УДК 621.384.6.01

К теории кулоновского сдвига частот некогерентных колебаний частиц в синхротронах

БОНЧ-ОСМОЛОВСКИЙ А. Г.

Так называемый критерий Ласлетта [1] максимальной интенсивности синхротронов установлен при следующих основных предположениях:

плотность частиц в сгустке близка к однородной;

поперечные размеры a, b сгустка существенно меньше высоты камеры.

Эти допущения приводят к тому, что сдвиг частот для всех частиц сгустка практически одинаков и, следовательно, если из-за сдвига частицы попадают в зону действия какого-либо резонанса, то этот резонанс действует одновременно и одинаково на все частицы сгустка.

Далее покажем, что после формирования сгустка в сепаратрисе из-за неоднородности плотности объемного заряда частицы сгустка оказываются распределенными по величине сдвига некогерентных частот, так что только некоторая часть их попадает в зону действия какого-либо резонанса, причем сдвиг меняется существенным образом не только в процессе ускорения, но в течение периода радиально-фазовых колебаний. Предварительное изучение этих вопросов было начато в наших предыдущих работах [2—4], в настоящей работе математически более полно исследуются изменения сдвига.

Расчет кулоновского сдвига в неоднородном по плотности сгустке. Для учета неоднородности плотности частиц в сгустке необходимо использовать данные экспериментальных измерений либо учитывать самосогласованную теорию сгустка в сепаратрисе. Зададимся законом изменения плотности в объеме сгустка, достаточно общим и неплохо отражающим результаты измерений на синхрофазотроне ОИЯИ [5] и на других ускорителях. Положим, что

$$\rho(x, \varphi, z) = \rho_\varphi(\varphi) \exp\left(-\frac{x}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right), \quad x = r - \overline{R}. \tag{1}$$

Здесь $\rho_\varphi(\varphi)$ — некоторая функция азимутальной координаты; для определенности примем

$$\rho_\varphi(\varphi) = \rho_0\left(1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}\right)^{3/2}, \tag{2}$$

где $2\varphi_0$ — азимутальная протяженность сгустка, связанная с фактором B (см. далее). Формула (2) близка к экспериментальному профилю сгустка в синхрофазотроне и может быть обоснована простыми теоретическими моделями.

Поскольку всегда выполняется сильное неравенство

$$a/\overline{R}\varphi_0 \ll 1, \tag{3}$$

при решении задачи о нахождении полей сгустка можно свести ее к задаче о поле в поперечной плоскости, считая на каждом азимуте неизменными форму сечения (эллипс с полуосями a, b) и распределение плотности. Зависимость плотности от φ при этом будет учтена в выражении сдвига медленно меняющимся множителем, вид которого ясен из равенства (2). Итак, имеем для потенциала

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 4\pi\rho_\varphi \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right),$$
$$\rho_\varphi = \rho_0(1 - \varphi^2/\varphi_0^2)^{3/2}. \tag{4}$$

Уравнение Пуассона вида (4) решалось неоднократно [6, 7]. Рассмотрим метод, приводящий к результатам в компактной форме, позволяющей провести несложный качественный и количественный анализы. Легко проверить, что решение уравнения (4) можно представить в виде разложения в интегралы Фурье по x и z*:

$$\Phi(x, \varphi, z) = -ab\rho_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl \exp(ikz + ilx) \times$$
$$\times \frac{\exp\left(-\frac{a^2l^2}{4} - \frac{b^2k^2}{4}\right)}{l^2 + k^2}. \tag{5}$$

В дальнейшем нас будут интересовать значения градиентов в медианной плоскости, т. е. при $z = 0$:

$$-\left.\frac{\partial E_x}{\partial x}\right|_{z=0} = 4ab\rho_\varphi \int_0^\infty dk \int_0^\infty \frac{l^2\,dl}{l^2 + k^2} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{a^2l^2}{4} - \frac{b^2k^2}{4}\right) \cos lx, \tag{6}$$

$$-\left.\frac{\partial E_z}{\partial z}\right|_{z=0} = 4ab\rho_\varphi \int_0^\infty \cos lx\, dl \int_0^\infty \frac{k^2\,dk}{l^2 + k^2} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{al^2}{4} - \frac{b^2k^2}{4}\right) \tag{7}$$

