МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЕТЕЙ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ В ФОРМЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Ю.В. Малинковский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

CHARACTERIZATION OF NETWORK STATIONARY DISTRIBUTION WITH BATCH MOVING IN GEOMETRIC PRODUCT FORM

Yu.V. Malinkovsky

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Рассмотрена экспоненциальная сеть с двумя независимыми входными пуассоновскими потоками групп: основным и дополнительным, заявки которого поступают в пустые узлы. Группы, требуемые для обслуживания, маршрутизируются в другие узлы с возможным изменением размера или покидают сеть в соответствии с некоторой неприводимой марковской матрицей. Группы, не достигшие требуемого размера, обслуживаются, но после обслуживания покидают сеть. Установлен критерий существования стационарного распределения в форме произведения геометрических распределений.

Ключевые слова: *сети массового обслуживания, группы требований, стационарное распределение, геометрическое распределение, форма произведения, квазиобратимость.*

We consider the exponential network with two independent Poisson enter flows of customer batches: general and additional. The customers of additional flow arrive in empty nodes. The batches required for the service move to other nodes with possible change of size or leave the network according to some irreducible Markov matrix. The batches which don't achieve the required size are served but after the service is done they leave the network. The criterion of existence of stationary distribution in the form of the product of geometric distributions is established.

Keywords: *queueing networks, bathes of customers, stationary distribution, geometric distribution, product form, quasireversibility.*

1 Введение

В последние годы большой популярностью пользуются G-сети – сети с положительными и отрицательными заявками, введенные Геленбе [1], [2]. В отличие от классических сетей уравнения трафика для G-сетей нелинейны, хотя для большинства моделей стационарное распределение имеет мультипликативную форму. Во многих случаях маргинальные распределения узлов имеют геометрическое распределение (см., например, [3], [4], [5]).

В [6] рассмотрен несколько иной класс сетей с нелинейными уравнениями трафика – сети с *групповым поступлением и ассамблейно-трансферным групповым обслуживанием (assemble-transfer batch service)*. Эта работа обобщает работы [7], [3] для сетей с групповыми уходами на случай, когда размеры передаваемых групп могут меняться в соответствии с марковской матрицей маршрутов. При этом предполагалось, что принимающие и передающие узлы, а также размеры, с которыми передаются группы и поступают группы, могут зависеть друг от друга. Предложенный в [6] способ характеризации стационарного распределения недостаточно эффективен, к тому же авторами были наложены ограничения на радиусы сходимости некоторых степенных рядов.

В настоящей работе в постановке авторов [6] строится более эффективный альтернативный алгоритм характеризации геометрической формы произведения, не накладывающий ограничений на радиусы сходимости степенных рядов. В отличие от [6], где необходимо решать систему бесконечного числа нелинейных уравнений трафика, данная работа основывается на системе конечного числа уравнений трафика, для решения которой предлагается итерационный алгоритм.

2 Модель однолинейного узла

Сначала рассмотрим однолинейную систему с групповым поступлением и групповым обслуживанием. Группы поступают в систему пуассоновским потоком интенсивности λ. Когда система пуста, в нее поступает простейший дополнительный поток групп интенсивности λ^*. Обслуживание – экспоненциальное с интенсивностью μ, включающееся, когда в системе есть хотя бы одна заявка. Когда начинается обслуживание, обслуживается группа заявок. Процессы поступления и обслуживания независимы.

Пусть Y_i – размер i-й поступающей группы, Y_i^* – размер дополнительной группы, поступающей, когда система пуста, и Z_i – размер i-й группы, требующей обслуживания. Предполагается, что $\{Y_i\}, \{Y_i^*\}, \{Z_i\}$ взаимно независимые неотрицательные целочисленные случайные величины с произвольными функциями распределения A, A^* и B, функциями вероятностных масс a, a^* и b и производящими функциями $\tilde{A}$, $\tilde{A}^*$ и $\tilde{B}$ соответственно. Предположим также, что A и B имеют конечные средние m_A и m_B соответственно.

Пусть $X(t)$ – число заявок в системе в момент t. Семейство случайных величин $\{X(t)\}$ является цепью Маркова с непрерывным временем с пространством состояний $Z_+ = \{0,1,...\}$. Интенсивности ее перехода есть

$$\begin{aligned} q(0,k) &= \lambda a(k) + \lambda^* a^*(k) \quad (k \ge 1), \\ q(n,n+k) &= \lambda a(k) \quad (k \ge 1,\, n \ge 1), \\ q(n,n-k) &= \mu b(k) \quad (n > k \ge 1), \\ q(n,0) &= \mu \bar{B}(n) \quad (n \ge 1), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\bar{B}(n) = 1 - B(n-1) = 1 - b(1) - ... - b(n-1)$.

***Лемма* 2.1.** *Если выполнено условие*

$$\lambda m_A < \mu m_B, \tag{2.2}$$

то марковский процесс $X(t)$ – эргодический.

Доказательство этого интуитивно понятного факта достаточно громоздкое. Сначала рассматривается цепь Маркова, вложенная в процесс $X(t)$ в моменты ухода групп из системы, и доказывается ее эргодичность с помощью эргодической теоремы Мустафы [8]. При этом процесс обслуживания представляется не как единое целое со средним временем обслуживания μ^{-1}, а как процесс обслуживания, состоящий из последовательного обслуживания заявок в группе со средним временем обслуживания каждой заявки $\frac{1}{\mu j}$, если группа состоит из j заявок. Обслуженные заявки собираются за прибором и уходят из системы все вместе в момент окончания обслуживания последней заявки в группе. Поскольку вложенная цепь эргодична, а средние времена между последовательными уходами групп из системы конечны, то цепь Маркова с непрерывным временем $X(t)$ также эргодична.

Известно, что вероятностное распределение π на $\mathbb{Z}_+$ является стационарным распределением $X(t)$ тогда и только тогда, когда существует функция интенсивностей перехода q^R, удовлетворяющая соотношениям

$$\pi(n) q(n,n') = \pi(n') q^R(n',n) \quad (n,n' \in \mathbb{Z}_+) \tag{2.3}$$

и

$$\sum_{k=o}^{\infty} q(n,k) = \sum_{k=o}^{\infty} q^R(n,k) \quad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{2.4}$$

Функция q^R является функцией интенсивностей перехода обращенного по времени процесса $\{X(-t)\}$, который также имеет стационарное распределение π.

