КРИТЕРИЙ σ -РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

В.М. Селькин, И.В. Блинец, В.С. Закревская

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

A σ -SOLUBILITY CRITERION OF A FINITE GROUP

V.M. Sel'kin, I.V. Blisnets, V.S. Zakrevskaya

Francisk Skorina Gomel State University

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Более того, σ является некоторым разбиением множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$.

Множество подгрупп $\mathcal{H}$ группы G называется *полным холловым σ -множеством* G , если каждый член $\neq 1$ множества $\mathcal{H}$ является холловой σ_i -подгруппой группы G для некоторого i и $\mathcal{H}$ содержит ровно одну холлову σ_i -подгруппу группы G для каждого i . Подгруппа A группы G называется: *σ -перестановочной в G* , если G обладает полным холловым σ -множеством $\mathcal{H}$ таким, что $AH^x = H^xA$ для всех $H \in \mathcal{H}$ и всех $x \in G$; *σ -субнормальной в G* , если в G имеется цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$ такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ -примарной группой для всех $i = 1, \dots, t$. Подгруппа A группы G является *слабо σ -перестановочной в G* , если в G имеются σ -перестановочная подгруппа S и σ -субнормальная подгруппа T такие, что $G = AT$ и $A \cap T \leq S \leq A$. В данной работе доказывается, что если в каждой максимальной цепи $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3 , M_2 , или M_1 является либо субмодулярной, либо слабо σ -перестановочной в G , то G σ -разрешима.

Ключевые слова: конечная группа, σ -разрешимая группа, σ -субнормальная подгруппа, σ -перестановочная подгруппа, слабо σ -перестановочная подгруппа, модулярная подгруппа.

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, σ is some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, that is, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$. A set $\mathcal{H}$ of subgroups of G is a *complete Hall σ -set* of G if every member $\neq 1$ of $\mathcal{H}$ is a Hall σ_i -subgroup of G for some $\sigma_i \in \sigma$ and $\mathcal{H}$ contains exactly one Hall σ_i -subgroup of G for every $\sigma_i \in \sigma(G)$. A subgroup A of G is said to be: *σ -permutable in G* if G possesses a complete Hall σ -set $\mathcal{H}$ such that $AH^x = H^xA$ for all $H \in \mathcal{H}$ and all $x \in G$; *σ -subnormal in G* if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$ such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is σ -primary for all $i = 1, \dots, n$. A subgroup A of G is said to be *weakly σ -permutable in G* if there is a σ -permutable subgroup S and a σ -subnormal subgroup T of G such that $G = AT$ and $A \cap T \leq S \leq A$. In this paper it is proved that if in every maximal chain $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ of G of length 3 at least one of the subgroups M_3 , M_2 , or M_1 is either submodular or weakly σ -permutable in G , then G is σ -soluble.

Keywords: finite group, σ -soluble group, σ -subnormal subgroup, σ -permutable subgroup, weakly σ -permutable subgroup, modular subgroup.

Введение

В этой статье все группы конечны и G всегда означает конечную группу. Кроме того, $\mathbb{P}$ – это множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n – целое число, символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n , $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок G .

Подгруппа M группы G называется *модулярной в G* [1], если M – модулярный элемент (в смысле Куроша [1, С. 43]) решетки всех подгрупп $\mathcal{L}(G)$ группы G , т. е.

(i) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G$, $Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$ и

(ii) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G$, $Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Подгруппа A группы G называется *субмодулярной в G* , если в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$$

такая, что A_{i-1} является модулярной группой в A_i для всех $i = 1, \dots, t$.

Напомним теперь некоторые понятия теории σ -свойств групп [2]–[8].

Мы используем символ σ для обозначения некоторого разбиения множества $\mathbb{P}$. Таким образом, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$

для всех $i \neq j$.

Группа G называется: σ -*примарной*, если G является σ_i -группой для некоторого $i \in I$; σ -*нильпотентной*, если $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ для некоторых σ -примарных групп $G_1, G_2, \dots, G_n$, σ -*разрешимой*, если каждый главный фактор группы G является σ -примарным.