Используя интеграл вероятности — функцию $\Phi(x)$ [8], нетрудно привести выражения (6) и (7) к виду

$$-\left.\frac{\partial E_x}{\partial x}\right|_{z=0} = 2\pi ab\rho_\varphi \int_0^\infty l\,dl \cos lx \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{l^2}{4}(a^2 - b^2)\right]\left[1 - \Phi\left(\frac{lb}{2}\right)\right] = 2\pi ab\rho_\varphi I_q \times$$
$$\times (p, x); \tag{8}$$

$$-\left.\frac{\partial E_z}{\partial z}\right|_{z=0}=2\pi ab\rho_\varphi\left\{\frac{2}{ab}\,\mathrm{e}^{-x^2/a^2}-\right.$$
$$\left.-\int\limits_0^\infty l\,dl\cos lx\exp\left[-\frac{l^2}{4}(a^2-b^2)\right]\left[1-\Phi\left(\frac{lb}{2}\right)\right]\right\}=$$
$$=2\pi ab\rho_\varphi\left[\frac{2}{ab}\,\mathrm{e}^{-x^2/a^2}-I_q(p,x)\right]. \qquad (9)$$

Здесь введена функция I_q:

$$I_q(p,x)=\int\limits_0^\infty l\,dl\cos lx\exp(-ql^2)\,[1-\Phi(p,l)],$$
$$q=a^2-b^2>0, \qquad (10)$$
$$p=b/2.$$

Интеграл I_q через элементарные функции не выражается; однако методом дифференцирования по параметру p и после некоторых преобразований его можно привести к следующей форме, удобной для численных и качественных исследований:

$$I_q\left(\frac{b}{2},x\right)=\frac{1}{a^2}\int\limits_0^1\frac{\left(1-2\frac{x^2}{a^2}t\right)\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}t\right)}{\sqrt{1-q/a^2t}}\,dt. \qquad (11)$$

Вблизи центра сгустка ($x=0$, $z=0$, $\varphi=0$) из выражения (11) получаем $I_q\left(\frac{b}{2},0\right)=\frac{2}{a(a+b)}$, и, следовательно, кулоновский сдвиг частот для частиц в центре сгустка равен

$$\Delta\nu_x^2|_0=\frac{4\pi b\overline{R}^2r_pZ^2n_0}{\beta^2\gamma^3(a+b)A},\quad n_0=\rho_0/eZ; \qquad (12)$$

$$\Delta\nu_z^2|_0=\frac{4\pi a\overline{R}^2r_pZ^2n_0}{\beta^2\gamma^3(a+b)A},\quad \gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}. \qquad (13)$$

Значение n_0 можно связать с полным числом частиц в пучке:

$$N=8n_0\overline{R}\int\limits_0^L\int\limits_0^h\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right)\times$$
$$\times\,dx\,dz\int\limits_0^{\varphi_0}(1-\varphi^2/\varphi_0^2)^{3/2}\,d\varphi.$$

Теперь

$$N=n_0\frac{\pi^2ab}{8}\overline{R}\Phi\left(\frac{L}{a}\right)\Phi\left(\frac{h}{b}\right). \qquad (14)$$

Так как $L>a$ и $h>b$, можно использовать асимптотические разложения для функции Φ [8]:

$$\Phi(x)\approx\frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}\,x}\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{4x^4}-\ldots\right). \qquad (15)$$

Ограничимся далее с погрешностью 4% первым членом. Тогда

$$n_0\approx 8N/3\pi^2\overline{R}ab\varphi_0. \qquad (16)$$

Для однородно заряженного (вдоль азимута) пучка

$$n_0=N/2\pi^2\overline{R}abB.$$

При сравнении с формулой (16) можно написать для фактора группировки, который сохраним для удобства записи:

$$B=3\varphi_0/16. \qquad (17)$$

Окончательно сдвиг в центре сгустка за счет собственного поля сгустка оказывается равным

$$\Delta\nu_x^2|_0=\frac{2r_p\overline{R}NZ^2}{\pi a(a+b)\beta^2\gamma^3BA};$$
$$\Delta\nu_z^2|_0=\frac{2r_p\overline{R}NZ^2}{\pi b(a+b)\beta^2\gamma^3BA}. \qquad (18)$$

Эти выражения совпадают с главными членами в формулах Ласлетта для равномерно заряженного пучка [1], при этом B выражается формулой (17). Таков же результат и для круглого пучка с произвольным распределением плотности заряда по малому радиусу. Существенно иное получается для частиц, равновесные орбиты которых (в медианной плоскости) не совпадают с осью симметрии пучка, когда поле пространственного заряда равно нулю, а градиент максимален, в данном случае $x=0$, $r=\overline{R}$ и $z=0$. Речь идет об орбитах, распределенных по радиусу около $r=\overline{R}$ в связи с энергетическим разбросом в пучке.

