклера и Пастернака, содержатся в статьях [15]–[23]. Для прямоугольных пластин решения получены конечно-элементным методом Галеркина. Для круговых – решения выписаны в конечном виде с использованием функций Бесселя.

Влияние температуры на напряженно-деформированное состояние трехслойных цилиндрических оболочек рассматривалось в статьях [24], [25]. Деформирование трехслойных пластин в температурном поле исследовано в работах [26]–[28]. Постановка краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины в своей плоскости и ее общее решение опубликованы в [29]–[31]. Исследование влияния развития трещин на прочность упругопластических пластин проведено в [32]–[34].

В данной работе с помощью метода аппроксимаций построено аналитическое решение краевой задачи об изгибе линейной вязкоупругой несимметричной по толщине круговой трехслойной пластины осесимметричной нагрузкой.

1 Изгиб упругой пластины

Кинематика деформирования пластины соответствует гипотезе ломаной линии. Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа о прямолинейности, несжимаемости и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности. Относительно толстый жесткий наполнитель ($h_3 = 2c$), воспринимает нагрузку в тангенциальном направлении, для него справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали, которая после приложения нагрузки поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ . Постановка задачи и ее решение приводится в цилиндрической системе координат r, φ, z . За координатную принимается срединная плоскость наполнителя (рисунок 1.1). Внешняя нагрузка $q(r)$ параллельна оси z . Относительному сдвигу слоев на контуре пластины препятствует жесткая диафрагма, устраняющая относительный сдвиг в наполнителе ($\psi = 0$ при $r = r_0$).

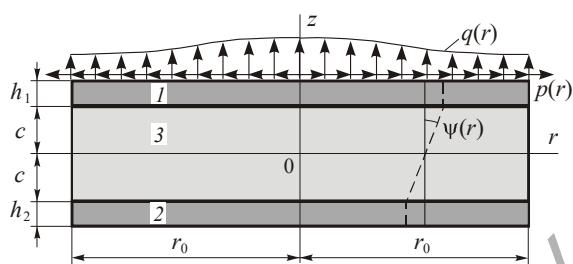


Рисунок 1.1 – Расчетная схема пластины

В соответствии с осесимметричностью внешней нагрузки окружные перемещения в слоях отсутствуют $u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя). При этом искомые величины – прогиб пластины w , относительный сдвиг в наполнителе ψ и радиальное перемещение координатной плоскости u зависят только от радиальной координаты r и не зависят от окружной координаты φ . В дальнейшем перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 , h_k – относительная толщина k -го слоя.

Решение краевой задачи об изгибе упругой круговой трехслойной пластины, с защемленным контуром, получено в [1]:

$$u = \frac{a_3}{a_1 a_6 - a_3^2} \left[\left(a_5 - \frac{a_2 a_6}{a_3} \right) \psi + \frac{qr}{16} (r^2 - 1) \right], \quad (1.1)$$

$$\psi = \frac{b_2 q}{4cb_3 G_3} \left(\frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta)} - r \right), \quad (1.2)$$

$$w = \frac{b_2^2 q}{4cb_3^2 G_3} \left(\frac{I_0(\beta r) - I_0(\beta)}{\beta I_1(\beta)} - \frac{1}{2} (r^2 - 1) \right) + \frac{q}{64b_3} (r^2 - 1)^2, \quad (1.3)$$

где $I_0(\beta r)$, $I_1(\beta r)$ – модифицированные функции Бесселя; коэффициенты

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+),$$

$$a_3 = h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+,$$

$$a_4 = c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right),$$

$$a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right],$$

$$a_6 = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ +$$

$$+ h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+,$$

$$\beta = \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2},$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+, \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-;$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1},$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}, \quad \gamma_1 = \frac{b_2}{b_1 b_3 - b_2^2};$$

K_k, G_k – модули объемной и сдвиговой деформаций материала k -го слоя.