Множество подгрупп $\mathcal{H}$ группы G называется *полным холловым σ -множеством* G , если каждый член $\neq 1$ множества $\mathcal{H}$ является холловой σ_i -подгруппой группы G для некоторого i и $\mathcal{H}$ содержит ровно одну холлову σ_i -подгруппу группы G для каждого i .

Подгруппа A группы G называется: σ -*перестановочной* в G , если G обладает полным холловым σ -множеством $\mathcal{H}$ таким, что

$$AH^x = H^x A$$

для всех $H \in \mathcal{H}$ и всех $x \in G$; σ -*субнормальной* в G , если в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \leq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ -примарной группой для всех $i = 1, \dots, t$.

В работе [8] введено следующее обобщение понятия σ -перестановочности.

Определение 0.1. Мы говорим, что подгруппа A группы G является *слабо σ -перестановочной* в G , если в G имеются σ -перестановочная подгруппа S и σ -субнормальная подгруппа T такие, что $G = AT$ и $A \cap T \leq S \leq A$.

В данной работе мы доказываем следующий результат.

Теорема 0.2. Если в каждой максимальной цепи

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы в одна из подгрупп M_3, M_2 , или M_1 является либо субмодулярной, либо слабо σ -перестановочной в G , то G σ -разрешима.

В случае, когда $\sigma = \{ \{2\}, \{3\}, \dots \}$ из теоремы 0.2 получаем следующие известные результаты.

Следствие 0.3 (Цимерман [9]). Если в каждой максимальной цепи

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 , или M_1 является субмодулярной, то G разрешима.

Следствие 0.4 (Спенсер [10]). Если в каждой максимальной цепи

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 , или M_1 является субнормальной в G , то G разрешима.

Следствие 0.5 (Шмидт [11]). Если в каждой максимальной цепи

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 , или M_1 является модулярной в G , то G разрешима.

Подгруппа A группы G называется *s -нормальной* в G [12], если для некоторой нормальной подгруппы T группы G имеет место

$$AT = G \text{ и } A \cap T \leq A_G.$$

Понятно, что каждая s -нормальная подгруппа является слабо σ -перестановочной в группе. Таким образом, мы получаем из теоремы 0.2 следующий результат.

Следствие 0.6. Если в каждой максимальной цепи

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 , или M_1 является s -нормальной в G , то G разрешима.

1 Некоторые предварительные результаты

Напомним, что символ $\mathfrak{N}_\sigma$ обозначает класс всех σ -нильпотентных групп; $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – σ -нильпотентный корадикал группы G .

Лемма 1.1 [3, следствие 2.4, лемму 2.5].

(1) Класс $\mathfrak{N}_\sigma$ замкнут относительно взятия произведений нормальных подгрупп, гомоморфных образов и подгрупп.

(2) Если G/N и G/R – σ -нильпотентные группы, то факторгруппа $G/(N \cap R)$ σ -нильпотентна.

(3) Если E – нормальная подгруппа G и $E/(E \cap \Phi(G))$ σ -нильпотентна, то E σ -нильпотентна.

Лемма 1.2. Пусть A, K и N – подгруппы группы G . Предположим, что A σ -субнормальна в G и N нормальна в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) подгруппа $A \cap K$ σ -субнормальна в K ;

(2) подгруппа AN/N является σ -субнормальной в G/N ;

(3) если $N \leq K$ и K/N σ -субнормальна в G/N , то K σ -субнормальна в G ;

(4) если A является σ_i -группой, то $A \leq O_{\sigma_i}(G)$;

(5) подгруппа $A^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в G .

Доказательство. (1)–(4) [1, лемму 2.6].

(5) Предположим, что это утверждение неверно, и пусть G – контрпример минимального порядка.

По условию, в G существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_r = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \leq A_i$, или $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ -примарной группой для всех $i = 1, \dots, r$.

Пусть $M = A_{r-1}$. Без ограничения общности можно считать, что $M \neq G$.