Предположим, что стационарное распределение π цепи Маркова $\{X(t)\}$ существует и является геометрическим, т.е. $\pi(n) = (1-c)c^n$ для числа $0 < c < 1$. Подставляя q из (2.1) и предполагаемое геометрическое распределение в (2.3), имеем

$$\begin{aligned} q^R(0,k) &= \mu \bar{B}(k) c^k \quad (k \ge 1), \\ q^R(n,n+k) &= \mu b(k) c^k \quad (k \ge 1,\, n \ge 1), \\ q^R(n,n-k) &= \lambda a(k) c^{-k} \quad (n > k \ge 1), \\ q^R(n,0) &= (\lambda a(n) + \lambda^* a^*(n)) c^{-n} \quad (n \ge 1). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Подставляя это в (2.4) с $n = 0$, имеем

$$\mu \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}(k) c^k = \lambda + \lambda^*, \tag{2.6}$$

и из (2.4) с $n \ge 1$

$$\begin{aligned} &\mu \sum_{k=1}^{\infty} b(k) c^k + \lambda \sum_{k=1}^{n} a(k) c^{-k} + \\ &+ \lambda^* a^*(n) c^{-n} = \lambda + \mu. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Из (2.6) следует, что

$$\frac{\mu c}{1-c}(1 - \tilde{B}(c)) = \lambda + \lambda^*. \tag{2.8}$$

Умножая (2.8) на $(cz)^n$ и складывая по всем $n \ge 1$, получим

$$\lambda \tilde{A}(z) + \lambda^* \tilde{A}^*(z)(1 - cz) = cz[\lambda + \mu(1 - \tilde{B}(c))]. \tag{2.9}$$

Таким образом, при выполнении условия эргодичности (2.2) для существования геометрического стационарного распределения $\{\pi(n) = = (1-c)c^n, n = 0,1,...\}$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $0 < c < 1$ выполнялись равенства (2.8) и (2.9). Полагая в (2.9) $z = 1$, получим (2.8). Итак, (2.8) и (2.9) эквивалентны (2.9). Подставляя (2.8) в (2.9), получим

$$\lambda \tilde{A}(z) + \lambda^* \tilde{A}^*(z)(1 - cz) = z[\lambda + \lambda^*(1 - c)]. \tag{2.10}$$

Таким образом, справедлива

Лемма 2.2. *При выполнении условия эргодичности* (2.2) *для существования геометрического стационарного распределения необходимо и достаточно, чтобы для некоторого* $0 < c < 1$ *выполнялись равенства* (2.8) *и* (2.10).

Лемма 2.3. *Для того чтобы уравнение* (2.8) *имело корень* $c \in (0,1)$, *необходимо и достаточно выполнения неравенства*

$$\lambda + \lambda^* < \mu m_B. \tag{2.11}$$

Этот корень при фиксированных λ, λ^* *и* μ *единственный.*

Доказательство. Известно, что для того, чтобы функция $P(x)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n$ являлась производящей функцией некоторого вероятностного распределения на $\mathbb{N}=\{1,2,...\}$, необходимо и достаточно, чтобы она была абсолютно монотонна на (0,1) и $P(0)=0, P(1)=1$. В частности, она строго возрастает и нестрого выпукла вниз на (0,1). Перепишем уравнение (2.8) в виде

$$\tilde{B}(c)=\varphi(c), \qquad (2.12)$$

где

$$\varphi(c)=\frac{(\mu+\lambda+\lambda^*)c-(\lambda+\lambda^*)}{\mu c}.$$

Тогда на (0,1] функция $\varphi(c)$ возрастает и выпукла вверх, $\varphi(1)=1, \lim_{c\downarrow 0}\varphi(c)=-\infty$. Функция $\tilde{B}(c)$ строго возрастает и нестрого выпукла вниз на (0,1], $\tilde{B}(0)=0, \tilde{B}(1)=1$. Для того, чтобы существовал корень $c\in(0,1)$ уравнения (2.12), необходимо и достаточно, чтобы

$$m_B=\tilde{B}'(1)>\varphi'(1)=\frac{\lambda+\lambda^*}{\mu},$$

т.е. чтобы $\lambda+\lambda^*<\mu m_B$. При выполнении последнего неравенства этот корень, очевидно, единственный.

Зафиксируем λ и μ и будем менять λ^*. Определим $c=c(\lambda^*)$ как корень уравнения (2.8), удовлетворяющий неравенству (2.11) при каждом фиксированном λ^*. Выясним, каким образом должны быть выбраны λ^* и $a^*(n)$, чтобы стационарное распределение имело форму $\{\pi(n)=(1-c)c^n\}$ с выбранным выше $c=c(\lambda^*)$. В силу леммы 2.2 для этого необходимо и достаточно, чтобы для этого c выполнялось (2.10).

Из (2.10) находим

$$\lambda^*\tilde{A}^*(z)=\lambda\frac{z-\tilde{A}(z)}{1-cz}+\lambda^*\frac{(1-c)z}{1-cz}. \qquad (2.13)$$

Из леммы 2.2 и (2.13) следует, что

1) если стационарное распределение является геометрическим и $\lambda^*\neq 0$, то $\tilde{A}^*(z)\geq\frac{(1-c)z}{1-cz}$, т.е. размеры дополнительных поступающих групп по распределению не меньше геометрических с параметром c;

2) если основной поступающий поток ординарен (т.е. $a(1)=1$), то для того, чтобы стационарное распределение $X(t)$ было геометрическим с параметром c, необходимо и достаточно, чтобы либо дополнительный поток отсутствовал (т.е. $\lambda^*=0$), либо размеры дополнительных поступающих групп имели геометрическое распределение с параметром c;

3) если основной поток не ординарен (т.е. $\tilde{A}(z)<z$ для некоторого $z\in(0,1)$), то из (2.13) для этого z

$$\lambda^*\tilde{A}^*(z)>\lambda^*\frac{(1-c)z}{1-cz},$$

откуда $\lambda^*\neq 0$.

Следовательно, для того чтобы стационарное распределение процесса $X(t)$ было геометрическим, дополнительный поступающий поток необходим, если основной поток не ординарен.