2 Методика решения задачи линейной вязкоупругости

Физические уравнения состояния для линейно вязкоупругой среды записываются в следующей девиаторно-шаровой форме:

$$2G \varepsilon_{ij}(t) = s_{ij}(t) + \int_0^t \Gamma(t - \tau) s_{ij}(\tau) d\tau,$$

$$K \theta(t) = \sigma(t), \quad (2.1)$$

где s_{ij}, ε_{ij} – девиаторы тензоров напряжений и деформаций; $\theta = \varepsilon_{kk}$ – объемная относительная деформация; $\sigma = \sigma_{kk}/3$ – шаровая часть тензора напряжений; G, K – модули сдвига и объемной деформации в момент приложения нагрузки, $\Gamma(t)$ – ядро ползучести материала.

Следовательно, согласно уравнениям (2.1) деформации ε_{ij} в данный момент времени t определяются не только действующим мгновенным значением девиатора напряжений s_{ij} , но и всей предшествующей историей их изменения. Для описания этого используется некоторая наследственная функция $\Gamma(t)$, называемая ядром ползучести, которая является положительной монотонно убывающей функцией и определяется экспериментально. Она имеет своим аргументом разность $(t - \tau)$, показывая инвариантность уравнений (2.1) относительно начала отсчета времени. Объемное деформирование θ считается упругим.

Если из уравнений (2.1) выразить напряжения через деформации, то получим

$$s_{ij}(t) = 2G \left(\varepsilon_{ij}(t) - \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right),$$

$$\sigma(t) = K \theta(t), \quad (2.2)$$

где $R(t)$ – ядро релаксации материала.

Уравнения (2.2) можно переписать в операторном виде:

$$s_{ij} = 2G^* \varepsilon_{ij}, \quad \sigma = K\theta, \quad (2.3)$$

где операторы

$$G^* = G(1 - R^*), \quad R^* f = \int_0^t R(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

А.А. Ильюшин сформулировал теорему о том, что решение задачи теории упругости может быть представлено в следующей символической форме [35]:

$$u = f + \omega\varphi + \frac{1}{\omega}\xi + \frac{1}{1 + \beta_k \omega} \chi_k,$$

где f, φ, ξ, χ_k – известные функции координат, внешних нагрузок, заданных перемещений на границе, температуры; параметр $\omega = 2G / 3K$; β_k – постоянные коэффициенты; по повторяющемуся индексу k проводится суммирование.

Если решение задачи теории упругости в подобном виде представимо, то решение соответствующей задачи линейной вязкоупругости в операторном виде будет следующим:

$$u^* = f^* + \omega^* \varphi^* + \frac{1}{\omega^*} \xi^* + \frac{1}{1 + \beta_k \omega^*} \chi_k^*, \quad (2.4)$$

где $\omega^* = 2G^* / 3K$.

Рассмотрим процедуру перехода в решении (2.4) от операторов к оригиналам. Для этого введем оператор Ильюшина

$$g_{\beta k}^* \equiv \frac{1}{1 + \beta_k \omega^*}.$$

Если оператору $g_{\beta k}^*$ соответствует известная функция времени, то обращение решения (2.4) в оригиналы будет следующее:

$$u(t) = f(t) + \frac{2G}{3K} \left(\varphi(t) - \int_0^t R(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right) + \frac{3K}{2G} \left(\xi(t) + \int_0^t \Gamma(t - \tau) \xi(\tau) d\tau \right) + \int_0^t g_{\beta k}^*(t - \tau) d\chi_k(\tau). \quad (2.5)$$

А.А. Ильюшиным разработана методика экспериментального определения функций $g_{\beta k}(t)$, поэтому в дальнейшем считаем их известными для применяемых материалов слоев.