Сначала покажем, что

$$A^{\sigma_i} \leq M_G.$$

Это ясно, если M нормальна в G . Теперь предположим, что G/M_G является σ_i -группой для некоторого i . Тогда $G^{\sigma_i} \leq M_G$.

Более того, из изоморфизма

$$AG^{\sigma_i} / G^{\sigma_i} \cong A / (A \cap G^{\sigma_i})$$

и леммы 1.1 мы получаем, что

$$A^{\sigma_i} \leq G^{\sigma_i} \leq M_G.$$

Выбор G означает, что A^{σ_i} субнормальна в AM_G , поэтому A^{σ_i} субнормальна в M_G . Следовательно A^{σ_i} субнормальна в G . $\square$

Лемма 1.3 [8, лемма 2.8]. Пусть A, K и N – подгруппы группы G . Предположим, что A слабо σ -перестановочна и N нормальна в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если либо $N \leq A$, либо $(|N|, |A|) = 1$, то AN/N является слабо σ -перестановочной в G/N .

(2) если G является σ -полной группой силовского типа, $N \leq K$ и K/N слабо σ -перестановочна в G/N , то K слабо σ -перестановочна в G .

(3) если G является σ -полной группой силовского типа и $A \leq E \leq G$, тогда A слабо σ -перестановочна в E .

(4) если $A \leq E \leq G$ и E нормальна в G , то A является слабо σ -перестановочной в E .

Лемма 1.4 [9, леммы 1, 4 и 7]. Пусть A, K и N – подгруппы группы G . Предположим, что A субмодулярна и N нормальна в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) подгруппа AN/N является субмодулярной в G/N ;

(2) $N \cap K$ субмодулярна в K ;

(3) если $\mathfrak{F}$ – формация всех абелевых групп с элементарными силовскими подгруппами, то $\mathfrak{F}$ -корадикал $A^{\mathfrak{F}}$ подгруппы A субнормален в G ;

(4) если A разрешима и N – неабелева минимальная нормальная подгруппа в G , то

$$A \leq C_G(N).$$

Лемма 1.5 [13, VI, теорема 26.1]. Если G – группа Шмидта, то $G = P \times Q$, где $P = G^{\sigma_i}$ является силовской p -подгруппой в G , а $Q = \langle x \rangle$ – циклическая силовская q -подгруппа в G для некоторых простых чисел $p \neq q$.

2 Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 0.2. Предположим, что данная теорема не верна и пусть G – контрпример минимального порядка.

(1) Если R – минимальная нормальная подгруппа в G , то G/R – σ -разрешимая группа. Следовательно, R – единственная минимальная нормальная подгруппа в G , $C_G(R) \leq R$ и R не является σ -примарной группой.

Сначала покажем, что группа G/R σ -разрешима для любой минимальной нормальной подгруппы R группы G .

Предположим, что это неверно. Тогда G/R не является нильпотентной группой и поэтому G/R имеет подгруппу Шмидта H/R . Тогда H/R – разрешимая группа по лемме 1.5, поэтому $H < G$. Более того, из леммы 1.5 следует, что для любого простого p , делящего $|H/R|$, и для любой силовской p -подгруппы P группы H/R следует, что P содержится в некоторой 2-максимальной подгруппе в G/R . Следовательно, R содержится в некоторой 3-максимальной подгруппе группы G .

Пусть теперь

$$M_3 / R < M_2 / R < M_1 / R < M_0 / R = G / R$$

– произвольная максимальная цепь длины 3 в G/R . Тогда $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ является максимальной цепью в G длины 3 и поэтому для некоторого $i > 0$ подгруппа M_i является либо субмодулярной, либо слабо σ -перестановочной в G . Но тогда M_i/R – либо субмодулярная, либо слабо σ -перестановочная в G/R подгруппа ввиду лемм 1.2 (2) и 1.3 (1). Следовательно, гипотеза выполняется для G/R , поэтому из выбора группы G следует, что G/R σ -разрешима, что противоречит выбору группы G .