Из (2.13) следует, что

$$\lambda^*\tilde{A}^*(z)=\frac{[\lambda+\lambda^*(1-c)]z-\lambda\tilde{A}(z)}{1-cz}. \qquad (2.14)$$

Подставляя сюда $\tilde{A}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a(k)z^k$ и раскладывая правую часть полученного равенства в ряд по степеням z, получим

$$\lambda^*\tilde{A}^*(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{[\lambda+\lambda^*(1-c)]c^{k-1}-\lambda\sum_{s=0}^{k-1}a(k-s)c^s\right\}z^k,$$

откуда

$$\lambda^*a^*(k)=[\lambda+\lambda^*(1-c)]c^{k-1}-\lambda\sum_{s=0}^{k-1}a(k-s)c^s, \quad k=1,2,\ldots. \qquad (2.15)$$

Для того, чтобы при каждом λ^* (2.15) определяло распределение вероятностей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$[\lambda+\lambda^*(1-c)]c^{k-1}\geq\lambda\sum_{s=0}^{k-1}a(k-s)c^s,\ k=1,2,\ldots. \qquad (2.16)$$

Заметим, что при $k=1$ (2.16) выполняется автоматически. Поскольку (2.15) эквивалентно (2.14), то при $\lambda^*\neq 0$ тот факт, что сумма всех вероятностей $a^*(k)$ равна 1, выполняется, если положить в (2.14) $z=1$. Если же $\lambda^*=0$, то $a^*(k)$ можно вообще не определять.

Проведенные рассуждения и леммы 2.1 – 2.3 показывают, что имеет место

***Теорема* 2.1.** *Для того чтобы* $\{\pi(n)=(1-c)c^n,\ n=0,1,...\}$ *являлось стационарным распределением* $X(t)$, *необходимо и достаточно выполнения условия эргодичности (2.2), неравенств* (2.11) *и* (2.16) *для* $k\geq 2$, *где* $c=c(\lambda^*)$ – *корень уравнения* (2.8), *принадлежащий (0,1). При фиксированном* λ^* *этот корень существует, единственен и удовлетворяет неравенствам* (2.11).

Доказательство. Для доказательства теоремы 2.1 остается доказать, что условие эргодичности (2.2) является необходимым для существования стационарного распределения в геометрическом виде. Пусть стационарное распределение имеет геометрическую форму. В силу леммы 2.3 тогда выполняется неравенство (2.11). Так как $\tilde{A}^*(z)$ абсолютно монотонна, то из (2.14) следует, что

$$\lambda^* \tilde{A}^{*\prime}(1) = \frac{\lambda + \lambda^* - \lambda m_A}{1-c} > 0,$$

т.е.

$$\lambda m_A < \lambda + \lambda^*. \qquad (2.17)$$

Теперь условие эргодичности (2.2) следует из сравнения (2.11) и (2.17).

Замечание 2.1 Теорема 2.1 в эквивалентной форме может быть сформулирована следующим образом:

Для того чтобы $\{\pi(n) = (1-c)c^n, n = 0,1,...\}$ *являлось стационарным распределением* $X(t)$, *необходимо и достаточно выполнения условия эргодичности* (2.2), *неравенства* (2.11) *и абсолютной монотонности функции* $\lambda^* \tilde{A}^*(z)$, *определяемой равенством* (2.14).

Параметры дополнительного потока могут быть при этом найдены либо из (2.15), либо из (2.14).

Пример 2.1 Пусть $\tilde{A}(z) = z,\ \tilde{B}(z) = z$. С помощью теоремы 2.1 получаем: $\pi(n) = (1-c)c^n$ тогда и только тогда, когда $\lambda + \lambda^* < \mu$, $c = \frac{\lambda+\lambda^*}{\mu}$, $\lambda^* \in [0, \mu - \lambda)$ и $a^*(k) = (1-c)c^{k-1}$ при $\lambda^* \neq 0$.

Пример 2.2 Пусть

$$\tilde{A}(z) = \frac{z+z^2}{2}, \quad \tilde{B}(z) = z,$$

$$m_A = \tilde{A}'(1) = \frac{3}{2}, \quad m_B = \tilde{B}'(1) = 1.$$

Применение теоремы 2.1 дает: распределение $\{\pi(n)\}$ – геометрическое в том и только том случае, если

$$\frac{3\lambda}{2} < \mu, \quad \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\mu}}{2} \le \lambda^* < \mu - \lambda, \quad (2.18)$$

причем последний интервал значений не пуст в силу выполнения условия эргодичности. В этом случае

$$\pi(n) = (1-c)c^n, \quad \text{где} \quad c = c(\lambda^*) = \frac{\lambda + \lambda^*}{\mu}.$$

При этом $\lambda^* a^*(k) = (1-c)(\lambda^* - \frac{\lambda}{2})c^{k-2},\ k = 1,2,...$. Меняя λ^* в пределах неравенства (2.18), получаем различные геометрические распределения.

Пример 2.3 Пусть

$$\tilde{A}(z) = \frac{(1-a)z}{1-az}, \quad \tilde{B}(z) = \frac{(1-b)z}{1-bz},$$

$$m_A = \frac{1}{1-a}, \quad m_B = \frac{1}{1-b}.$$

С помощью теоремы 2.1 можно получить следующий результат: стационарное распределение в геометрической форме существует, если и только если выполняются неравенства

$$\frac{\lambda c}{c-a} < \frac{\mu}{1-b}, \ a < c, \qquad (2.19)$$

$$\frac{\lambda a}{c-a} \le \lambda^* < \frac{\mu}{1-b} - \lambda, \qquad (2.20)$$

где $c = \frac{\lambda+\lambda^*}{\mu+(\lambda+\lambda^*)b}$. Заметим, что (2.19) задает более узкую область, чем область, задаваемую условием эргодичности. При выполнении (2.19) промежуток значений λ^*, определяемый (2.20), не пуст. Параметры дополнительного потока определяются из

$$\lambda^* a^*(k) = [\lambda + \lambda^*(1-c)]c^{k-1} - \lambda(1-a)\frac{c^k - a^k}{c-a}, k \ge 1.$$