3 Изгиб линейно вязкоупругой трехслойной пластины

Решение задачи линейной вязкоупругости для круговой трехслойной, защемленной по контуру, пластины получим из решения (1.1)–(1.3), воспользовавшись рассмотренным методом аппроксимаций Ильюшина. Дополнительно ограничимся классом материалов заполнителя, для которых выполнение условия $\beta < 1$. Это выполняется, если модуль упругости заполнителя G_3 ,

K_3 гораздо меньше, чем соответствующие параметры материалов несущих слоев. Это позволяет аппроксимировать модифицированные функции Бесселя при $0 < x < 1$ с достаточной степенью точности следующей формулой [36]:

$$I_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^n - \frac{1}{\Gamma(n+2)} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2}.$$

В этом случае точность подобного представления функций $I_0(x), I_1(x)$ можно оценить с помощью остаточного члена ряда в форме Лагранжа:

$$R_0(x) = \frac{I_0^{IV}(\vartheta x)}{4!} x^4, \quad R_1(x) = \frac{I_1^V(\vartheta x)}{5!} x^5, \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Производные бesselевых функций будут

$$I_0^{IV}(x) = \frac{1}{8}(3I_0(x) + 4I_2(x) + I_4(x)),$$

$$I_1^V(x) = \frac{1}{32}(10I_0(x) + 15I_2(x) + 6I_4(x) + I_6(x)).$$

Функции $I_0(x), I_1(x)$ монотонно возрастают, поэтому для них справедливы следующие оценки:

$$R_0(x) = \frac{I_0^{IV}(1)}{4!} x^4, \quad R_1(x) = \frac{I_1^V(1)}{5!} x^5.$$

С помощью таблиц функций Бесселя [36] получим следующую численную оценку:

$$R_0(x) = 0,0240x^4, \quad R_1(x) = 0,00432x^5.$$

Решения задачи об изгибе круговой трехслойной линейно вязкоупругой пластины проведем с использованием дополнительной гипотезы о подобии ядер релаксации:

$$R_k(t) = c_k R(t), \quad c_k \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \quad R_3(t) \equiv R(t), \quad (3.1)$$

т. е., ядра релаксации материалов несущих слоев пластины и заполнителя отличаются на постоянный множитель c_k .

Проведем в коэффициентах a_i решения (1.1)–(1.3) замену модуля сдвига G_k на соответствующий оператор вязкоупругости G_k^* (2.3). В полученных величинах a_i^* выделим операторы Ильюшина $g_{\beta k}^*$:

$$g_{\beta k}^* = \frac{1}{1 + \beta_k \omega^*}, \quad \omega^* = \frac{2G^*}{3K}, \quad \beta_k = \text{const}. \quad (3.2)$$

В соответствии с гипотезой подобия ядер релаксации (3.1) получим формулы, связывающие операторы вязкоупругости материалов несущих слоев и заполнителя:

$$G_k^* = G_k(1 - c_k) + \frac{c_k G_k}{G} G^*,$$

$$G \equiv G_3, \quad G^* \equiv G_3^*, \quad K \equiv K_3.$$

Отсюда

$$K_k^{+*} = K_{k1} + K_{k2} \omega^*, \quad K_{k1} = K_k + \frac{4}{3} G_k (1 - c_k),$$

$$K_{k2} = 2c_k G_k K / G.$$

и операторы a_i^* ($i = 1, \dots, 6$) преобразуются к виду

$$a_i^* = a_{i1} + a_{i2} \omega^*,$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{1\alpha} &= \sum_{k=1}^3 h_k K_{k\alpha}^+, \quad a_{2\alpha} = c(h_1 K_{1\alpha} - h_2 K_{2\alpha}), \\
 a_{3\alpha} &= h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_{1\alpha} - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_{2\alpha}, \\
 a_{4\alpha} &= c^2 \left[h_1 K_{1\alpha} + h_2 K_{2\alpha} + \frac{2}{3} c K_{3\alpha} \right], \\
 a_{5\alpha} &= c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_{1\alpha} + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_{2\alpha} + \frac{2}{3} c^2 K_{3\alpha} \right], \\
 a_{6\alpha} &= h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_{1\alpha} + \\
 &+ h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_{2\alpha} + \frac{2}{3} c^3 K_{3\alpha} \\
 &(\alpha = 1, 2).
 \end{aligned}$$