Если в G имеется минимальная нормальная подгруппа $N \neq R$, то G/N σ -разрешима и, следовательно,

$$R \cong R/1 \cong RN/N$$

является σ -примарной, поэтому G является σ -разрешимой группой. Следовательно R – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и R не является σ -примарной группой и, следовательно, абелевой группой. Таким образом, утверждение (1) является верным, поскольку $C_G(R)$ является нормальной подгруппой в G .

Пусть p – любое нечетное простое число, разделяющее $|R|$ и R_p – силовская p -подгруппа в R . Ввиду аргумента Фраттини и утверждения (1) следует, что существует максимальная подгруппа M в G такая, что $N_G(R_p) \leq M$ и $G = RM$. Ясно, что $M_G = 1$. Более того, для некоторой силовской p -подгруппы G_p группы G имеем $R_p = G_p \cap R$, поэтому

$$G_p \leq N_G(R_p) \leq M$$

и, следовательно, p не делит $|G : M|$.

(2) $D := M \cap R$ не является нильпотентным. Следовательно, $D \not\leq \Phi(M)$ и D не является p -группой.

Предположим, что это неверно. Тогда D – нильпотентная нормальная подгруппа в M и R_p является силовской p -подгруппой в D . Более того, R_p нормальна в M , поскольку D нильпотентна и, следовательно, подгруппа $Z(J(R_p))$ нормальна в M . Поскольку $M_G = 1$, то

$$N_G(Z(J(R_p))) = M.$$

Тогда $N_R(Z(J(R_p))) = D$ – нильпотентная группа. Отсюда следует, что R p -нильпотентна по теореме Глаубермана – Томпсона о нормальных p -дополнениях. Но тогда R – p -группа, противоречие. Следовательно, имеем (2).

(3) $V = 1$ для любой субнормальной подгруппы из G , содержащейся в максимальной подгруппе F из G с условием $F_G = 1$.

Предположим, что $V \neq 1$. Утверждение (1) влечет, что

$$1 < V^G = V^{RF} = V^F \leq F_G$$

согласно [15, часть А, лемма 14.3], что противоречит условию. Таким образом, утверждение (1) является верным.

(4) $V^{\sigma_i} \neq 1$ для любой неединичной σ -субнормальной подгруппы V группы G .

Действительно, предположим, что $V^{\sigma_i} = 1$. Тогда V σ -нильпотентна и поэтому для некоторого i имеет место

$$1 < O_{\sigma_i}(V) \leq O_{\sigma_i}(G)$$

ввиду леммы 1.2 (4), что противоречит утверждению (1).

(5) Если H является слабо σ -перестановочной подгруппой G , содержащейся в максимальной подгруппе K группы G с условием $K_G = 1$, то для некоторой σ -субнормальной подгруппы T группы G имеет место $G = HT$ и $H \cap T = 1$.

Согласно определению слабо σ -перестановочной подгруппы, в G существуют σ -перестановочная подгруппа S и σ -субнормальная подгруппа T такие, что $G = HT$ и

$$H \cap T \leq S \leq H.$$

Предположим, что $S \neq 1$. Тогда $S_G = 1 = K_G$, поэтому $S^G / S_G = S^G / 1 \cong S^G$ является неединичной σ -нильпотентной подгруппой в G и поэтому для некоторого i имеет место

$$1 < O_{\sigma_i}(S^G) \leq O_{\sigma_i}(G),$$

что противоречит утверждению (1). Значит $S = 1$ и поэтому $T \cap H = 1$.

(6) M не является ни слабо σ -перестановочной, ни субмодулярной в G . Следовательно, M σ -разрешима.

Предположим, что M является слабо σ -перестановочной в G . Тогда для некоторой σ -субнормальной подгруппы T группы G имеет место $G = MT$ и $M \cap T = 1$ по утверждению (5). Более того, $W := T^{\sigma_i} \neq 1$ и W – субнормальная в G подгруппа согласно лемме 1.2 (5).

