Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 5(8), Проблемы взаимодействия излучения с веществом, 2001

Кратные собственные значения и собственные состояния поляризации матриц Мюллера частичных поляризаторов

П.И.Ламекин

Институт прикладной оптики НАН Беларуси
Могилев 212793, ул. Б.-Бирули, 11
Tel./Fax (222) 264649
E-mail: ipo@physics.belpak.mogilev.by

Введение. Изучение собственных состояний поляризации недеполяризующих [1] систем имеет как теоретическое, так и прикладное значение, поскольку позволяет установить неизменяемые системами состояния поляризации излучения. В [2] решено характеристическое уравнение матрицы Мюллера произвольной недеполяризующей системы и в общей форме изучены собственные состояния поляризации всех типов недеполяризующих систем — частичных поляризаторов, полных поляризаторов и фазосдвигающих устройств. Показано, что спектры матриц Мюллера содержат как вещественные, так и комплексные собственные значения. Физический интерес однако представляют только вещественные собственные значения λ, удовлетворяющие условию $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, поскольку они являются коэффициентами пропускания оптической системы для излучения с собственными поляризациями.

Из матричного анализа известно [3], что если спектр матрицы не содержит кратных собственных значений, то соответствующие им собственные векторы единственны (с точностью до постоянного множителя). Кратность же собственных значений всегда сопряжена с особенностями в расчете и трактовке соответствующих собственных векторов. Для матриц Мюллера, имеющих физический смысл, это представляет особый интерес. В [2] показано, что спектры матриц Мюллера полных поляризаторов и фазосдвигающих устройств всегда содержат кратные собственные значения, при этом им могут соответствовать как единичные, так и целые семейства физически реализуемых собственных состояний поляризации. Спектр же матриц Мюллера частичных поляризаторов в общем случае не имеет кратных собственных значений. Условия существования кратных собственных значений матриц Мюллера частичных поляризаторов и определение состояний поляризации, описываемых соответствующими собственными вектор-параметрами Стокса, остаются неизученными. Целью работы является решение указанной задачи. Отметим, что подобный выполненному ниже в рамках формализма матриц Мюллера анализ не может быть проведен в рамках формализма матриц Джонса ввиду его известной ограниченности.

Двукратные собственные значения матриц Мюллера частичных поляризаторов. Корни характеристического уравнения матрицы Мюллера M произвольного частичного поляризатора описываются соотношениями [2]

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}\left[-\left(\alpha_3 - \sqrt{\alpha_3^2 + 8\sqrt{\alpha_0} - 4\alpha_2}\right) \pm \sqrt{\left(\alpha_3 - \sqrt{\alpha_3^2 + 8\sqrt{\alpha_0} - 4\alpha_2}\right)^2 - 16\sqrt{\alpha_0}}\right],$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{4}\left[-\left(\alpha_3 + \sqrt{\alpha_3^2 + 8\sqrt{\alpha_0} - 4\alpha_2}\right) \pm \sqrt{\left(\alpha_3 + \sqrt{\alpha_3^2 + 8\sqrt{\alpha_0} - 4\alpha_2}\right)^2 - 16\sqrt{\alpha_0}}\right], \tag{1}$$

в которых

$$\alpha_3 = -\operatorname{Sp} M = -(M_{11} + M_{22} + M_{33} + M_{44}),$$

$$\alpha_2 = 2[M_{11}(\operatorname{Sp} M - M_{11}) - M_{12}M_{21} - M_{13}M_{31} - M_{14}M_{41}],$$

$$\alpha_1 = -\operatorname{Sp} M\sqrt{\det M}, \quad \alpha_0 = \det M = (M_{11}^2 - M_{12}^2 - M_{13}^2 - M_{14}^2)^2.$$

Здесь M_{ij} — элементы матрицы Мюллера M, "Sp" и "det" — символы следа и определителя матрицы соответственно. Для матриц Мюллера частичных поляризаторов значения определителя ограничены неравенством $0 < \det M < M_{11}^4$.

В соотношениях (1) физическими всегда являются собственные значения $\alpha_{1,2}$, поскольку значения $\alpha_{3,4}$ в общем случае комплексны (для частных случаев недеполяризующих систем значения $\alpha_{3,4}$ могут быть вещественными и удовлетворять требованию $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$). Очевидным условием существования двукратных корней в спектре матриц Мюллера частичных поляризаторов является требование

$$\left(\alpha_3 - \sqrt{\alpha_3^2 + 8\sqrt{\alpha_0} - 4\alpha_2}\right)^2 - 16\sqrt{\alpha_0} = 0, \tag{2}$$

из которого получаем $\alpha_3 - \sqrt{\alpha_3^2 + 8\sqrt{\alpha_0} - 4\alpha_2} = -4\sqrt[4]{\alpha_0}$, поскольку $\alpha_3 = -\operatorname{Sp} M \leqslant 0$. Тогда двукратное собственное значение частичного поляризатора, как следует из (1), $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \sqrt[4]{\det M}$.

