Проблемы физики, математики и техники, № 1 (1), 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МАРКОВА, ПОРОЖДЕННЫХ БОРЕЛЕВСКИМИ МЕРАМИ СТЕПЕННОГО ТИПА

А.П. Старовойтов, Ю.А. Лабыч

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

RATIONAL APPROXIMATION OF MARKOV FUNCTIONS GENERATED BY BORELEAN POWER-TYPE MEASURES

A.P. Starovoitov, Yu.A. Labych

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Для функции Маркова $\hat{\mu}(z)$, порожденной положительными борелевскими мерами степенного типа, установлена асимптотика поведения строчных последовательностей ее таблицы Паде. Это позволило найти точные порядки убывания наилучших приближений $\hat{\mu}(z)$ рациональными функциями с фиксированным числом полюсов. Полученные теоремы дополняют известные результаты А.А. Гончара, Т. Ганелиуса, Г. Шталя, Д. Браесса, А.А. Пекарского, Е.А. Ровбы и др. авторов, относящиеся к исследованиям аппроксимационных свойств функций Маркова.

Ключевые слова: *функции Маркова, аппроксимации Паде, рациональные аппроксимации, полиномиальные аппроксимации, наилучшие равномерные приближения.*

Asymptotic behavior of Pade table rows for Markov functions $\hat{\mu}(z)$ generated by Borelean power-type measures is found. This enabled us to find sharp decreasing orders of the best approximations of $\hat{\mu}(z)$ by rational functions with fixed number of poles. The obtained theorems supplement the known results of A.A. Gonchar, T. Ganelius, H. Stahl, D. Braess, A.A. Pekarskii, E.A. Rovba dealing with research of approximating properties of Markov functions.

Keywords: *Markov function, Pade approximants, rational approximations, polynomial approximations, best approximations in the uniform norm.*

Введение

Пусть ν – положительная мера с компактным носителем $\Delta = \Delta_\nu = [a, b]$. Тогда аналитическую функцию

$$\hat{\nu}(z) = \int_\Delta \frac{d\nu(t)}{t-z}, \quad z \in \bar{C} \setminus \Delta,$$

называют функцией Маркова меры ν.

Обозначим через $\Re_{n,m}$ множество всех рациональных функций вида $p_n(z)/q_m(z)$, где p_n и q_m – многочлены степени, не выше *n* и *m* соответственно. Пусть *K* – компакт в комплексной плоскости, а функция *f* непрерывна на *K*. Через $R_{n,m}(f; K)$ будем обозначать наилучшие равномерные приближения *f* на *K* элементами из $\Re_{n,m}$, т. е.

$$R_{n,m}(f; K) = \inf\left\{ \|f - r\|_K : r \in \Re_{n,m} \right\},$$

где $\|g\|_K = \max\{|g(z)|: z \in K\}$.

В частности, $E_n(f; K) = R_{n,0}(f; K)$, а $R_n(f; K) = R_{n,n}(f; K)$.

Порядки убывания $R_n(\hat{\nu}; K)$ для компактов *K*, не пересекающихся с отрезками, содержащими носитель меры Δ_ν, впервые были получены в работе А.А. Гончара [1]. Этим вопросам посвящены также статьи Т. Ганелиуса [2], Г. Шталя [3], Д. Браесса [4]. При этом в качестве *K* берется компакт, симметричный относительно действительной прямой. В случае пересечения носителя меры Δ_ν и компакта *K* в одной или нескольких точках порядки убывания $R_n(\hat{\nu}; K)$ сначала были найдены для индивидуальных функций, позднее – для классов функций в работах Я. Андерсона, А.А. Пекарского и других авторов (см., например, [5], [6]). При этом в работах [5] и [6] *K* есть отрезок $[-1,1]$ или круг $\bar{D} = \{z : |z| \le 1\}$, а мера ν удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta_\nu = [1, a], \quad a > 1, \quad b > 0,$$

$$d\nu(t) = \varphi(t)dt, \quad \varphi(t) \succ\prec (t-1)^b \text{ при } 1 \le t \le a. \quad (0.1)$$