Остальные операторы выражаются через a_i^* :

$$\begin{aligned}
 b_1^* &= \frac{a_1^* a_4^* - a_2^{*2}}{a_1^*}, \quad b_2^* = \frac{a_1^* a_5^* - a_2^* a_3^*}{a_1^*}, \quad b_3^* = \frac{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}}{a_1^*}, \\
 \beta^{*2} &= \frac{2c b_3^* G_3^*}{b_1^* b_3^* - b_2^{*2}}.
 \end{aligned}$$

Теперь решение задачи линейной вязкоупругости в операторах следует формально из (1.1)–(1.3) при добавлении звездочки сверху искомым функциям и коэффициентам, содержащих величины ω^* :

$$\begin{aligned}
 u^* &= \frac{a_3^*}{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}} \left[\left(a_5^* - \frac{a_2^* a_6^*}{a_3^*} \right) \psi^* + \frac{q^* r}{16} (r^2 - 1) \right], \\
 \psi^* &= -\frac{b_2^* q^*}{4c b_3^* G_3^*} \left(\frac{I_1(\beta^* r)}{I_1(\beta^*)} - r \right), \\
 w^* &= \frac{b_2^{*2} q^*}{4c b_3^{*2} G_3^*} \left(\frac{I_0(\beta^* r) - I_0(\beta^*)}{\beta^* I_1(\beta^*)} - \frac{1}{2} (r^2 - 1) \right) + \\
 &+ \frac{q^*}{64 b_3^*} (r^2 - 1)^2. \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Выразим входящие в решение (3.3) величины со звездочками через операторы $g_{\beta k}^*$, ω^* :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{b_3^*} &= \alpha_1 g_{\beta 1}^* + \alpha_2 g_{\beta 2}^*, \\
 \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^*} &= \alpha_3 g_{\beta 3}^* + \alpha_4 g_{\beta 4}^* + \alpha_0 \frac{1}{\omega^*}.
 \end{aligned}$$

Воспользовавшись приведенной выше аппроксимацией функций Бесселя, получим для других операторов, входящих в выражение для относительного сдвига со звездочкой:

$$\begin{aligned}
 \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^*} \frac{I_1(\beta^* r)}{I_1(\beta^*)} &= \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^*} r \left(r^2 + \frac{8(1-r^2)}{8+\beta^{*2}} \right), \\
 \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^* (8+\beta^{*2})} &= \alpha_5 g_{\beta 3}^* + \alpha_6 g_{\beta 4}^* + \alpha_7 g_{\beta 5}^* + \alpha_8 g_{\beta 6}^* +
 \end{aligned}$$

$$+ \alpha_9 g_{\beta 7}^* + \alpha_{10} g_{\beta 8}^* + \alpha_{11} \frac{1}{\omega^*},$$

$$\frac{b_2^{*2}}{b_3^* G_3^*} = \alpha_{12} \frac{1}{\omega^*} + \alpha_{13} g_{\beta 3}^* + \alpha_{14} g_{\beta 4}^* + \alpha_{15} g_{\beta 3}^{*2} + \alpha_{16} g_{\beta 4}^{*4}.$$

Оператор в выражении (3.3) для прогиба w^* принимает вид

$$\frac{b_2^{*2}}{b_3^* G_3^*} \frac{I_0(\beta^* r) - I_0(\beta^*)}{\beta^* I_1(\beta^*)} = \frac{4b_2^{*2} (r^2 - 1)}{b_3^* G_3^* (8 + \beta^{*2})}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 \frac{b_2^{*2}}{b_3^* G_3^* (8 + \beta^{*2})} &= \\
 &= \alpha_{17} \frac{1}{\omega^*} + \alpha_{18} g_{\beta 3}^{*2} + \alpha_{19} g_{\beta 4}^{*2} + \sum_{n=3}^8 \alpha_{17+n} g_{\beta n}^*.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты α_m ($m = 1, 2, \dots, 41$) и β_k ($k = 1, 2, \dots, 8$) из-за их громоздкости здесь не приводятся.