Пусть теперь L – минимальная субнормальная подгруппа группы G , содержащаяся в W . Тогда $L \leq R$, поэтому p делит $|L|$, где $|L|$ делит $|T| = |G : M|$. Но p не делит $|G : M|$, поскольку $G_p \leq M$, противоречие. Следовательно, M не является слабо σ -перестановочной в G .

Предположим, что M субмодулярна в G . Тогда M модулярна в G и поэтому

$$G \cong G / M_G = G / 1$$

сверхразрешима согласно [1, лемма 5.1.2]. Это противоречие завершает доказательство первой части утверждения (6). И тогда в любой максимальной цепи $M_3 < M_2 < M_1 = M < G$ длины 3 группы G одна из подгрупп M_3 или M_2 является по условию либо слабо σ -перестановочной, либо субмодулярной в G . В первом случае эта подгруппа слабо σ -перестановочна в M согласно лемме 1.3 (3). Во втором случае эта подгруппа субмодулярна в M согласно лемме 1.4 (2). Таким образом, гипотеза сохраняется в M и поэтому M σ -разрешима ввиду выбора группы G .

(7) $R < G$.

Предположим, что $R = G$ – простая неабелева группа. И допустим, что некоторая собственная неединичная подгруппа A группы G является σ -субнормальной в G . Тогда в G имеется цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$ такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i , либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ -примарной группой для всех $i = 1, \dots, n$. Без ограничения общности можно считать, что $V = A_{n-1} < G$. Тогда $V_G = 1$, поскольку группа $G = R$ является простой, поэтому $G \cong G / 1$ является σ -примарной. Но тогда G σ -нильпотентна, противоречие. Таким образом, каждая собственная неединичная подгруппа группы G не является σ -субнормальной в G .

Предположим теперь, что некоторая собственная неединичная подгруппа H группы G является субмодулярной в G , и пусть V – максимальная модулярная подгруппа группы G такая, что $H \leq V$. Тогда V – максимальная подгруппа в G такая, что $G / V_G = G / 1$ сверхразрешима согласно [1, 5.1.2], противоречие. Следовательно, каждая собственная субмодулярная подгруппа группы G тривиальна.

Пусть Q – силовская q -подгруппа в G , где q – наименьшее простое число, делящее $|G|$, и пусть L – максимальная подгруппа в G , содержащая Q .

Тогда с учетом [14, IV, 2.8], $|Q| > q$. Пусть V – максимальная подгруппа в Q . Если $|V| = q$, то Q абелева, поэтому $Q < L$. Следовательно, существует 3-максимальная подгруппа W в группе G такая, что $V \leq W$. Но тогда некоторая собственная неединичная подгруппа группы G либо субмодулярна, либо σ -субнормальна в G , противоречие. Следовательно, $|V| > q$, что снова влечет, что некоторая собственная неединичная подгруппа группы G либо субмодулярна, либо σ -субнормальна в G . Это противоречие показывает, что утверждение (7) является верным.

(8) Если $G_p \leq V \leq M$, то V не является ни слабо σ -перестановочной, ни субмодулярной в G . Предположим, что для некоторой σ -субнормальной подгруппы T в G имеет место $G = VT$ и $V \cap T = 1$. Ясно, что $1 < T < G$. Тогда подгруппа T^{nc} не является тривиальной согласно утверждению (4) и эта подгруппа является субнормальной G по лемме 1.2 (5). Следовательно, для минимальной субнормальной подгруппы Z группы G , содержащейся в T^{nc} имеет место $Z \leq T$ и $Z \leq R$. Тогда Z является p' -группой, поскольку

$$V \cap T = 1 \text{ и } G_p \leq V.$$

С другой стороны, Z – это минимальная нормальная подгруппа в R , поэтому p делит $|Z|$. Это противоречие показывает, что V не является слабо σ -субнормальной в G .

Теперь предположим, что V субмодулярна в G . С учетом утверждения (3) и леммы 1.4 (3), V – собственная абелева подгруппа в M .