3 Модель сети

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания с конечным множеством узлов, занумерованных элементами множества $J = \{1,2,...,N\}$. В узлы сети поступают независимые пуассоновские потоки групп заявок с параметром λ_i для узла $i \in J$. Длительности обслуживания групп в узлах сети независимы, имеют показательное распределение с параметром μ_i для узла $i \in J$. Размеры поступающих групп и требуемых для обслуживания групп – независимые положительные целочисленные случайные величины с функциями распределения $\overline{A}_i$ и $\overline{B}_i$, функциями вероятностных масс a_i и b_i, а также производящими функциями $\tilde{A}_i$ и $\tilde{B}_i$ соответственно для узла i. Когда узел i пуст, в него поступает дополнительный поток групп с интенсивностью λ_i^*. Размеры таких групп – независимые положительные целочисленные случайные величины с функцией распределения $\overline{A}_i^*$, функцией вероятностной массы a_i^* и производящей функцией $\tilde{A}_i^*$ для узла i. Обслуженная в узле i группа, достигшая требуемого размера k, переходит с вероятностью $p_{(i,k)(j,m)}$ в узел j как группа размера m, а с вероятностью $p_{(i,k),0}$ покидает сеть. Неполные группы, не достигшие требуемого размера (назовем их некомплектными), также обслуживаются, но после обслуживания в любом узле покидают сеть. Предполагается, что размеры основных поступающих групп и размеры групп, требуемых для обслуживания, не зависят от процессов поступления и обслуживания и имеют конечные средние m_{A_i} и m_{B_i} для i-го узла соответственно ($i \in J$).

Пусть $c_{i,j}(k,m) = b_i(k)p_{(i,k)(j,m)},\ c_{i,0}(k) = b_i(k)p_{(i,k),0}$, если $i, j \in J$. Для простоты предположим, что $c_{i,i}(k,m) = 0$ для всех $i \in J,\ k,m \ge 1$ и что маршрутная матрица $R = \{r_{i,j}\}_{i,j \in J \cup \{0\}}$ неприводима, где

$$r_{i,j} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k,m), & i,j \in J, \\ \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,0}(k,0), & i \in J,\ j = 0, \\ \frac{\lambda_j}{\sum_{l \in J} \lambda_l}, & i = 0,\ j \in J, \\ 0, & i = 0,\ j = 0. \end{cases}$$

Пусть $X_i(t)$ – число заявок в узле i в момент t. Состояние сети будем описывать цепью Маркова $\{\mathbf{X}(t)\}$ с непрерывным временем с пространством состояний $\mathbb{Z}_+^N$, где $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), ..., X_N(t))$. Обозначим через q функцию интенсивностей перехода для этой цепи. Остальные обозначения будут такими же, как для модели однолинейного узла в разделе 2, но с дополнительным индексом i, указывающим номер узла из множества J, к которому относится рассматриваемая величина. Очевидно, для рассматриваемой модели при $i, j \in J$ и $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$

$$\begin{gathered} q(\mathbf{n}, \mathbf{n} - k\mathbf{e}_i + m\mathbf{e}_j) = \mu_i c_{i,j}(k,m), \quad 1 \le k \le n_i, 1 \le m, \\ q(\mathbf{n}, \mathbf{n} - k\mathbf{e}_i) = \mu_i (c_{i,0}(k) + \overline{B}_i(n_i + 1) 1_{\{n_i\}}(k)), \\ 1 \le k \le n_i, \\ q(\mathbf{n}, \mathbf{n} + m\mathbf{e}_j) = \lambda_j a_j(m) + \lambda_j^* a_j^*(m) 1_{\{0\}}(n_j), \quad 1 \le m, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\mathbf{e_i}$ – единичный вектор, i-я координата которого равна 1, 1_A – индикаторная функция множества A, а $\overline{B}_i(n) = 1 - B_i(n-1)$. Определим полную функцию интенсивности выхода α посредством $\alpha(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}_+^N} q(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$. Пусть $J_0(\mathbf{n}) = \{i \in J : n_i = 0\}$ и $J_+(\mathbf{n}) = J \setminus J_0(\mathbf{n})$. Тогда имеем

$$\alpha(\mathbf{n}) = \sum_{i \in J_+(\mathbf{n})} \mu_i + \sum_{j \in J} \lambda_j + \sum_{j \in J_0(\mathbf{n})} \lambda_j^*. \tag{3.2}$$

Аналогично (2.3) и (2.4) вероятностное распределение π на $\mathbb{Z}_+^N$ является стационарным распределением $\mathbf{X}(t)$ тогда и только тогда, когда существует функция интенсивностей перехода q^R, удовлетворяющая

$$\begin{gathered} \pi(\mathbf{n}) q(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \pi(\mathbf{n}') q^R(\mathbf{n}', \mathbf{n}), \\ \mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}_+^N, \mathbf{n} \ne \mathbf{n}', \end{gathered} \tag{3.3}$$

и

$$\alpha(\mathbf{n}) = \alpha^R(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N, \tag{3.4}$$

где $\alpha^R(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}_+^N} q^R(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$.

Предположим, что π имеет геометрическую форму произведения, т.е.

$$\pi(\mathbf{n}) = \prod_{i=1}^{N} (1 - c_i) c_i^{n_i}, \quad \mathbf{n} \in Z_+^N, \tag{3.5}$$

для $0 < c_i < 1\ (i \in J)$. Подставляя это в (3.3), получим

$$\begin{cases} q^R(\mathbf{n}, \mathbf{n} + k\mathbf{e}_i - m\mathbf{e}_j) = c_i^k c_j^{-m} \mu_i c_{i,j}(k,m), \\ 1 \le k, 1 \le m \le n_j; \\ q^R(\mathbf{n}, \mathbf{n} + k\mathbf{e}_i) = c_i^k \mu_i (c_{i,0}(k) + \\ + \overline{B}_i(k+1) 1_{\{0\}}(n_i)), 1 \le k; \\ q^R(\mathbf{n}, \mathbf{n} - m\mathbf{e}_j) = c_j^{-m} (\lambda_j a_j(m) + \\ + \lambda_j^* a_j^*(m) 1_{\{n_j\}}(m)), 1 \le m \le n_j. \end{cases} \tag{3.6}$$