Формулы для главных членов кулоновского сдвига частот имеют вид

$$\Delta\nu_x^2=-\left.\frac{\partial E_x}{\partial x}\right|_{\substack{r_0\\z=0}}\frac{eZ^2\overline{R}^2}{\mathrm{M}_pA\beta^2\gamma^3c^2}=\frac{r_p\overline{R}NZ^2}{\pi\beta^2\gamma^3BA}\times$$
$$\times I_q\left(\frac{b}{2},x\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}\right)^{3/2}; \qquad (19)$$

$$\Delta\nu_z^2=\frac{r_p\overline{R}NZ^2}{\pi\beta^2\gamma^2BA}\left[\frac{2}{ab}\,\mathrm{e}^{-x^2/a^2}-\right.$$
$$\left.-I_q\left(\frac{b}{2},x\right)\right](1-\varphi^2/\varphi_0^2)^{3/2}. \qquad (20)$$

Очевидно, сдвиг для произвольных частиц с учетом этих результатов является функцией x и φ и уменьшается с ростом отклонений частиц от центра сгустка: при $x\gg a$ сдвиг ν_x^2 и ν_z^2 равен $\sim 1/x^2$ [асимптотика функции $I_q(x)$] и при $x=a$ он на порядок меньше, чем при $x=0$. Приведем явный вид функции $I_q\left(\frac{b}{2},x\right)$ при $q=0$ ($a=b$, круглый пучок). В этом случае интеграл в формуле (11) легко вычисляется, и получаем

$$I_0\left(\frac{b}{2},x\right)=-\frac{1}{x^2}\left(1-\mathrm{e}^{-x^2/a^2}-\frac{2x^2}{a^2}\,\mathrm{e}^{-x^2/a^2}\right)\approx$$
$$\approx\frac{1}{2a^2}\left(1-\frac{3x^2}{2a^2}+\frac{5x^4}{6a^4}\right). \qquad (21)$$

Любопытно, что функция I_q (а также сдвиг $\Delta\nu_x^2$) может изменить знак при $x>a$, но эта область малоинтересна — она относится к «гало» вокруг сгустка, частицы в котором дают малый вклад в интенсивность пучка и большей частью теряются на первом этапе ускорения.

Необходимо еще приближенное выражение для функции I_q при малых x/a и произвольной эллиптичности (произвольном $q\neq 0$). Разлагая экспоненту в формуле (11) по степеням x/a и вычисляя интегралы, получаем вначале точное выражение I_q через гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ [8]:

$$I_q\left(\frac{b}{2}, x\right) = \frac{1}{a^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{a}\right)^{2k}\times$$

$$\times\left[\frac{F\left(\frac{1}{2}, k+1, k+2, q\right)}{k+1} - 2\frac{x^2}{a^2}\frac{F\left(\frac{1}{2}, k+2, k+3, q\right)}{k+2}\right]. \qquad (22)$$

Формула (22) при наличии таблиц гипергеометрической функции может служить для приближенного вычисления функции I_q. Два первых члена в ней можно представить в более простом виде:

$$I_q\left(\frac{b}{2}, x\right) \approx \frac{2}{a(a+b)} - 6\frac{x^2}{a^2}\frac{a^2}{(a^2-b^2)^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}-\frac{b}{a}\right). \qquad (23)$$

Уменьшение сдвига при максимальных фазовых (азимутальных) отклонениях ясно из формул (19) и (20).

Изменение сдвига частот в процессе ускорения. Доля резонансных частиц. Как ясно из предыдущего, частицы сгустка вследствие неоднородности плотности заряда в нем распределены по величине сдвига в пределах от ν_x^0, ν_z^0 до ν_x^p, ν_z^p в зависимости от амплитуд радиально-синхротронных колебаний. Но и при колебаниях каждой частицы сдвиг изменяется, поскольку функциональные зависимости от x и φ в формулах (19) и (20) различаются.