Предположим, что $V \leq W \leq F < M$, где F максимальна в M , а W максимальна в F . Тогда хотя бы одна из подгрупп W или F является абелевой субмодулярной подгруппой в G . Следовательно, G_p субмодулярна в G . Следовательно,

$$G_p \leq C_G(R)$$

по лемме 1.4 (3), противоречие. Следовательно, $|G_p| = p$ и $G_p = V$ – максимальная подгруппа в M , поэтому $G_p = R_p$ является субмодулярной в R , противоречие.

Следовательно, утверждение (8) является верным.

(9) $M = D \rtimes L$ – разрешимая группа, где L – группа простого порядка.

Ввиду [14, IV, 7.4] для некоторой максимальной подгруппы L группы M имеем $G_p \leq L$ поскольку $p > 2$ и G неразрешима. Сначала покажем, что $G_p = L$. Действительно, предположим, что для некоторой максимальной подгруппы V в L имеем $G_p \leq V$. Тогда в каждой максимальной цепи

$$V = M_3 < M_2 < M_1 = M < M_0 = G$$

из G длины 3 все подгруппы M_3, M_2 и M_1 не являются ни слабо σ -перестановочными, ни субмодулярными в G , противоречие.

Следовательно, $G_p = L$ – максимальная подгруппа в M , поэтому M разрешима согласно [14, IV, 7.4]. Если $G_p \leq D$, то

$$D = M \cap R = M,$$

поскольку $L \neq D$ по утверждению (2), откуда следует, что $R = G$ вопреки утверждению (7). Следовательно, $G_p \leq D$, поэтому $DL = M$. Поэтому в случае $|G_p| = p$ имеем $D \cap L = 1$, откуда следует, что $M = D \rtimes L$ а значит, утверждение (9) верно, поскольку M разрешима.

Наконец, предположим, что $|G_p| > p$. Прежде заметим, что L не является ни слабо σ -перестановочной, ни субмодулярной в G по утверждению (8). Но с другой стороны, M также не является ни слабо σ -перестановочной, ни субмодулярной в G по утверждению (6). Следовательно, любая максимальная подгруппа в $L = G_p$ либо слабо σ -перестановочна, либо субмодулярна в G .

Из $G_p \not\leq D$ следует, что для некоторой максимальной подгруппы V из G_p имеем

$$R_p = R \cap G_p \leq V.$$

Предположим, что V слабо σ -перестановочна в G . Тогда для σ -субнормального дополнения T для V в G имеем $T \cap R_p = 1$. По лемме 1.2 (5) и утверждению (3) для некоторой минимальной субнормальной подгруппы Z группы G имеем $Z \leq T^{\text{nc}} \leq T$. Следовательно, $Z \cap R = 1$ и тогда

$$ZR = Z \times R$$

ввиду [15, гл. А, 14.3], вопреки утверждению (1).

Следовательно, $1 < V$ субмодулярна в G . Тогда R_p субмодулярна в G и, значит, R_p субмодулярна в R по лемме 1.3 (3), противоречие. Значит, утверждение (9) является верным.

Заключительное противоречие. Из утверждения (9) следует, что $|D|$ – степень простого числа, что противоречит утверждению (2). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
2. Скиба, А.Н. О σ -свойствах конечных групп I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.
3. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
4. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.

5. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
6. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.
7. Skiba, A.N. On Some Results in the Theory of Finite Partially Soluble Groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4. – P. 281–309.
8. Huang, J. On weakly σ -quasinormal subgroups of finite groups / J. Huang, B. Hu, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2018. – Vol. 92, № 1-2, P. 201–216.
9. Zimmermann, I. Submodular subgroups in finite groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.
10. Spencer, A.E. Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J Math. – 1968. – Vol. 27. – P. 167–173.
11. Schmid, R. Endliche Gruppen mit vilen modularen Untergruppen / R. Schmid // Abhan. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1970. – Vol. 34. – P. 115–125.
12. Wang, Y. c -normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.
13. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – 1978. – Москва: Наука, 1978.
14. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.
15. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992.

Поступила в редакцию 28.04.2021.