

Разработанная методика может применяться для расчетно-статистической оценки кинетики необратимого удлинения оболочек стержневых твэлов с топливом в виде таблеток из  $UO_2$  при переменных режимах эксплуатации действующих и проектируемых реакторов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихачев Ю. И., Пулко В. Я. Прочность тепловыделяющих элементов ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1975.

2. Ван-дер-Варден Б. Л. Математическая статистика. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Цыканов В. А. и др. Препринт НИИАР-44/403. Димитровград, 1979.
4. Ривкин Е. Ю., Родченков Б. С., Филатов В. М. Прочность сплавов циркония. М., Атомиздат, 1974.
5. Wood D., Watkins B. — Nucl. Mater., 1971, v. 41, p. 327.

Поступила в Редакцию 04.11.80

УДК 621.039.51.12

## Транспортное приближение в теории замедления нейтронов

КОЖЕВНИКОВ Д. А., ПШЕНИЧНИКОВ А. И.

Для многих теоретических задач прикладной нейтроники принципиальное значение имеет учет резонансной структуры сечений и большого разнообразия видов взаимодействия нейтронов с веществом. К весьма эффективным алгоритмам решения пространственно-неоднородных задач приводит транспортное приближение, сводящее анизотропное рассеяние к изотропному с модифицированным (транспортным) сечением. Этому приближению в теории замедления нейтронов посвящена обширная литература [1–5], однако условия его применимости изучены еще недостаточно. В частности, указывалось на возможность получения в этом приближении нефизических результатов [3]. В настоящей статье показано, что погрешность транспортного приближения, обусловленную более слабой пространственной зависимостью плотности потока нейтронов, можно устранить расчетом среднего косинуса угла рассеяния по определенному правилу, учитывающему характер энергетической зависимости сечений взаимодействия. Эффективность модифицированного транспортного приближения продемонстрирована в наименее благоприятном для его применения случае чисто водородного замедлителя.

**Формализм транспортного приближения.** Распределение замедляющихся нейтронов плоского моноэнергетического изотропного источника описывается уравнением переноса

$$[\hat{L}(u, \mu) - \hat{K}] \psi(z, u, \mu) = \frac{1}{4\pi} \delta(u) \delta(z),$$

где  $\hat{L}$  и  $\hat{K}$  — операторы переноса и столкновений:

$$\hat{L}(u, \mu) \psi(\cdot) = \left[ \lambda(u) \mu \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right] \psi(\cdot);$$

$$[\hat{K}\psi](\cdot) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^u du' h(u') W \times$$

$$\times [\mu_0(u' | u)] \psi(z, u', \mu).$$

Представление плотности столкновений  $\psi$  и инди-

катрисы рассеяния  $W$  рядами Лежандра и преобразование

$$\hat{F}\psi(\cdot) = \psi(\xi, u, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z, u, \mu) e^{\xi z} dz,$$

приводят к системе уравнений для трансформант угловых моментов  $\psi_k(\xi, u)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} \psi_k - \xi \lambda(u) \left[ \frac{k+1}{2k+1} \psi_{k+1} + \frac{k}{2k+1} \psi_{k-1} \right] = \\ = \int_0^u h(u') \psi_k(\xi, u') W_k(u' | u) du' + \delta(u) \delta_{k0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Система замыкается условием  $\psi_{N+1}(\xi, u) = 0$  (в  $P_N$ -приближении) или условием (в  $B_N$ -приближении)

$$\begin{aligned} \psi_{N+1}(\xi, u) = \psi_N(\xi, u) Q_{N+1} \times \\ \times \left[ \frac{1}{\xi \lambda(u)} \right] / Q_N \left[ \frac{1}{\xi \lambda(u)} \right]. \end{aligned}$$

Вводя угловые моменты плотности замедления

$$q_k(z, u) = \int_0^u du' h(u') \psi_k(z, u') \int_u^\infty W_k(u' | u'') du'',$$

систему (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} - \frac{\partial q_k(\xi, u)}{\partial u} = [1 - h(u) \kappa_k(u)] \psi_k - \\ - \xi \lambda(u) \left[ \frac{k+1}{2k+1} \psi_{k+1} + \frac{k}{2k+1} \psi_{k-1} \right], \end{aligned}$$

где  $\kappa_k$  определено соотношением

$$\kappa_k(u) = \int_u^\infty W_k(u' | u) du';$$

например,  $\kappa_1(u) = \overline{\mu_0(u)}$  — средний косинус угла рассеяния.

Обобщенное транспортное приближение вводится условием

$$W_k(u' | u) = \kappa_k(u') \delta(u - u'), \quad k \geq 1, \quad (2)$$

которое эквивалентно требованию  $\partial q_k / \partial u = 0$  при  $k \geq 1$ . Это означает, что при анизотропном рассе-

янии нейтроны не теряют энергию (угловые моменты плотности замедления  $q_{k \geq 1}$  не зависят от летаргии).