Анализ изменений сдвига при колебаниях для произвольных отклонений x и φ весьма сложен, мы проведем его ниже для малых (линейных) радиально-фазовых колебаний, в которых, однако, участвует значительная часть частиц сгустка. Итак, будем считать, что

$$\frac{x}{a} \approx \frac{\bar{a}}{a} \ll 1;\ \psi = \varphi - \varphi_s \ll 1. \qquad (24)$$

Эти требования допускают условие $\psi < 1$ (φ_s — синхронная фаза). Запишем радиально-синхротронные колебания при условии (24) в виде

$$x/\bar{a} = \sqrt{1-(\varphi/\bar{\psi}_0)^2}. \qquad (25)$$

Здесь $\bar{a}$ — амплитуда колебания данной частицы;

$$\bar{\psi}_0 = 2\frac{\bar{a}}{a}\sqrt{1-\varphi_s \operatorname{ctg}\varphi_s}. \qquad (26)$$

При получении равенства (26) приближенно принято, что радиальный размер сепаратрисы равен a. Теперь подставим равенство (25) в формулу (23) для I_q:

$$I_q\left(\frac{b}{2}, x\right) \approx \frac{2}{a(a+b)}\times$$

$$\times\left[1 - C\left(\bar{\psi}_0^2 - \psi^2\right)\right],\ C = \frac{2a+b}{4(a+b)(1-\varphi_s \operatorname{ctg}\varphi_s)}. \qquad (27)$$

Согласно формулам (19) и (20) и с учетом условий (24) можно получить следующие зависимости сдвигов за счет собственного поля сгустка от $\psi = \varphi - \varphi_s$ — фазы частицы при радиально-фазовых колебаниях:

$$\frac{\Delta\nu_x^2}{\Delta\nu_x^2|_0} \approx 1 - C\bar{\psi}_0^2 - \left(\frac{3}{2\varphi_0^2} - C\right)\psi^2;$$

$$\frac{\Delta\nu_z^2}{\Delta\nu_z^2|_0} = 1 - K\bar{\psi}_0^2 - \left(\frac{3}{2\varphi_0^2} - K\right)\psi^2. \qquad (28)$$

Здесь $\Delta\nu_x^2|_0$, $\Delta\nu_z^2|_0$ определяются выражениями (18), $K = a/[4(a+b)(1-\varphi_s \operatorname{ctg}\varphi_s)]$.

В зависимости от конкретных значений параметров $\Delta\nu_x^2$, $\Delta\nu_z^2$ максимальны либо при $\psi = 0$, либо при $\psi = \bar{\psi}_0$. Для сильно вытянутого эллипса ($a \gg b$) $C \approx 1$ и $K = 1/2$; при $\varphi_0^2 \approx 3$, как в нашем случае, $\Delta\nu_z^2 \approx \mathrm{const} \approx 1 - \frac{1}{2}\bar{\psi}_0^2$, параметр $\Delta\nu_x^2$ максимален при $\bar{\psi}_0$ и равен при этом также $1 - \frac{1}{2}\bar{\psi}_0^2$. Ориентировочно можно пользоваться приближением

$$\left.\frac{\Delta\nu_x^2}{\Delta\nu_x^2|_0}\right|_{\text{макс}} \approx \left.\frac{\Delta\nu_z^2}{\Delta\nu_z^2|_0}\right|_{\text{макс}} \approx 1 - \frac{1}{2}\bar{\psi}_0^2. \qquad (29)$$

Важным следствием этих результатов является приближенное вычисление доли частиц сгустка, кулоновские сдвиги которых превосходят определенные заданные значения $\Delta\bar{\nu}_x$, $\Delta\bar{\nu}_z$. Этим последним значениям сдвига соответствует согласно данному выражению (28) определенное максимальное фазовое отклонение $\bar{\varphi}_0$ или радиальное отклонение $\bar{a}$ [см. равенство (26)]. Ясно, что искомая доля частиц, сдвиги которых удовлетворяют условию

$$\Delta\nu_x > \Delta\bar{\nu}_x = \Delta\nu_x|_{\text{макс}};\ \Delta\nu_z > \Delta\bar{\nu}_z = \Delta\nu_z|_{\text{макс}}, \qquad (30)$$

равна числу частиц, расположенных в фазовом пространстве внутри фазовой траектории частицы, для которой $\psi = \bar{\psi}_0$ и $a = \bar{a}$. Для строгого определения этого значения необходимо применить самосогласованный подход, когда фазовая плотность частиц в шестимерном фазовом пространстве согласована с движением частиц в полях, которые определяются внешними условиями, а также плотностью заряда вида (1). Определим дальше $N_{\Delta\nu}$ двумя методами, которые дают близкие результаты: один способ можно считать упрощенной формой самосогласованного подхода, другой же исходит из приближения заданного тока и интегрирования в геометрическом пространстве.