Соответствующие собственные векторы частичных поляризаторов найдем из системы $\left(M - \sqrt[4]{\det M}E\right) S = 0$, где E — единичная матрица, $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ — собственный вектор-параметр Стокса. Можно показать, что ранг этой системы равен двум и она сводится к

$$M_{11} - \sqrt[4]{\det M} + \left(M_{12} - M_{14}\frac{\alpha}{\gamma}\right)\frac{S_2}{S_1} + \left(M_{13} - M_{14}\frac{\beta}{\gamma}\right)\frac{S_3}{S_1} = 0, \tag{3}$$

где

$$\alpha = \left(M_{11} - \sqrt[4]{\det M}\right)\left(M_{22} - \sqrt[4]{\det M}\right) - M_{12}M_{21},$$

$$\beta = M_{23}\left(M_{11} - \sqrt[4]{\det M}\right) - M_{21}M_{13}, \quad \gamma = M_{24}\left(M_{11} - \sqrt[4]{\det M}\right) - M_{21}M_{14}.$$

Выразим в (3) от компоненты S_i через параметры поляризации:

$$M_{11} - \sqrt[4]{\det M} + P\left[\left(M_{12} - M_{14}\frac{\alpha}{\gamma}\right)\cos 2\varepsilon\cos 2\theta + \left(M_{13} - M_{14}\frac{\beta}{\gamma}\right)\cos 2\varepsilon \sin 2\theta\right] = 0. \tag{4}$$

Здесь P — степень поляризации, θ и ε — соответственно азимут и угол эллиптичности поляризованной компоненты излучения. Таким образом, задача нахождения собственных состояний поляризации, соответствующих кратному собственному значению, сведена к установлению всех значений троек (P, θ, ε), удовлетворяющих (4).

Проанализируем уравнение (4) на декартовой комплексной плоскости. Для этого перейдем в (4) к описывающей поляризованные состояния излучения поляризационной переменной [1]

$$\chi = \operatorname{Re}\chi + i\operatorname{Im}\chi = \frac{1}{1 + \cos 2\varepsilon\cos 2\theta}(\cos 2\varepsilon \sin 2\theta + i \sin 2\varepsilon),$$

где i — мнимая единица. Легко убедиться, что

$$\cos 2\varepsilon \cos 2\theta = \frac{1-|\chi|^2}{1+|\chi|^2},\ \cos 2\varepsilon \sin 2\theta = \operatorname{Re}\chi \left(1+\frac{1-|\chi|^2}{1+|\chi|^2}\right),\ \sin 2\varepsilon = \operatorname{Im}\chi \left(1+\frac{1-|\chi|^2}{1+|\chi|^2}\right). \tag{5}$$

С учетом (5) уравнение (4) преобразуется к виду

$$|\chi|^2 \left(A + \frac{C}{P}\right) - 2B \operatorname{Re}\chi = A - \frac{C}{P}, \tag{6}$$

где

$$A = M_{12}M_{24} - M_{14}\left(M_{22} - \sqrt[4]{\det M}\right), \quad B = M_{13}M_{24} - M_{14}M_{23},$$
$$C = M_{21}M_{14} - M_{24}\left(M_{11} - \sqrt[4]{\det M}\right).$$

Пусть $\operatorname{Re}\chi = x$, а $\operatorname{Im}\chi = y$. Тогда после несложных преобразований убеждаемся, что (6) трансформируется в равенство

$$\left(x - \frac{PB}{PA+C}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{P^2(A^2+B^2)-C^2}}{|PA+C|}\right)^2 = R^2, \tag{7}$$

являющееся на комплексной плоскости каноническим уравнением окружности радиуса R с центром в точке $(x, y) = \left(\frac{PB}{PA+C}, 0\right)$. Особенность $PA + C = 0$ в (7) не имеет места, что следует из (4).

Проанализируем особенности искомых собственных состояний поляризации, вытекающие из (7). Из требования $R \geqslant 0$ следует ограничение на значения степени поляризации собственных состояний, при которых удовлетворяется (4):

$$P_{min} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \leqslant P \leqslant 1. \tag{8}$$

При значении степени поляризации $P = P_{min}$ окружность вырождается в точку (окружность нулевого радиуса) с координатами

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{|C|B}{|C|A + C\sqrt{A^2+B^2}}, 0\right) = (\operatorname{Re}\chi_1, 0) = \chi_1,$$

определяющей линейно поляризованное состояние поляризации. Это означает, что при $P = P_{min}$ собственное состояние поляризации частичного поляризатора, соответствующее двукратному собственному значению, является в общем случае частично линейно поляризованным и описывается вектор-параметром Стокса

$$S = I\left\{1,\ P_{min}\frac{1-\operatorname{Re}^2\chi_1}{1+\operatorname{Re}^2\chi_1},\ P_{min}\frac{2\operatorname{Re}\chi_1}{1+\operatorname{Re}^2\chi_1},\ 0\right\},$$

где I — интенсивность излучения.