Перед вычислением α^R рассмотрим общую интенсивность поступления ординарных групп размера m в узел j. Обозначим ее через $\gamma_j(m)$. Очевидно,

$$\begin{gathered} \gamma_j(m) = \lambda_j a_j(m) + \sum_{i \in J} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_i (1 - c_i) c_i^k \sum_{l=1}^{k} c_{i,j}(l,m) = \\ = \lambda_j a_j(m) + \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k c_{i,j}(k,m), \quad j \in J. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Определим $\gamma_j(m)$ с помощью (3.7). При нашем предположении о π стационарным распределением системы является такое, как если в один и тот же момент каждый узел функционирует независимо от других узлов. Следовательно, судя по (2.8) и (2.10) для случая единственного узла, мы должны также ожидать, что для всех $i \in J$

$$\frac{\mu_i c_i}{1 - c_i} (1 - \tilde{B}_i(c_i)) = \tilde{\Gamma}_i(1) + \lambda_i^* \tag{3.8}$$

и

$$\tilde{\Gamma}_i(z_i) + \lambda_i^* \tilde{A}_i^*(1 - c_i z_i) = z_i [\tilde{\Gamma}_i(1) + (1 - c_i) \lambda_i^*], \tag{3.9}$$

где $\tilde{\Gamma}_i(z_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_i(m) z_i^m$. При этом $\tilde{\Gamma}_i(1) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_i(m)$ является интенсивностью потока основных групп на узел i, а $\tilde{\Gamma}_i^{-1}(1) \tilde{\Gamma}_i(z_i)$ производящей функцией распределения размеров основных групп, принимаемых узлом i.

Заметим, что из определения (3.7) следует, что для всех $m \ge 1$ и $j \in J$

$$\begin{gathered} \gamma_j(m) \ge \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k c_{i,j}(k,m) \ge \\ \ge \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} b_i(k) c_i^k = \sum_{i \in J} \mu_i \tilde{B}_i(c_i) > 0. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Поэтому в предположении неприводимости маршрутной матрицы R многомерная цепь Маркова $\{\mathbf{X}(t)\}$ неприводима.

Вычислим α^R:

$$\begin{gathered} \alpha^R(\mathbf{n}) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J_+(\mathbf{n})} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n_j} c_{i,j}(k,m) c_i^k c_j^{-m} + \\ + \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,0}(k) c_i^k + \sum_{i \in J_0(\mathbf{n})} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} \overline{B}_i(k+1) c_i^k + \end{gathered}$$

$$+\sum_{j\in J_+(\mathbf{n})}\left(\lambda_j\sum_{m=1}^{n_j}a_j(m)c_j^{-m}+\lambda_j^*a_j^*(n_j)c_j^{-n_j}\right). \quad (3.11)$$

Используя определение $\gamma_i(m)$ и тождество

$$c_{i,0}(k)=b_i(k)-\sum_{j\in J}\sum_{m=1}^{\infty}c_{i,j}(k,m),$$

преобразуем (3.11) следующим образом:

$$\alpha^R(\mathbf{n})=\sum_{j\in J_+(\mathbf{n})}\sum_{m=1}^{n_j}\left(\gamma_j(m)-\lambda_j a_j(m)\right)c_j^{-m}+$$

$$+\sum_{i\in J}\mu_i\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_i(k)-\sum_{j\in J}\sum_{m=1}^{\infty}c_{i,j}(k,m)\right)c_i^k+$$

$$+\sum_{i\in J_0(\mathbf{n})}\mu_i\left(c_i\frac{1-\tilde{B}_i(c_i)}{1-c_i}-\tilde{B}_i(c_i)\right)+$$

$$+\sum_{j\in J_+(\mathbf{n})}\left(\lambda_j\sum_{m=1}^{n_j}a_j(m)c_j^{-m}+\lambda_j^*a_j^*(n_j)c_j^{-n_j}\right)=$$

$$=\sum_{j\in J_+(\mathbf{n})}\sum_{m=1}^{n_j}\left(\gamma_j(m)-\lambda_j a_j(m)\right)c_j^{-m}+$$

$$+\sum_{i\in J_+(\mathbf{n})}\mu_i\tilde{B}_i(c_i)-\sum_{j\in J}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\gamma_j(m)-\lambda_j a_j(m)\right)+$$

$$+\sum_{i\in J_0(\mathbf{n})}\mu_i c_i\frac{1-\tilde{B}_i(c_i)}{1-c_i}+$$

$$+\sum_{j\in J_+(\mathbf{n})}\left(\lambda_j\sum_{m=1}^{n_j}a_j(m)c_j^{-m}+\lambda_j^*a_j^*(n_j)c_j^{-n_j}\right)=$$

$$=\sum_{j\in J_+(\mathbf{n})}\left[\sum_{m=1}^{n_j}\left(\gamma_j(m)-\lambda_j a_j(m)\right)c_j^{-m}+\mu_j\tilde{B}_j(c_j)+\right.$$

$$+\lambda_j\sum_{m=1}^{n_j}a_j(m)c_j^{-m}+\lambda_j^*a_j^*(n_j)c_j^{-n_j}-$$

$$\left.-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\gamma_j(m)-\lambda_j a_j(m)\right)\right]+$$

$$+\sum_{i\in J_0(\mathbf{n})}\left[\mu_j c_j\frac{1-\tilde{B}_j(c_j)}{1-c_j}-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\gamma_j(m)-\lambda_j a_j(m)\right)\right]=$$

$$=\sum_{j\in J_+(\mathbf{n})}\left[\sum_{m=1}^{n_j}\gamma_j(m)c_j^{-m}+\lambda_j^*a_j^*(n_j)c_j^{-n_j}+\right.$$

$$\left.+\mu_j\tilde{B}_j(c_j)-\tilde{\Gamma}_j(1)+\lambda_j\right]+$$

$$+\sum_{i\in J_0(\mathbf{n})}\left[\mu_j c_j\frac{1-\tilde{B}_j(c_j)}{1-c_j}-\tilde{\Gamma}_j(1)+\lambda_j\right].$$

Используя (3.2), находим разность

$$\alpha^R(\mathbf{n})-\alpha(\mathbf{n})=\sum_{j\in J_+(\mathbf{n})}\left[\sum_{m=1}^{n_j}\gamma_j(m)c_j^{-m}+\right.$$

$$\left.+\lambda_j^*a_j^*(n_j)c_j^{-n_j}+\mu_j\left(\tilde{B}_j(c_j)-1\right)-\tilde{\Gamma}_j(1)\right]+$$

$$+\sum_{i\in J_0(\mathbf{n})}\left[\mu_j c_j\frac{1-\tilde{B}_j(c_j)}{1-c_j}-\tilde{\Gamma}_j(1)-\lambda_j^*\right]. \quad (3.12)$$