По первому способу разделим задачи в поперечном фазовом пространстве и в продольном двумерном. В последнем зададимся моделью Нильсена — Сесслера [9], т. е. примем, что фазовая плотность постоянна внутри сепаратрисы:

$$n = \bar{n}_0\sigma(\mathscr{H} - \mathscr{H}_c),\ \sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 0 \\ 0, & x > 0, \end{cases} \qquad (31)$$

где $\mathscr{H}$ — гамильтониан частицы [10]. Тогда легко показать, что плотность заряда изменяется вдоль оси сгустка по закону

$$en = e\bar{n}_0 \frac{\beta^2 \nu_z^2 W_s}{\bar{R}} x_c(\psi), \tag{32}$$

где $x_c(\psi)$ — значение радиального отклонения на сепаратрисе; W_s — энергия синхронной частицы. Выражение (32) определяет вид $\rho_\psi(\psi)$ в формуле (1), симметризованный ее вариант — формула (2). Искомая доля частиц теперь определится как отношение площадей фазовой траектории $(\bar{a}, \bar{\psi}_0)$ к площади сепаратрисы S_a:

$$N_{\Delta\nu}/N = S_{\bar{a}}/S_a. \tag{33}$$

Для вычисления площади сепаратрисы можно применить аппроксимацию, предложенную Капчинским [10]:

$$x = \frac{a}{2}\left(2 - \frac{\psi}{|\varphi_s|}\right)\sqrt{\frac{\psi}{|\varphi_s|} + 1}. \tag{34}$$

Легко вычисляем S_a

$$S_a = a|\varphi_s| \int_{-1}^{2} (2 - t)\sqrt{1+t}\, dt = |\varphi_s| \frac{12a\sqrt{3}}{5}$$

и долю частиц

$$\frac{N_{\Delta\nu}}{N} = \frac{5\pi\bar{a}\bar{\psi}_0}{12\sqrt{3}\, a\varphi_s} = \frac{5\pi}{24\sqrt{3}} \frac{1}{\varphi_s} \frac{\bar{\psi}_0^2}{\sqrt{1 - \varphi_s \operatorname{ctg} \varphi_s}}. \tag{35}$$

Рассмотрим второй способ. Сдвигом, равным $\Delta\bar{\nu}_x$ и $\Delta\bar{\nu}_z$ или больше него, обладают частицы, находящиеся внутри части сгустка, геометрические размеры которого подобны основному сгустку и равны $\bar{a}$, $\bar{\psi}_0$. По крайней мере при условии (25) (это значит, что $N_{\Delta\nu}/N \ll 1$), такое число может быть определено следующим образом:

$$N_{\Delta\nu} = nR \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} e^{-x^2/a^2} dx \int_{-h}^{h} e^{-z^2/b^2} dz \int_{-\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}_0} \left(1 - \frac{\psi^2}{\varphi_0^2}\right)^{3/2} d\psi. \tag{36}$$

Вычисляя интегралы, получаем $(h \gg b)$

$$\frac{N_{\Delta\nu}}{N} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\bar{\psi}_0}{\varphi_0} \frac{\bar{\psi}_0}{\sqrt{1 - \varphi_s \operatorname{ctg} \varphi_s}} \approx$$

$$\approx \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\varphi_s} \frac{\bar{\psi}_0^2}{\sqrt{1 - \varphi_s \operatorname{ctg} \varphi_s}}. \tag{37}$$

Числовые значения (35) и (37) совпадают с точностью до $15\pi^{3/2}/48\sqrt{3}$ т. е. $\sim 0{,}5\%$. Сдвиг частот некогерентных колебаний, вычисленный выше, не постоянен в процессе ускорения даже для центра сгустка, но меняется по мере роста энергии частиц и изменения размеров пучка. В этом смысле часто встречающееся определение сдвига частот как статического коллективного эффекта является неточным. Следует скорее говорить об эффекте динамического кулоновского сдвига частот, поскольку изменение сдвига частот во времени определяет динамику пучка в ускорителях при большой интенсивности.