Решение системы (1) с условием (2) имеет вид

$$\psi_k(\xi, u) = \Lambda_k(\xi, u) \psi_0(\xi, u); \quad \Lambda_0 = 1, \quad (3)$$

где функции  $\Lambda_k$  имеют вид цепных дробей [5].

Соотношение (3) позволяет представить уравнение (1) при  $k = 0$  в виде аналога канонической формы пространственно-однородного уравнения переноса или уравнения Вигнера — Вейнберга — Корнголда — Орлова [5].

**Недостатки транспортного приближения.** Транспортное приближение рассматривалось в работах [2—5], однако там не приводились результаты численных расчетов и не изучались погрешности этого приближения. В низших порядках  $P_N$ -и  $B_N$ -транспортного приближения расчеты выполнены в работе [3], где получена пространственная зависимость дисперсии импульса  $D[t(z, u)]$ , отрицательная для водорода при некоторых значениях  $(z, u)$ , что возможно лишь при отрицательной плотности столкновений в некоторой области фазового пространства  $\{z, u, t\}$ . Авторы работы [3] объяснили нефизичность результатов использованием транспортного приближения.

Покажем, что использование транспортного приближения — не причина нефизичности результата. Рассмотрим чисто водородный замедлитель: транспортное приближение является наиболее грубым для водорода, поскольку угловые моменты точной индикатрисы рассеяния, определенные на всем интервале замедления, заменяются «точечными» формами (2). Вид функции  $W_0(u' | u)$  для водорода позволяет решить уравнение переноса точно, благодаря чему погрешность решения будет погрешностью собственно транспортного  $P_N$ -или  $B_N$ -приближения.

Для специального вида зависимости  $\lambda(u) = \lambda_0 \exp(-u/2)$  в  $P_1$ -транспортном приближении получаем

$$\psi(z, u, \mu) = \frac{\exp(-z_0)}{8\lambda_0} [1 + z_0 + 3\mu z_0 \exp(-u/2)], \quad z_0 = z/\lambda_0. \quad (4)$$

Это решение имеет область нефизичности, определяемую неравенством

$$-1 \leq \mu \leq -\frac{\exp(u/2)}{3} \left(1 + \frac{1}{z_0}\right). \quad (5)$$

При больших  $u$  и малых  $z_0$  неравенство (5) не имеет решения, а при  $u = 0$  и при  $z_0 = 1$  уже для  $\mu < -2/3$  функция (4) становится отрицательной.

При той же зависимости  $\lambda(u)$  решение может быть получено и без приближения (2):

$$\psi(z, u, \mu) = \frac{\sqrt{3}}{16\lambda_0} e^{-z_0} [(1 + z_0 + z_0^2)(1 - e^{-u}) + 4z_0 e^{-u} + \sqrt{3} \mu z_0 e^{-u/2} (4 - u + uz_0)].$$

При  $u = 0$  это решение становится отрицательным на любых расстояниях, если  $\mu < -1/\sqrt{3} \approx -0,58$ . Таким образом, транспортное приближение само по себе не является причиной отрицательной плотности столкновений. Носителем нефизических решений является область фазового пространства, соответствующая обратному рассеянию нейтронов без изменения энергии ( $u = 0, \mu < 0$ ) вместе с некоторой ее окрестностью, добавляющейся из-за непрерывности решения (решение оказывается отрицательным там, где оно должно быть нулевым). Эта погрешность исправляется выделением сингулярной части решения (нерассеянное излучение), что значительно усложняет численный алгоритм [6]. Считая выделение нерассеянного излучения резервом повышения точности (при малых летаргиях), оставим формализм транспортного приближения без изменений.

**Улучшение транспортного приближения.** В транспортном приближении анизотропно рассеянные нейтроны имеют относительно высокую вероятность удалиться на большие расстояния, что ослабляет пространственную зависимость плотности столкновений. Эта погрешность может быть устранена уменьшением среднего косинуса угла рассеяния (по сравнению с точным). Естественным критерием для нахождения исправленного значения  $\bar{\mu}_0(u)$  служит условие совпадения вторых пространственных моментов — точного и вычисленного в транспортном приближении.