Введем обозначения

$$f_j(n_j,c_j)=\sum_{m=1}^{n_j}\gamma_j(m)c_j^{-m}+\lambda_j^*a_j^*(n_j)c_j^{-n_j}+$$
$$+\mu_j(\tilde{B}_j(c_j)-1)-\tilde{\Gamma}_j(1),\quad n_j\ge 1,\ j\in J, \quad (3.13)$$

$$g_j(c_j)=\mu_j c_j\frac{1-\tilde{B}_j(c_j)}{1-c_j}-\tilde{\Gamma}_j(1)-\lambda_j^*,\quad j\in J. \quad (3.14)$$

Заметим, что

$$f_j(n_j,c_j)-g_j(c_j)=\sum_{m=1}^{n_j}\gamma_j(m)c_j^{-m}+$$
$$+\lambda_j^*a_j^*(n_j)c_j^{-n_j}+\lambda_j^*+\frac{\mu_j(\tilde{B}_j(c_j)-1)}{1-c_j}. \quad (3.15)$$

Соотношение (3.12) с помощью функций (3.13) и (3.14) запишется как

$$\alpha^R(\mathbf{n})-\alpha(\mathbf{n})=$$
$$=\sum_{j\in J_+(\mathbf{n})}f_j(n_j,c_j)+\sum_{i\in J_0(\mathbf{n})}g_j(c_j). \quad (3.16)$$

Очевидно, $\alpha^R(\mathbf{n})=\alpha(\mathbf{n})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j\in J_+(\mathbf{n})}f_j(n_j,c_j)+\sum_{i\in J_0(\mathbf{n})}g_j(c_j)=0. \quad (3.17)$$

Докажем, что для того, чтобы при всех $\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^N$ выполнялось равенство $\alpha^R(\mathbf{n})=\alpha(\mathbf{n})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_j(n_j,c_j)=0 \quad \text{для всех} \quad j\in J,\ n_j\ge 1$$

и $g_j(c_j)=0$ для всех $j\in J$.

Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости положим в (3.17) $\mathbf{n}=n_j\mathbf{e}_j$; тогда для любого $n_j\ge 1$

$$f_j(n_j,c_j)+\sum_{i\in J\setminus\{j\}}g_i(c_i)=0. \quad (3.18)$$

Далее положим в (3.17) $\mathbf{n}=0$, тогда получим

$$\sum_{j\in J}g_j(c_j)=0. \quad (3.19)$$

Из сравнения (3.18) и (3.19) следует, что

$$f_j(n_j,c_j)-g_j(c_j)=0 \text{ для всех } j\in J,\ n_j\ge 1. \quad (3.20)$$

Подставляя (3.15) в (3.20), получим для любого $j\in J$

$$\sum_{m=1}^{n_j}\gamma_j(m)c_j^{-m}+\lambda_j^*a_j^*(n_j)c_j^{-n_j}+\lambda_j^*+$$
$$+\frac{\mu_j(\tilde{B}_j(c_j)-1)}{1-c_j}=0. \quad (3.21)$$

Умножая (3.21) на $c_j^{n_j}$ и складывая по $n_j\ge 1$, получим

$$\frac{\tilde{\Gamma}_j(1)}{1-c_j}+\lambda_j^*+\frac{c_j}{1-c_j}[\lambda_j^*+\frac{\mu_j(\tilde{B}_j(c_j)-1)}{1-c_j}]=0,$$

т.е.

$$\mu_j c_j\frac{1-\tilde{B}_j(c_j)}{1-c_j}=\tilde{\Gamma}_j(1)+\lambda_j^*,\quad j\in J.$$

В силу определения (3.14) функции g_j это означает, что

$$g_j(c_j)=0 \quad \text{для любого } j\in J.$$

Но тогда в силу (3.20) будет выполняться также равенство

$$f_j(n_j,c_j)=0 \quad \text{для всех } j\in J \text{ и } n_j\ge 1.$$

Необходимость доказана.

Таким образом, для того, чтобы π имело геометрическую форму произведения (3.5), необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu_j c_j\frac{1-\tilde B_j(c_j)}{1-c_j}=\tilde\Gamma_j(1)+\lambda_j^*,\quad j\in J. \qquad (3.22)$$

$$\sum_{m=1}^{n_j}\gamma_j(m)c_j^{-m}+\lambda_j^* a_j^*(n_j)c_j^{-n_j}+\mu_j\tilde B_j(c_j)= \\ =\tilde\Gamma_j(1)+\mu_j,\quad n_j\ge 1,\ j\in J. \qquad (3.23)$$

Умножая (3.23) на $(c_j z_j)^{n_j}$, складывая по всем $n_j\ge 1$ и используя (3.22), получим

$$\tilde\Gamma_j(z_j)+\lambda_j^*\tilde A_j^*(z)(1-c_j z_j)= \\ =z_j[\tilde\Gamma_j(1)+(1-c_j)\lambda_j^*]. \qquad (3.24)$$

Очевидно, (3.22) и (3.23) эквивалентны (3.22) и (3.24). Применяя к (3.22) и (3.24) рассуждения, подобные примененным к (2.8) и (2.10), получим следующие результаты.

***Лемма* 3.1.** *Для того чтобы при всех* $j\in J$ *уравнения* (3.22) *имели корни* $c_j\in(0,1)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\tilde\Gamma_j(1)+\lambda_j^*<\mu_j m_{B_j},\quad j\in J. \qquad (3.25)$$

Эти корни при фиксированных $\tilde\Gamma_j(1),\lambda_j^*$ *и* μ_j *единственные.*

***Теорема* 3.1.** *Для того чтобы* $\left\{\pi(\mathbf n)=\prod_{j\in J}(1-c_j)c_j^{n_j},\ \mathbf n\in\mathbb Z_+^N\right\}$ *являлось стационарным распределением* $\mathbf X(t)$, *необходимо и достаточно выполнения условия эргодичности*

$$\tilde\Gamma'_j(1)<\mu_j m_{B_j},\quad j\in J, \qquad (3.26)$$

неравенств (3.25) *и*

$$[\tilde\Gamma_j(1)+\lambda_j^*(1-c_j)]c_j^{k-1}\ge\sum_{s=0}^{k-1}\gamma_j(k-s)c_j^s, \\ k=2,3,\ldots,\ j\in J, \qquad (3.27)$$