Операторы, входящие в выражение (3.3) для радиального перемещения u^* будут следующими:

$$\frac{a_3^*}{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}} = \alpha_{26} g_{\beta 1}^* + \alpha_{27} g_{\beta 2}^*,$$

$$\frac{a_3^* a_5^* - a_2^* a_6^*}{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}} \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^*} =$$

$$= \alpha_{28} g_{\beta 1}^* + \alpha_{29} g_{\beta 2}^* + \alpha_{30} g_{\beta 3}^* + \alpha_{31} g_{\beta 4}^* + \alpha_{32} \frac{1}{\omega^*},$$

$$\frac{a_3^* a_5^* - a_2^* a_6^*}{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}} \frac{b_2^* I_1(\beta^* r)}{b_3^* G_3^* I_1(\beta^*)} =$$

$$= \frac{a_3^* a_5^* - a_2^* a_6^*}{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}} \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^*} r \left(r^2 + \frac{8(1-r^2)}{8+\beta^{*2}} \right),$$

$$\frac{a_3^* a_5^* - a_2^* a_6^*}{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}} \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^* (8 + \beta^{*2})} = \alpha_{33} \frac{1}{\omega^*} + \sum_{n=1}^8 \alpha_{33+n} g_{\beta n}^*.$$

Используя полученные разложения операторов, решение (3.3) можно переписать в изображениях следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u^* &= \frac{r(r^2 - 1)q^*}{4c} \left(\left(\frac{c}{4} \alpha_{26} + \alpha_{28} \right) g_{\beta 1}^* + \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{c}{4} \alpha_{27} + \alpha_{29} \right) g_{\beta 2}^* + \right. \\
 &+ \left. \alpha_{30} g_{\beta 3}^* + \alpha_{31} g_{\beta 4}^* + (\alpha_{32} - 8\alpha_{33}) \frac{1}{\omega^*} - \sum_{n=1}^8 \alpha_{n+33} g_{\beta n}^* \right), \\
 \psi^* &= \frac{r(r^2 - 1)q^*}{4c} \times \\
 &\times \left((\alpha_0 - 8\alpha_1) \frac{1}{\omega^*} + \sum_{n=3}^4 \alpha_n g_{\beta n}^* - 8 \sum_{n=3}^8 \alpha_{n+2} g_{\beta n}^* \right), \\
 w^* &= \frac{(r^2 - 1)^2 q^*}{64} (\alpha_1 g_{\beta 1}^* + \alpha_2 g_{\beta 2}^*) + \\
 &+ \frac{(r^2 - 1)q^*}{8c} \left((8\alpha_{17} - \alpha_{12}) \frac{1}{\omega^*} + 8 \sum_{n=3}^8 \alpha_{n+17} g_{\beta n}^* + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=3}^4 ((8\alpha_{n+15} - \alpha_{n+12})g_{\beta n}^{*2} - \alpha_{n+10}g_{\beta n}^*) \Big). \quad (3.4)$$

Изображению $1/\omega^*$ отвечает ядро ползучести $\Gamma(t)$, изображениям операторов $g_{\beta n}^*$ (3.2) соответствуют оригиналы $g_{\beta n}(t)$, определяемые экспериментально.

Решение задачи об изгибе трехслойной круговой линейно вязкоупругой пластины следует из операторного решения (3.4) после расшифровки входящих туда операторов с помощью представления (2.5):