В [6] изучались также и свойства наилучших приближений $R_{n,m}(\hat{\nu}; K)$. В частности, доказано

Утверждение 1. *Если меры λ и ν с носителем на $[1, a]$, $a > 1$, удовлетворяют условиям: $d\lambda(t) \le d\nu(t)$ на $[1, a]$ и $\int (t-1)^{-1} d\nu(t) < \infty$, то*

$$R_{n,m}(\hat{\lambda}; D) \le 8 R_{n,m}(\hat{\nu}; D) \text{ при } n \ge m. \quad (0.2)$$

Отметим также работы А.А. Пекарского,

Е.А. Ровбы [7] и Н.С. Вячеславова [8]. В [7] при ограничениях (0.1) на меру ν установлены порядки уклонений от $\hat{\nu}$ ортопроекций $\hat{\nu}$ на $\Re_{n,n}$, а в [8] при аналогичных условиях на ν изучается рациональная аппроксимация $\hat{\nu}$ в пространствах Харди H^p, $0 < p \le \infty$.

Далее предполагаем, что $\Delta = \Delta_\mu = [0, 1]$, $d\mu(x) = \varphi(x)dx$, а

$$\varphi(x) = \frac{1}{B(\alpha, \gamma - \alpha)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}, \ 0 < x < 1, \quad (0.3)$$

где $\alpha, \gamma \in R$, $\gamma > \alpha > 0$, $B(\cdot;\cdot)$ – бета-функция Эйлера. При этих предположениях определим функцию Маркова

$$\hat{\mu}(z) = \hat{\mu}_{\gamma,\alpha}(z) = \int_{\Delta_\mu} \frac{d\mu(x)}{1-xz}, \qquad (0.4)$$

аналитическую в комплексной плоскости с разрезом по лучу $\{x : 1 \le x < \infty\}$. Отметим, что рассмотренный в [5] и [6] случай соответствует значениям параметров $\gamma = b + 2$, $\alpha = 1$, $b > 0$.

В данной статье найдены точные порядки убывания строчных последовательностей таблицы Чебышева $\left[R_{n,m}(\hat{\mu}; D_q)\right]_{n,m}^{\infty}$, где $D_q = \{z : |z| \le q < 1\}$. В отличие от работ [5], [6], где при аппроксимации применяются многоточечные аппроксимации Паде, в качестве приближающих рациональных функций для $\hat{\mu}$ нами выбраны классические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z;\hat{\mu}) = P_n(z;\hat{\mu}) / Q_m(z;\hat{\mu})$, т.е. рациональные функции из $\Re_{n,m}$, числитель и знаменатель которых удовлетворяют условию

$$Q_m(z;\hat{\mu})\hat{\mu}(z) - P_n(z;\hat{\mu}) = O(z^{n+m+1}), \quad z \to 0.$$

Прежде, чем перейти к формулировке основных результатов статьи, введем аналитическую в $D = \{z : |z| < 1\}$ функцию

$$\psi_{n,m}(z) = \frac{\Gamma(\gamma+n+m+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(m+\gamma-\alpha)} \cdot$$
$$\cdot \int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-t}\right)^{m+\gamma-\alpha-1} e^{-(n+\alpha+1)t}\,dt}{\left(1-ze^{-t}\right)^{m+1}},$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Положим также

$$L_{n,0} = \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}},$$

$$L_{n,m} = m!\frac{(\alpha)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}} \prod_{k=1}^{m} \frac{\gamma-\alpha+k-1}{(\gamma+n+k-1)_2},$$

при $m \ge 1$. Здесь и далее $(\alpha)_k = \Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha)$.

Будем говорить, что бесконечно малые величины (a_n) и (b_n) имеют одинаковый порядок малости при $n \to \infty$ $(a_n \asymp b_n)$, если для некоторых положительных чисел A и B $A|a_n| \le |b_n| \le B|a_n|$, $n \ge n_0$.