Доля резонансных частиц, вычисленная выше, растет при увеличении числа ускоряемых частиц, и при переходе частоты за счет кулоновского сдвига через полосу сильного резонанса возможны интенсивные потери ускоряемого пучка. В связи с этим сделаем следующие замечания. Процесс резонансных потерь может быть на самом деле ослаблен благодаря тому, что при раскачке колебаний частиц в центральной части сгустка и уходе их из режима ускорения одновременно уменьшаются собственные поля сгустка, а с ними градиенты и величина самого кулоновского сдвига. Следовательно, вместе с потерей резонансных частиц уменьшается кулоновский сдвиг, что способствует быстрому смещению рабочей точки через полосу данного резонанса и прекращению самих потерь. Оценка скорости смещения рабочей точки по порядку величины приводит к такому результату:

$$\dot{\nu}_z \approx \frac{r_p \bar{R} Z^2}{\pi\nu_z b(a+b)\beta^2\gamma^3 BA} \alpha N_{\Delta\nu}\mu \leqslant 2\cdot 10^2 \text{c}^{-1}, \tag{38}$$

(здесь $\alpha < 1$; μ — средний инкремент в полосе резонанса), что почти на два порядка превосходит значение $\dot{\nu}_z^{ac}$, вычисленное с учетом только изменений β, γ, a, b при ускорении. Это иллюстрирует эффективность подавления резонансных потерь за счет перераспределения плотности в сгустке. Последнее обстоятельство может наблюдаться экспериментально: при работе ускорителя в режиме большой интенсивности ($N > N_{\text{макс}}$) должно происходить выравнивание или даже провал плотности в поперечном сечении сгустка после прохождения полосы параметрического резонанса.

Известно также [11, 12], что за счет нелинейности собственного поля сгустка рост амплитуды при параметрическом резонансе может быть сильно ограничен, это также способствует успешному прохождению резонансов типа параметрического и достижению интенсивности в ускорителях выше критерия Ласлетта.

Проиллюстрируем развитые выше соображения о кулоновском сдвиге некогерентных частот на примере такого ускорителя, как синхрофазотрон ОИЯИ. В 1978 г. на этом ускорителе были проведены эксперименты с пучком протонов очень большой интенсивности (число захваченных в режим ускорения частиц превышало 10^{13}) [4, 13].

Параметры для расчета: $2L = 200$ см, $\bar{R} = 2800$ см, $2\varphi_0 = 200°$ $(B \approx 0{,}34)$, $2h = 40$ см, $a_0 = 30$ см, $\beta_0 = 0{,}2$ $(E_0 = 20$ МэВ$)$, $b_0 = 10$ см, $\left.\frac{\Delta p}{p}\right|_0 = \pm 0{,}7\%$, $n = 0{,}65$.

При $N_з = 1{,}1\cdot 10^{13}$ значения частот, соответствующих рабочей точке ускорителя, равны

$$\nu_x^p = 0{,}55; \quad \nu_z^p = 0{,}44. \tag{39}$$

Следовательно, рабочая точка в начальный момент оказывается ниже полосы параметрического резонанса $\nu_z = 1/2$, которому, как легко установить из простого построения (см. [4]), соответствуют значения

$$\bar{\nu}_x = \nu_x^{\text{рез}} = 0{,}57; \quad \bar{\nu}_z = \nu_z^{\text{рез}} = 0{,}5. \tag{40}$$

По выражению (30) $\overline{\Delta\nu} = 0{,}64 - 0{,}57 = 0{,}07$; $\overline{\Delta\nu}_z = 0{,}88 - 0{,}5 = 0{,}38$. Тогда получаем $\Delta\nu_x^2 = (0{,}57)^2 - \nu_x^{0\,2} = 0{,}32 - 0{,}41 = -0{,}09$. Так как $\Delta\nu_x^2|_0 = (0{,}55)^2 - 0{,}41 = -0{,}11$, то из формулы (32) находим, что $\bar{\psi}_0 \approx 0{,}6$. Подставляя данные в формулу (37), получаем

$$N_{\Delta\nu}/N \approx 0{,}18. \tag{41}$$

Итак, в возбуждении резонанса $\nu_z = 1/2$ участвует $\sim 18\%$ частиц, находящихся в центральной части сгустка. Общее время действия параметрического резонанса $T = \frac{\nu_z - \nu_z^{\text{рез}}}{\dot{\nu}_z^{ac}}$ составляет ($\dot{\nu}_z^{ac} \approx 3{,}0$ с$^{-1}$) ~ 20 мс.