При увеличении степени поляризации P в соответствии с (8) центр окружности удаляется от начала координат вдоль оси абсцисс, являющейся линией центров, при этом радиус окружности увеличивается и при $P = 1$ достигает максимального значения. Каждому значению $P \neq P_{min}$ из (8) на комплексной плоскости соответствует бесконечное множество точек χ, определяющих в соответствии с (7) поляризованные компоненты собственных состояний поляризации. Их геометрическое место представляет собой окружность определенного радиуса. Окружности семейства коаксиальны и не пересекаются между собой.

Таким образом, собственные состояния поляризации частичных поляризаторов, соответствующие двукратному собственному значению, являются в общем случае частично эллиптически поляризованными, причем их существует бесконечное множество. Очевидно, что все параметры поляризации (P, θ, ε) собственных состояний изменяются в ограниченных пределах. Соответствующие вектор-параметры Стокса собственных состояний поляризации для заданного значения P нетрудно построить на основе (7) и (5).

Четырехкратные собственные значения матриц Мюллера частичных поляризаторов. Кратность собственных значений частичных поляризаторов может быть увеличена за счет собственных значений $\lambda_{3,4}$, являющихся в общем случае комплексно-сопряженными. Потребовав в (1) выполнения равенства

$$\left(\alpha_3 + \sqrt{\alpha_3^2 + 8\sqrt{\alpha_0 - 4\alpha_2}}\right)^2 - 16\sqrt{\alpha_0} = 0, \tag{9}$$

с учетом (2) получаем, что $\alpha_3^2 + 8\sqrt{\alpha_0} - 4\alpha_2 = 0$, а, значит $\alpha_3 = -4\sqrt{\alpha_0}$. Нетрудно убедиться из (1), что тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda = \sqrt[4]{\det M}$, т.е. собственное значение является четырехкратным. Укажем здесь же, что случай такой оптической системы описан в [1] и имеет место при равенстве собственных значений матриц Джонса частичных поляризаторов.

Семейство собственных поляризаций, соответствующих четырехкратному собственному значению, определяется уравнением

$$M_{11} + P(M_{12}\cos 2\varepsilon\cos 2\theta + M_{13}\cos 2\varepsilon\sin 2\theta + M_{14}\sin 2\varepsilon) = \sqrt[4]{\det M},$$

описывающим на комплексной плоскости окружность

$$\left(x - \frac{M_{13}}{M_{12}+D}\right)^2 + \left(y - \frac{M_{14}}{M_{12}+D}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{M_{12}^2 + M_{13}^2 + M_{14}^2 - D^2}}{|M_{12}+D|}\right)^2 = R^2. \tag{10}$$

В (10) величина $D = -\dfrac{M_{11} - \sqrt[4]{\det M}}{P}$. Нетрудно видеть, что радиус окружности и координаты ее центра зависят от степени поляризации. Осью центров окружностей, как следует из (10), является прямая $y = \dfrac{M_{14}}{M_{13}}x$.

Расчет и анализ семейства искомых собственных состояний поляризации аналогичен вышеизложенному. Из неотрицательности величины радиуса окружности (10) вытекает ограничение для значений степени поляризации

$$P_{min} = \frac{M_{11} - \sqrt[4]{\det M}}{\sqrt{M_{12}^2 + M_{13}^2 + M_{14}^2}} \leqslant P \leqslant 1. \tag{11}$$

При $P = P_{min}$ окружность вырождается в точку, соответствующую поляризационной переменной

$$\chi_2 = \frac{1}{M_{12} - \sqrt{M_{12}^2 + M_{13}^2 + M_{14}^2}}(M_{13} + iM_{14}),$$

описывающей в общем случае эллиптически поляризованное состояние. Соответствующий вектор-параметр Стокса нетрудно построить на основе соотношений (5):

$$S = I\left\{1,\, -\frac{P_{min}}{\sqrt{M_{12}^2+M_{13}^2+M_{14}^2}}(M_{12},\, M_{13},\, M_{14})\right\}.$$

Семейство окружностей в этом случае возникает подобно описанному выше. Каждому значению P соответствует своя окружность (10), содержащая бесконечное множество точек χ, описывающих поляризованные собственные состояния поляризации. Таким образом образуется множество частично поляризованных собственных состояний с одной степенью поляризации. Все поляризационные характеристики собственных состояний определяются на основе соотношений (10) и (11).

Заключение. Кратным собственным значениям матриц Мюллера частичных поляризаторов соответствуют в общем случае частично эллиптически поляризованные собственные состояния, причем их имеется бесконечное множество. Каждое их подмножество порождается значением степени поляризации из интервала $P_{min} \leqslant P \leqslant 1$ и содержит бесконечное множество в общем случае эллиптически поляризованных состояний χ, образующих на комплексной плоскости окружности. Исключением является лишь значение степени P_{min}, которому соответствует одно собственное поляризованное состояние.

Литература

[1] Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. М., 1981. 584 с.

[2] P.I. Lamekin. Mueller matrices of nondepolarizing optical systems: the theory and a new method of determination, Proc. SPIE. **4358**, pp. 294–302, 2000.

[3] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М., 1989. 656 с.