Основным результатом работы являются следующие теоремы:

Теорема 1. *Для любых фиксированных* $m \in N \cup \{0\}$ *локально равномерно по* $|z| < 1$ *при* $n \to \infty$

$$\hat{\mu}(z) - \pi_{n,m}(z;\hat{\mu}) = L_{n,m} \frac{\psi_{n,m}(z)}{(1-z)^m} z^{n+m+1}(1+o(1)).$$

Теорема 2. *Для любых фиксированных* $m \in N \cup \{0\}$ *при* $n \to \infty$

$$L_{n,m} \frac{q^{n+m+1}}{(1+q)^{2m+1}}(1-|o(1)|) \le R_{n,m}(\hat{\mu}; D_q) \le$$
$$\le L_{n,m} \frac{q^{n+m+1}}{(1-q)^{2m+1}}(1+|o(1)|).$$

Следствие 1. *Для любого фиксированного* $m \in N \cup \{0\}$ *при* $n \to \infty$

$$R_{n,m}(\hat{\mu}; D_q) \asymp \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+\gamma-\alpha}}.$$

В частности, при $\gamma = 2$, $\alpha = 1$, $d\mu(t) = dt$, $0 < t < 1$, $\hat{\mu}_{2,1}(z) = z^{-1}\ln(1-z)^{-1}$. Поэтому

$$R_{n,m}(\hat{\mu}_{2,1}; D_q) \asymp \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+1}} \asymp \frac{q^m}{n^{2m}} R_{n,0}(\hat{\mu}_{2,1}; D_q).$$

Утверждение 1 остается в силе, если в (0.2) D заменить на D_q. Поэтому из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Пусть* $d\lambda(x) = \omega(x)dx$, *а* $\omega(x) \asymp \varphi(x)$ *при* $0 < x < 1$. *Тогда при любом фиксированном m и* $n \to \infty$

$$R_{n,m}(\hat{\lambda}; D_q) \asymp \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+\gamma-\alpha}}.$$

При отдельных значениях параметров α, γ теорема 3 доказана ранее в работе [10].

1 Некоторые вспомогательные утверждения

Пусть ${}_2F_1(1, \alpha, \gamma; z)$ – гипергеометрическая функция, которая, как известно (см. [9]), при $|z| < 1$ представима в виде

$${}_2F_1(1, \alpha, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n. \qquad (1.1)$$

Обозначая через $f_n = (\alpha)_n / (\gamma)_n$ коэффициенты степенного ряда (1.1), рассмотрим определители Адамара функции ${}_2F_1(1, \alpha, \gamma; z)$

$$D_{n,m}=\begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}$$

и определители вида

$$D_{n,m,k}=\begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ f_{n+k} & f_{n+k+1} & \cdots & f_{n+k+m-1} & f_{n+k+m} \end{vmatrix}.$$

Лемма 1. *Пусть функция f представима в виде* (1.1)*. Тогда, если* $m\ge 1$*, то*

$$D_{n,m}=\prod_{i=1}^{m}\frac{(\alpha)_{n-m+i}}{(\gamma)_{n-m+i}}\cdot \cdot\frac{\prod_{i=1}^{m-1}(\gamma-\alpha+i-1)^{m-i}(m-i)!}{\prod_{j=1}^{m-1}\prod_{i=j}^{m-1}(\gamma+n-i+2j-2)_2}. \qquad (1.2)$$

При $m\ge 2$

$$D_{n,m,k}=\prod_{i=0}^{m}\frac{(\alpha)_{n+k+i}}{(\gamma)_{n+k+i}}\cdot \cdot\prod_{i=1}^{m}(k+i-1)\frac{(\gamma+n-m+i+1)_{m+k-2}}{(\alpha+n-m+i)_{m+k}}\cdot \qquad (1.3)$$

$$\cdot\frac{(\gamma-\alpha)^m\prod_{i=1}^{m-1}(\gamma-\alpha+i-1)^{m-i}(m-i)!}{\prod_{j=1}^{m-1}\prod_{i=j}^{m-1}(\gamma+n-i+2j-2)_2}.$$

Равенство (1.2) доказано в [9] (см. § 2.1, формула (1.6)). Доказательство равенства (1.3) проводится аналогично. При $\alpha=1$ и $\gamma=2$ соотношение (1.3) другим методом установлено в [10].

Замечание 1. *Равенство* (1.3) *справедливо и при* $m=1$*, если положить последний множитель равным* $\gamma-\alpha$.