где $c_j=c_j(\lambda_j^*)$ *– корни уравнений* (3.22), *принадлежащие* (0,1). *При фиксированных* λ_j^* *они существуют, единственны и удовлетворяют* (3.25). *При выполнении условий теоремы параметры дополнительного потока могут быть найдены из соотношений*

$$\lambda_j^* a_j^*(k)=[\tilde\Gamma_j(1)+\lambda_j^*(1-c_j)]c_j^{k-1}- \\ -\sum_{s=0}^{k-1}\gamma_j(k-s)c_j^s,\quad k=1,2,3,\ldots,\ j\in J. \qquad (3.28)$$

Остается доказать, что условие эргодичности достаточно для существования стационарного распределения в геометрической форме. В самом деле, цепь $\{\mathbf X(t)\}$ неприводима и регулярна, поскольку $\sup q(\mathbf n)\le\sum_{i\in J}[\mu_i+\lambda_i+\lambda_i^*]$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют нетривиальное решение $\left\{\prod_{i\in J}c_i^{n_i};\ \mathbf n\in Z_+^N\right\}$. По эргодической теореме Фостера [9] цепь Маркова $\{\mathbf X(t)\}$ эргодична.

***Следствие* 3.1.** *При выполнении условий теоремы 3.1 выходящие из сети потоки комплектных групп являются независимыми пуассоновскими потоками, а текущее состояние сети не зависит от предыстории этих потоков.*

4 Алгоритм проверки существования стационарного распределения $\mathbf X(t)$ *в геометрической форме произведения и итерационная процедура решения нелинейных уравнений трафика*

Пусть $\mathfrak X$ – линейное пространство векторов $\mathbf x=\{x_i, i\in J\}$ с евклидовой метрикой. Введем в $\mathfrak X$ отношение частичной упорядоченности: скажем, что $\mathbf x\le\mathbf y$, если $x_i\le y_i$ для всех $i\in J$ (здесь y_i – i-я координата $\mathbf y$). Пусть

$$S_0(i)=\{\mathbf x\in\mathfrak X:\ \mathbf x\ge 0,\ x_i+\lambda_i^*<\mu_i m_{B_i}\},\quad i\in J.$$

Если $\gamma\in S_0(j)$, то по лемме 3.1 уравнение

$$\mu_j c_j\frac{1-\tilde B_j(c_j)}{1-c_j}=\gamma_j+\lambda_j^* \qquad (4.1)$$

имеет корень $c_j\in(0,1)$; при этом по теореме о неявной функции $c_j=c_j(\gamma_j)$ – непрерывная функция переменной γ_j. Если $\gamma\notin S_0(j)$, то для этого j корня из (0,1) нет, есть только корень $c_j=c_j(\gamma_j)=1$. Чтобы $c_j=c_j(\gamma_j)$ оставалась непрерывной всюду, положим $c_j(\gamma_j)=1$ для $\gamma\notin S_0(j)$.

Пусть теперь $\mathfrak X_+=\{\mathbf x\in\mathfrak X:\ \mathbf x\ge 0, \mathbf x\ne 0\}$. Определим функцию $F:\mathfrak X_+\to\mathfrak X_+$ с помощью равенства

$$F(\gamma)=\left\{\lambda_j+\sum_{i\in J}\mu_i\sum_{k=1}^{\infty}c_i^k(\gamma_i)\sum_{m=1}^{\infty}c_{i,j}(k,m),\ j\in J\right\}.$$

Очевидно, для $\lambda=\{\lambda_j,\ j\in J\}$ и $\mathbf s=\left\{\lambda_j+\sum_{i\in J}\mu_j\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_{i,j}(k,m),\ j\in J\right\}$ в силу того, что $c_i(\gamma_i)\le 1$, выполняется неравенство $\lambda\le F(\gamma)\le\mathbf s$. Поскольку $c_j(\gamma_j)$ – непрерывные функции, то сужение F на $[\lambda,\mathbf s]=[\lambda_1,s_1]\times\ldots\times[\lambda_N,s_N]$ является непрерывным отображением $F:[\lambda,\mathbf s]\to[\lambda,\mathbf s]$. Следовательно, по теореме

Брауэра о неподвижной точке [10] существует решение уравнения $\gamma = F(\gamma)$, т.е. системы уравнений

$$\gamma_j = \lambda_j + \sum_{i\in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k(\gamma_i) \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k,m),\ j \in J. \quad (4.2)$$

Отметим, что система уравнений (4.2) получается из (3.7) сложением по $m \geq 1$ и что в силу (3.10) решение (4.2) строго положительно, т.е. $\gamma_j > 0,\ \ j \in J$.

Таким образом, получаем следующий алгоритм проверки существования стационарного распределения $\mathbf{X}(t)$ в геометрической форме произведения.

1. Находим корни $c_j = c_j(\gamma_j)$ уравнений (4.1) для $\gamma_j + \lambda_j^* < \mu_j m_{B_j}$; при выполнении противоположного неравенства полагаем $c_j(\gamma_j) = 1$.

2. Решаем систему нелинейных уравнений трафика (4.2) относительно $\gamma = \{\gamma_j,\ \ j \in J\}$.

3. Подставляя найденные γ_j в $c_j = c_j(\gamma_j)$, находим $c_j,\ j \in J$. Предполагая выполненным неравенство $\gamma_j + \lambda_j^* < \mu_j m_{B_j}$, находим $\tilde{\Gamma}_j(1) = \gamma_j$.

4. Проверяем выполнение неравенств (3.25). Если хотя бы одно из них нарушено, делаем вывод о том, что не существует стационарного распределения в геометрической форме произведения.

5. Подсчитываем $c_{i,j}(k,m) = b_i(k) p_{(i,k)(j,m)}$, а затем $\gamma_j(m)$ по формуле (3.7). Находим $\tilde{\Gamma}_i(z_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_i(m) z_i^m$ и ее производную в точке 1.

6. Проверяем выполнение условия эргодичности (3.26). При нарушении хотя бы одного из этих неравенств делаем вывод о том, что не существует стационарного распределения в геометрической форме произведения. При выполнении (3.26) переходим к следующему пункту алгоритма.

7. Проверяем выполнение неравенств (3.27). Если они нарушены, то делаем вывод о том, что не существует стационарного распределения в геометрической форме произведения. При выполнении (3.27) переходим к следующему пункту алгоритма.