Помимо параметрического резонанса при $N_з = 1{,}1 \cdot 10^{13}$ в формировании баланса потерь участвуют и другие, достаточно сильные резонансы: $\nu_r - \nu_z = 0$; $2\nu_r + \nu_z = 2$; $\nu_r + 2\nu_z = 2$ и $3\nu_z = 2$. Для резонанса $\nu_r + 2\nu_z = 2$ $N_{\Delta\nu}/N > 50\%$.

Эксперименты показали [4], что основные потери действительно происходят в первые 20 мс после формирования сгустка в сепаратрисе и практически исчезают при уменьшении числа захваченных частиц в 2 раза, когда кулоновский сдвиг сравнительно мал и перечисленные резонансы не затрагиваются. В этих экспериментах была получена максимальная интенсивность при $t = 100$ мс до $N = 4{,}5 \cdot 10^{12}$ прот./имп., что еще меньше $N_{\text{макс}}$, вычисленного для указанных выше параметров по формуле Ласлетта [1]:

$$N_{\text{макс}} = 9 \cdot 10^{12} \text{ прот./имп.} \tag{42}$$

Можно сделать предположение, исходя из сформулированных теоретических соображений и экспериментальных данных, что значение $N_{\text{макс}}$ в равенстве (42) для синхрофазотрона ОИЯИ может быть превзойдено при той же энергии инжекции $E_0 = 20$ МэВ и может составлять

$$N_{\text{макс}} = (1 \div 2) \cdot 10^{13} \text{ прот./имп.} \tag{43}$$

Этот результат достижим при более полном и равномерном заполнении апертуры камеры, некотором увеличении ускоряющего напряжения и при достаточно точной коррекции искажений поля, особенно нулевой и второй гармоник Фурье. Отметим, что на ускорителе ИФВЭ (Серпухов) критерий Ласлетта в серии важных экспериментов был превзойден почти в 2 раза — интенсивность ускорителя достигла $5 \cdot 10^{12}$ прот./имп. [14, 15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Laslett L.**— In: Proc. 1963 Summer Study Storage. Rings, Accelerator BNL, 7534, Upton, N.Y., 1963.
2. **Безногих Ю. Д. и др.** Сообщение ОИЯИ Р9-9115. Дубна, 1975.
3. **Безногих Ю. Д. и др.** Сообщение ОИЯИ Р9-9120. Дубна, 1975.
4. **Безногих Ю. Д. и др.** Препринт ОИЯИ Р9-11903. Дубна, 1978; В кн.: Труды VI Всесоюз. совещ. по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1979, т. II, с. 136.
5. **Воеводин М. Н., Коваленко А. Д., Романов Ю. И.** Сообщение ОИЯИ 9-10000, ч. II. Дубна, 1976; Казанский Г. С.— Канд. дис. Дубна, ОИЯИ, 1963.
6. **Houssais B.** Report Univ. Rennes, Dec. 1966.
7. **Montague B.** CERN Rep. 68-38. Geneva, 1968.
8. **Градштейн И. С., Рыжик М. М.** Таблицы интегралов, сумм и произведений. М., Физматгиз, 1963.
9. **Nielsen C., Sessler A.**— Rev. Sci. Instrum., 1959, v. 30, p. 80.
10. **Капчинский И. М.** Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. М., Атомиздат, 1966.
11. **Смит Л.**— В кн.: Труды Междунар. конф. по ускорителям. М., Атомиздат, с. 897.
12. **Коломенский А. А., Полухин А. Т.**— Вестн. МГУ. Сер. Физика-астрономия, 1968, № 5, с. 81.
13. **Безногих Ю. Д. и др.** Сообщение ОИЯИ 9-11765. Дубна, 1978.
14. **Адо Ю. М. и др.**— В кн.: Труды II Всесоюз. совещ. по ускорителям. М., Наука, 1972, т. 2, с. 17.
15. **Адо Ю. М. и др.**— В кн.: Труды V Всесоюз. совещ. по ускорителям. М., Наука, 1978, т. II, с. 202.

Поступила в Редакцию 04.11.80