Из (1.2) и (1.3) с помощью несложных преобразований получаем, что

$$L_{n,m}=\frac{D_{n,m,1}}{D_{n,m}}=\frac{(\alpha)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}}m!\prod_{i=1}^{m}\frac{(\gamma-\alpha+i-1)}{(\gamma+n+i-1)_2}, \qquad (1.4)$$

$$\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}}=\frac{(k)_m}{m!}\frac{(\alpha+n+1)_{k-1}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}}= =\frac{(m+1)_{k-1}(\alpha+n+1)_{k-1}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}}. \qquad (1.5)$$

Утверждение 2. *Если* $d\mu(x)=\varphi(x)dx$*, а функция* $\varphi(x)$ *определяется равенством* (0.3)*, то*

$$\widehat{\mu}(z)={}_2F_1(1,\alpha,\gamma;z),\ z\in\overline{C}\setminus[1,\infty),$$

Доказательство. Разложим ядро Коши функции $\widehat{\mu}(z)$ в ряд

$$\frac{1}{1-xz}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n z^n,$$

сходящийся абсолютно и равномерно по $x\in\Delta_\mu$ и $|z|<1$. Интегрируя этот ряд почленно по мере μ, получим

$$\widehat{\mu}(z)=\int_{\Delta_\mu}\frac{d\mu(x)}{1-xz}=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}x^n z^n d\mu(x)= =\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 x^n d\mu(x)\right)z^n.$$

Теперь, учитывая явное выражение $d\mu(x)$, будем иметь

$$\widehat{\mu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(n+\alpha;\gamma-\alpha)}{B(\alpha;\gamma-\alpha)}z^n.$$

Далее, исходя из выражения бета-функции Эйлера через гамма-функцию и равенства $(\alpha)_n=\Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$, окончательно получим, что

$$\widehat{\mu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}z^n.$$

Утверждение 2 доказано.

Лемма 2. *Для любых фиксированных* $m=0,1,2,\ldots$ *и* $z\in D$ *при* $n\to\infty$

$$Q_m\left(z;\widehat{\mu}\right)=D_{n,m}(1-z)^m(1+o(1)). \qquad (1.6)$$

Доказательство. Представим многочлен $Q_m\left(z;\widehat{\mu}\right)$ в виде

$$Q_m\left(z;\widehat{\mu}\right)=\sum_{j=0}^{m}l_j z^j.$$

Учитывая равенство (1.8) из [9], при $j\ge 1$ получим

$$(-1)^j l_j=D_{n,m}C_m^j\prod_{i=1}^{j}\frac{\alpha+n-i+1}{\gamma+n+m-i},$$

где $\quad C_m^j=\dfrac{m!}{(m-j)!\,j!}.$

Тогда, принимая во внимание, что $l_0=D_{n,m}$, для любого $z\in D$

$$D_{n,m}(1-z)^m-Q_m\left(z;\widehat{\mu}\right)= =D_{n,m}\sum_{j=1}^{m}C_m^j(-z)^j\left\{1-\prod_{i=1}^{j}\frac{\alpha+n-i+1}{\gamma+n+m-i}\right\}.$$

Так как

$$0\le 1-\prod_{i=1}^{j}\frac{\alpha+n-i+1}{\gamma+n+m-i}\le 1-\left(\frac{\alpha+n-i+1}{\gamma+n+m-i}\right)^j\le$$

$$\le j\left(1-\frac{\alpha+n-j+1}{\gamma+n+m-j}\right)\le m\,\frac{m+\gamma-\alpha}{n},$$

то, учитывая предыдущее равенство, будем иметь

$$\left|D_{n,m}(1-z)^m - Q_m\left(z;\hat{\mu}\right)\right| \le$$
$$\le D_{n,m}\frac{(\gamma-\alpha+m)}{n}\sum_{j=0}^{m} C_m^j |z|^j =$$
$$=\frac{(m+\gamma-\alpha)\, m\,(1+|z|)^m}{n} D_{n,m}\,.$$