8. Подсчитываем параметры дополнительного потока по формуле (3.28). Решая систему неравенств (3.25), (3.26), (3.27) относительно λ_j^*, находим область значений интенсивностей дополнительных потоков на узлы сети, когда они пусты. Эта область определяет значения $\lambda_j^*\ \ j \in J$, при которых стационарное распределение $\{\pi\}$ имеет форму произведения геометрических распределений.

9. Записываем искомое решение для стационарного распределения

$$\left\{ \pi(\mathbf{n}) = \prod_{j\in J} (1 - c_j) c_j^{n_j},\ \ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N \right\}.$$

Отметим, что, в отличие от [6], в которой необходимо решать бесконечную систему нелинейных уравнений трафика, основанную на (3.7), нам достаточно решить конечную систему уравнений трафика (4.2). Для ее решения предлагается следующая итерационная процедура:

$$\gamma_j^{(n+1)} = \lambda_j + \sum_{i\in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k(\gamma_i^{(n)}) \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k,m), \quad (4.3)$$
$$j \in J,\ n \geq 1.$$
$$\gamma_j^{(0)} = \lambda_j, \quad j \in J.$$

Покажем, что эта процедура сходится, т.е. $\gamma_j^{(n)} \to \gamma_j,\ \ j \in J$, при $n \to \infty$, где γ_j – j-я координата неподвижной точки отображения F.

***Лемма* 4.1.** *Корень $c_j = c_j(\gamma_j)$ уравнения (4.1) является неубывающей функцией переменной γ_j.*

Доказательство. Запишем уравнение (4.1) в форме

$$\tilde{B}_j(c_j) = \varphi_j(c_j, \gamma_j), \quad (4.4)$$

где

$$\varphi_j(c_j, \gamma_j) = \frac{(\mu_j + \gamma_j + \lambda_j^*) c_j - (\gamma_j + \lambda_j^*)}{\mu_j c_j}.$$

Так как $c_j \leq 1$, то $\varphi'_{\gamma_j}(c_j, \gamma_j) = \frac{c_j - 1}{\mu_j c_j} \leq 0$. Поэтому при $\gamma_{j_1} > \gamma_{j_2}$ и фиксированном c_j будет выполнено $\varphi_j(c_j, \gamma_{j_1}) \leq \varphi_j(c_j, \gamma_{j_2})$. Учитывая, что левая часть (4.4) – возрастающая нестрого выпуклая вниз функция, $\tilde{B}_j(0) = 0,\ \tilde{B}_j(1) = 1$; правая часть (4.4) – возрастающая выпуклая вверх функция от c_j, $\lim_{c_j \downarrow 0} \varphi(c_j, \gamma_j) = -\infty,\ \varphi(1, \gamma_j) = 1$, делаем вывод, что $c_j(\gamma_{j_1}) \geq c_j(\gamma_{j_2})$. Лемма доказана.

Докажем, что последовательность $\{\gamma_j^{(n)},\ n \geq 1\}$ при каждом $j \in J$ не убывает. Действительно, $\gamma_j^{(1)} \geq \lambda_j = \gamma_j^{(0)}$. Предположим, что для некоторого n выполнено $\gamma_i^{(n)} \geq \gamma_i^{(n-1)}, i \in J$. Из (4.3) следует

$$\gamma_j^{(n+1)} - \gamma_j^{(n)} = \sum_{i\in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} [c_i^k(\gamma_i^{(n)}) - \quad (4.5)$$
$$- c_i^k(\gamma_i^{(n-1)})] \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k,m), \quad j \in J.$$

В силу леммы 4.1 $c_i(\gamma_i)$ не убывает по γ_i, поэтому $c_i(\gamma_i^{(n)}) \geq c_i(\gamma_i^{(n-1)}), i \in J$. Но тогда из (4.5) следует, что $\gamma_j^{(n+1)} \geq \gamma_j^{(n)}, j \in J$. Значит, по индукции последовательность $\{\gamma_j^{(n)},\ n \geq 1\}$ не убывает при каждом $j \in J$. Очевидно, она ограничена:

$$\lambda_j \le \gamma_j^{(n)} \le \lambda_j + \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,j}(k,m), \quad j \in J.$$

Следовательно существуют пределы

$$\gamma_j = \lim_{n \to \infty} \gamma_j^{(n)}, \quad j \in J.$$

Переходя к пределу в равенстве (4.3), получаем, что $\gamma = \{\gamma_j, \ j \in J\}$ является неподвижной точкой отображения F, т.е. решением системы нелинейных уравнений (4.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe, E.* Product Form Queueing Networks with Negative and Positive Customers / E. Gelenbe, // J. Appl. Probab. – 1991. – Vol. 28. – P. 656-663.

2. *Gelenbe, E.* Stability of Product-Form G-networks / E. Gelenbe, R. Shassberger // Probab. in Eng. and Inform. Sci. – 1992. – № 6. – P. 271-276.

3. *Chao, X.* On Generalized Networks of Queues with Positive and Negative Arrivals / X. Chao, M. Pinedo // Prob. Eng. Inf. Sci. – 1993. – Vol. 7. – P. 301–304.

4. *Gelenbe, E.* G-networks with Signals and Batch Removal / E. Gelenbe // Prob. Eng. Inf. Sci. – 1993. – Vol. 7. – P. 335–342.

5. *Gelenbe, E.* G-networks with Triggered Customer Movement / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1993. – Vol. 30. – P. 742–748.

6. *Miyazawa, M.* A Geometric Product-form Distribution for a Queueing Network with Non-Standard Batch Arrivals and Batch Transfers / M. Miyazawa, P.G. Taylor // Adv. Appl. Prob. – 1997. – Vol. 29. – № 2. – P. 523–534.

7. *Chao, X.* A Network of Assembly Queues with Product-form Solution / X. Chao, M. Pinedo, D. Shaw // J. Appl. Prob. – 1996. – Vol. 33. – P. 858–869.

8. *Климов, Г.П.* Стохастические системы обслуживания / Г.П. Климов. – М.: Наука, 1966.

9. *Foster, F.G.* On Stochastic Matrices Assosiated with Certain Queueing Process / F.G. Foster // Ann. Math. Statist. – 1953. – Vol. 24. – № 2. – P. 355–360.

10. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М. : ИЛ, 1962.

Поступила в редакцию 14.09.09.