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &= \\ &= \frac{r(r^2 - 1)}{4c} \left[(\alpha_0 - 8\alpha_1) \left(q(t) + \int_0^t R(t - \tau)q(\tau)d\tau \right) + \right. \\ &+ \sum_{n=3}^4 \alpha_n \int_0^t g_{\beta n}(t - \tau)dq(\tau) - 8 \sum_{n=3}^8 \alpha_{n+2} \int_0^t g_{\beta n}(t - \tau)dq(\tau) \Big], \\ u(r, t) &= \\ &= \frac{r(r^2 - 1)}{4c} \left[(\alpha_{32} - 8\alpha_{33}) \left(q(t) + \int_0^t R(t - \tau)q(\tau)d\tau \right) + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^2 \left(\left(\frac{c}{4} \alpha_{n+25} + \alpha_{n+27} \right) \int_0^t g_{\beta n}(t - \tau)dq(\tau) + \right. \\ &\left. + \alpha_{n+29} \int_0^t g_{\beta(n+2)}(t - \tau)dq(\tau) \right) - \\ &\left. - \sum_{n=1}^8 \alpha_{n+33} \int_0^t g_{\beta n}(t - \tau)dq(\tau) \right], \\ w(r, t) &= \frac{(r^2 - 1)^2}{64} \sum_{n=1}^2 \alpha_n \int_0^t g_{\beta n}(t - \tau)dq(\tau) + \\ &\frac{r^2 - 1}{8c} \left[(8\alpha_{17} - \alpha_{12}) \left(q(t) + \int_0^t R(t - \tau)q(\tau)d\tau \right) + \right. \\ &+ 8 \sum_{n=3}^8 \alpha_{n+17} \int_0^t g_{\beta n}(t - \tau)dq(\tau) + \\ &+ \sum_{n=3}^4 \left((8\alpha_{n+15} - \alpha_{n+12}) \int_0^t g_{\beta n}(t - \tau)d \int_0^t g_{\beta n}(t - \tau)dq(\tau) - \right. \\ &\left. \left. \alpha_{n+10} \int_0^t g_{\beta n}(t - \tau)dq(\tau) \right) \right]. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Аналитическое решение (3.5) справедливо для трехслойной круговой пластины с защемленным контуром, материалы слоев которой обладают вязкоупругими свойствами и для ядер релаксации которых выполняется условие подобия (3.1). При свободном опирании контура количество экспериментальных функций $g_{\beta n}(t)$ не увеличивается.

4 Численные результаты

Численная апробация решения (3.5) проведена для круговой трехслойной пластины, слой которой составлены из материалов Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т. Ядро релаксации принима-

лось в виде, предложенном А.Р. Ржаницыным. Относительные толщины слоев сэндвич пластины $h_1 = h_2 = 0,04$, $h_3 = 0,2$. Величина интенсивности поперечной распределенной нагрузки $q = 3$ МПа. Все необходимые механические и прочностные параметры этих материалов заимствованы из монографии [1].

На рисунке 4.1 показано изменение прогиба и относительного сдвига в заполнителе вдоль радиуса для упругой и вязкоупругой пластин. Учет ползучести материалов добавляет к максимальному расчетному прогибу упругой пластины 10,3%.

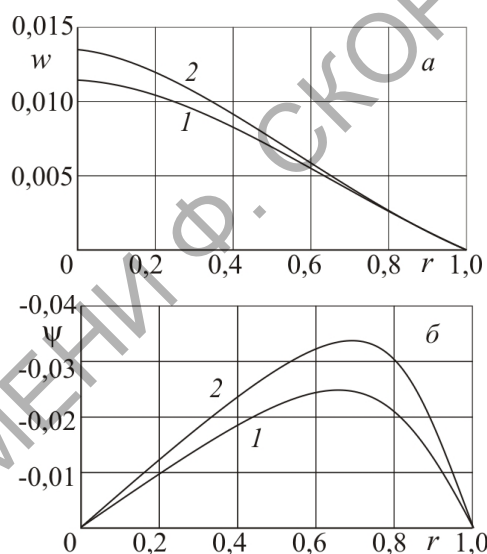


Рисунок 4.1 – Изменение прогиба (а) и относительного сдвига (б) вдоль радиуса: 1 – упругая пластина, 2 – вязкоупругая

Заключение

Следовательно, аналитическое решение задачи об изгибе круговой трехслойной вязкоупругой пластины включает ядро ползучести и восемь экспериментальных функций $g_{\beta n}(t)$. Экспериментальное нахождение этих функций связано с определенными трудностями, поэтому часто удобно использовать численные методы решения подобных задач. Предложенное общее аналитическое решение линейной задачи вязкоупругости для трехслойной круговой пластины и численные результаты могут быть применены в инженерной практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Журавков, М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.

3. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморадикационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Белорусская наука, 2017. – 276 с.
4. Головки, К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К.Г. Головки, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш. – Киев: Киевский ун-т, 2012. – 541 с.
5. Плескачевский, Ю.М. Динамика металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. наука, 2004. – 386 с.
6. *Tarlakovskii, D.V.* Two-Dimensional Non-stationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability.* – 2014. – № 43 (2). – P.145–152.
7. Горшков, А.Г. Гармонические колебания трехслойной цилиндрической вязкоупругопластической оболочки / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // *Прикладная механика.* – 2001. – № 9. – С. 100–107.
8. *Paimushin, V.N.* Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour / V.N. Paimushin // *Mechanics of Composite Materials.* – 2017. – № 53 (1). – P. 3–26.
9. Старовойтов, Э.И. Резонансные колебания круговых композитных пластин на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // *Механика композитных материалов.* – 2015. – Т. 51, № 5. – С. 793–806.
10. *Deshpande, V.S.* Dynamic Response of a Clamped Circular Sandwich Plate Subject to Shock Loading / V.S. Deshpande, N.A. Fleck // *J. Appl. Mech.* – 2004. – Vol. 71, № 5. – P. 637–645.
11. Старовойтов, Э.И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* – 2001. – № 4. – С. 37–40.
12. *Škec, L.* Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection / L. Škec, G. Jelenić // *Acta Mechanica.* – 2014. – Vol. 225, № 2. – P. 523–541.
13. *Belinha, J.* Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method / J. Belinha, L.M. Dints // *Composite Structures.* – 2007. – Vol. 78, № 3. – P. 337–350.
14. *Julien, D.* Limit analysis of multi-layered plates. Part II: The Homogenized Love-Kirchhoff Model / D. Julien, S. Karam // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* – 2008. – Vol. 56, № 2. – P. 561–580.
15. Москвитин, В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // *Механика композитных материалов.* – 1985. – № 3. – С. 409–416.
16. Козел, А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании / А.Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации.* – 2017. – Вып. 10. – С. 90–95.
17. Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.
18. Козел, А.Г. Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сдвиг-пластины / А.Г. Козел // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии.* – 2018. – № 6 (332). – С. 25–35.
19. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2017. – № 4 (4). – С. 53–57.
20. Захарчук, Ю.В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации.* – 2017. – № 10. – С. 55–66.
21. Захарчук, Ю.В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.
22. Старовойтов, Э.И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э.И. Старовойтов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1989. – № 5. – С. 114–119.
23. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* – 2016. – № 1. – С. 91–97.
24. Зеленая, А.С. Напряженно-деформированное состояние термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А.С. Зеленая // *Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки.* – 2018. – № 6 (111). – С. 98–104.
25. *Zenkour, A.M.* Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates / M.A. Zenkour, N.A. Alghamdi // *Journal of Sandwich Structures and Materials.* – 2010. – Vol. 12, № 1. – P. 7–46.
26. *Zenkour, A.M.* Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads / A.M. Zenkour, N.A. Alghamdi // *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* – 2010. – Vol. 17, № 6. – P. 419–432.
27. Нестерович, А.В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А.В. Нестерович // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

28. *Нестерович, А.В.* Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А.В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации.* – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.

29. *Нестерович, А.В.* Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации.* – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

30. *Нифагин, В.А.* Метод асимптотических разложений в теории упругопластических трещин / В.А. Нифагин, М.А. Бубич // *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* – 2011. – № 4. – С. 60–66.

31. *Гундина, М.А.* Энергетические инварианты в теории упругопластических трещин /

М.А. Гундина // *Наука и техника.* – 2017. – Т. 16, № 4. – С. 355–362.

32. *Гундина, М.А.* Определение начального направления развития трещины в момент старения / М.А. Гундина // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2019. – № 1 (38). – С. 40–44.

33. *Ильюшин, А.А.* Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. – М.: Наука, 1970. – 280 с.

34. *Янке, Е.* Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1979. – 342 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № T20P-047).

Поступила в редакцию 25.01.2021.