Отсюда для любого $z \in D$

$$Q_m\left(z;\hat{\mu}\right) = D_{n,m}(1-z)^m\left(1+A_{n,m}(z)\right),$$

где

$$\left|A_{n,m}(z)\right| \le \frac{(m+\gamma-\alpha)\, m\,(1+|z|)^m}{n(1-|z|)^m}\,.$$

Из последних двух соотношений и следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Для любых фиксированных* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *и* $z \in D$

$$Q_m\left(z;\hat{\mu}\right)\hat{\mu}(z) - P_n\left(z;\hat{\mu}\right) = \\ = D_{n,m,1}\psi_{n,m}(z)\, z^{n+m+1}. \qquad (1.7)$$

Доказательство. Согласно теореме Паде (см. [9], глава 1, § 1.1, формула (1.11)), при выбранной нормировке многочленов Паде

$$Q_m\left(z;\hat{\mu}\right)\hat{\mu}(z) - P_n\left(z;\hat{\mu}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{n,m,k} z^{n+m+k} =$$
$$= D_{n,m,1} z^{n+m+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1}.$$

Покажем, что при $z \in D$ $\psi_{n,m}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1}$.

Для этого в интеграле, определяющем функцию $\psi_{n,m}(z)$, сделаем замену $u = e^{-t}$. Тогда будем иметь

$$\psi_{n,m}(z) = \frac{\Gamma(\gamma+n+m+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(m+\gamma-\alpha)}\cdot \\ \cdot\int_0^1 \frac{(1-u)^{m+\gamma-\alpha-1} u^{n+\alpha} du}{(1-zu)^{m+1}}. \qquad (1.8)$$

Далее, разложим функцию $1/(1-zu)^{m+1}$ в ряд, равномерно сходящийся по $u \in [0, 1]$ при фиксированном $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(1-zu)^{m+1}} = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)_m z^k u^k = \\ = \frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{\infty}(k)_m z^{k-1}u^{k-1}. \qquad (1.9)$$

Подставляя теперь (1.9) в (1.8) и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим, что

$$\psi_{n,m}(z) = \frac{\Gamma(\gamma+n+m+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(m+\gamma-\alpha)}\cdot$$
$$\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k)_m}{m!}B(n+\alpha+k; m+\gamma-\alpha)\, z^{k-1},$$

где $B(n+\alpha+k;\, m+\gamma-\alpha)$ – бета-функция Эйлера. Выразим бета-функцию через гамма-функции, затем умножим и разделим правую часть последнего равенства на произведение гамма-функций $\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(n+m+\gamma+1)$. Тогда, учитывая, что $(\xi)_k = \Gamma(\xi+k)/\Gamma(\xi)$, будем иметь

$$\psi_{n,m}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k)_m (n+\alpha+1)_{k-1}}{m!(n+m+\gamma+1)_{k-1}} z^{k-1}.$$

Наконец, из равенства (1.5) следует, что

$$\psi_{n,m}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *При* $n \to \infty$ *локально равномерно по всем* $|z| < 1$

$$\frac{1}{(1+|z|)^{m+1}} \le \left|\psi_{n,m}(z)\right| \le \frac{1}{(1-|z|)^{m+1}}\,. \qquad (1.10)$$

Доказательство. Сделав в интеграле функции $\psi_{n,m}(z)$ замену $u = e^{-t}$ и применив теорему о среднем, получим

$$\psi_{n,m}(z) = \frac{1}{(1-z\xi)^{m+1}}\cdot\frac{\Gamma(\gamma+n+m+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(m+\gamma-\alpha)}\cdot \\ \cdot B(n+\alpha+1; m+\gamma-\alpha),$$

где $\xi \in [0, 1]$. Тогда из последнего равенства, учитывая, что

$$B(n+\alpha+1;\, m+\gamma-\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(m+\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n+m+1)},$$

окончательно получим утверждение (1.10). Лемма 4 доказана.

2 Доказательство основных результатов

Утверждение теоремы 1 следует из лемм 2, 3 и равенства (1.4). Поэтому перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.

Рассмотрим функцию $\eta(z) = \hat{\mu}(z) - \pi_{n,m}\left(z;\hat{\mu}\right)$. Учитывая неравенство (1.10), для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что

$$\min_{|z|=q}|\eta(z)| \le R_{n,m}\left(\hat{\mu}; D_q\right) \le \max_{|z|=q}|\eta(z)|\,. \qquad (2.1)$$

Поскольку правое неравенство в (2.1) вполне очевидно, остановимся на доказательстве левого неравенства. Для этого нам необходима следующая лемма Гончара-Дзядыка ([11], лемма 3.1).

Лемма 5. *Если аналитическая в односвязной области G и непрерывная на* $\overline{G}$ *функция f имеет в G с учетом кратности, по крайней мере,* $n+1$

нуль, то при произвольном $m \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$R_{n,m}\left(f; \bar{G}\right) \geq \min_{z \in \partial G}\left|f(z)\right|.$$

Из теоремы 1 следует, что при достаточно больших значениях n функция $\eta(z)$ является аналитической внутри круга $D_{q_1} = \{z : |z| < q_1\}$, $0 < q < q_1 < 1$ и имеет в D_q нуль кратности $n+m+1$. Пусть $r^*_{n,m} \in \Re_{n,m}$ является рациональной функцией наилучшего равномерного приближения $\hat{\mu}$ в круге D_q. Тогда

$$R_{n,m}\left(\hat{\mu}; D_q\right) = \left\|\hat{\mu} - r^*_{n,m}\right\|_{D_q} =$$

$$= \left\|\hat{\mu} - \pi_{n,m} - \left(r^*_{n,m} - \pi_{n,m}\right)\right\|_{D_q} =$$

$$= \left\|\eta - \tilde{r}_{n+m,\,2m}\right\|_{D_q} \geq R_{n+m,\,2m}\left(\eta; D_q\right).$$

Из леммы 5 следует, что

$$R_{n+m,\,2m}\left(\eta; D_q\right) \geq \min_{|z|=q}\left|\eta(z)\right|.$$

Тем самым левое неравенство в (2.1) доказано. Следовательно, и теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончар*, *А.А*. О скорости рациональной аппроксимации аналитических функций / А.А. Гончар // Матем. сборник, 1978. – Т. 105 (147), № 2. – С. 147 – 163.

2. *Ganelius*, *T.* Ortogonal polynomials and rational approximation of holomorphic function /T. Ganelius // Studies in Pure Mathematics (To the Memory of Paul Turan). – Basel. : Birkhäuser Verlag, 1978. – С. 237 – 243.

3. *Stahl, H.* Best Rational Approximants to Markov Function / H. Stahl // Colloquia Math. Soc Janos Bolai. Racskement (Hungary), 1990. – Vol. 58. – P. 627 – 643.

4. *Braess, D.* Rational Approximation of Stieltjes by the Caratheodory–Fejer Method / D. Braess // Constr. Appr., 1987. – Vol. 3. – P. 43 – 50.

5. *Andersson, J.-E.* Rational approximation to function like x^{α} in integral norms / J.-E. Andersson // Anal. Math, 1988. – Vol. 14, № 1. – P. 11 – 25.

6. *Пекарский, А.А.* Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова / А.А. Пекарский // Алгебра и анализ, 1995. – Т. 7, № 2. – С. 121 – 132.

7. *Пекарский, А.А.* Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций / А.А. Пекарский, Е.А. Ровба // Мат. заметки, 1999. – Т. 65, № 3. – С. 362 – 368.

8. *Вячеславов, Н.С.* Рациональные приближения функций типа Маркова–Стилтьеса в пространствах Харди H^p, $0 < p \leq \infty$ / Н.С. Вячеславов // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика, 2008. – № 4. – С. 3 – 13.

9. *Бейкер, Дж.* Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс–Моррис. – М. : Мир, 1986.

10. *Старовойтов, А.П.* Об асимптотике строк таблицы Паде аналитических функций с логарифмическими точками ветвления / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. заметки, 2008. – Т. 84, № 3. – С. 409 – 419.

11. *Дзядык, В.К.* Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, sh и ch z / В.К. Дзядык // Матем. сб, 1979. – Т. 108(150), № 2. – С. 247 – 267.

Поступила в редакцию 07.10.09.