Вычисляя  $\bar{z}^2$  по распределению (4), находим

$$\bar{z}_{tr}^2 = 4\lambda_0^2/3 (1 - \bar{\mu}_0). \quad (6)$$

Для модельной зависимости  $\lambda(u) = \lambda_0 \exp(-u/2)$  точное выражение (Э. Ферми)

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 = & \frac{2}{3} \left[ \lambda^2(0) + \int_0^u \lambda^2(u') du' + \lambda(0) \int_0^u \lambda(u') \times \right. \\ & \times \exp(-u'/2) du' + \\ & + \int_0^u \lambda(u') du' \int_0^{u'} \lambda(u'') \exp\left(-\frac{u'-u''}{2}\right) du'' + \\ & + \lambda^2(u) + \lambda(0) \lambda(u) \exp(-u/2) + \\ & \left. + \lambda(u) \int_0^u \lambda(u') \exp\left(-\frac{u-u'}{2}\right) du' \right] \end{aligned}$$

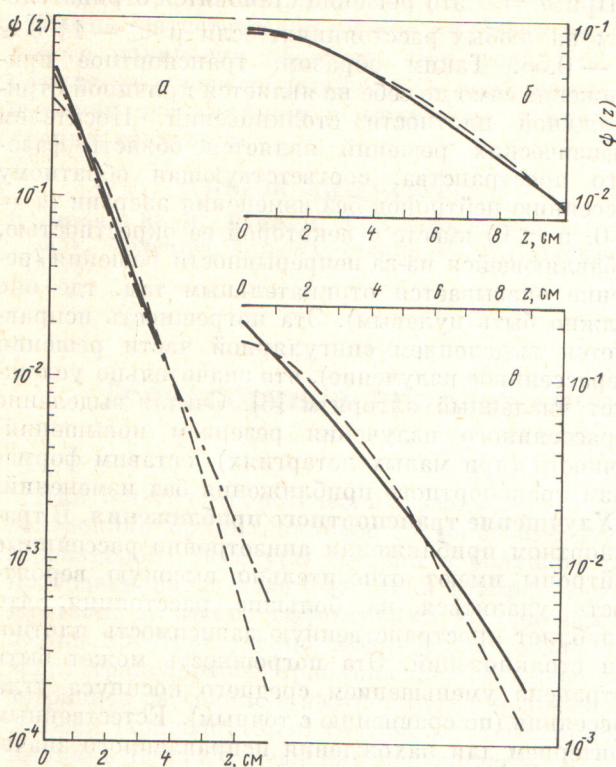
дает следующий результат:

$$\bar{z}^2 = (2\lambda_0^2/3) (4 - e^{-u}). \quad (7)$$

Из условия совпадения выражений (6) и (7) находим

$$\bar{\mu}_0(u) = \frac{2 - e^{-u}}{4 - e^{-u}} = \begin{cases} 1/2, & \text{если } u = \infty, \\ 1/3, & \text{если } u = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для постоянных сечений это же условие приводит



Р и с. 1. Пространственное распределение плотности столкновений нейтронов в водороде (сравнение транспортных приближений различного порядка) при  $u = 0$  (а),  $u = 12$  (б) и  $u = 3$  (в): —, — — — и — · — —  $B_1$ ,  $P_1$  и  $P_3$ -приближения соответственно

к соотношению

$$\bar{\mu}_0(u) = \frac{2u + e^{-u/2}}{2 + 3u + e^{-u/2}} = \begin{cases} 2/3, & \text{если } u = \infty, \\ 1/3, & \text{если } u = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Для реального сечения водорода (при его плотности в воде)

$$\lambda(E) = 3,28 + 1,44E - \frac{2,17}{E + 0,855} \quad (E \text{ в МэВ, } \lambda \text{ в см}).$$

это выражение приводит к очень громоздким интегралам, поэтому воспользуемся приближенной зависимостью. Выберем две модельные зависимости  $\lambda_{1,2}(u)$ , мажорирующие реальную:

$$\lambda_2(u) = 0,74 + 16,88e^{-u} \leq \lambda(u) \leq \lambda_1(u) = 0,74 + 16,88e^{-u/2}.$$

Вычисляя  $(\bar{\mu}_0)_{1,2}$  и соответствующие  $\lambda_{1,2}(u)$ , обнаруживаем, что в интервале летаргий  $0 \leq u \leq 20$  найденные зависимости ограничивают сверху и снизу выражение для  $\bar{\mu}_0$ , соответствующее сечению типа  $1/v$ , которым воспользуемся в дальнейших расчетах.

**Расчет распределения нейтронов в водороде.** Задача о замедлении нейтронов в водороде является хорошим тестом для проверки различных аналитических и численных методов и имеет извест-

ную практическую ценность. В выполненных ранее исследованиях [8, 9] наиболее детально изучены задачи с постоянной длиной свободного пробега нейтронов. Нами рассчитана функция  $\phi(z, u, \mu)$  для значения  $\bar{\mu}_0$  согласно выражению (9), соответствующего постоянным сечениям рассеяния в нечетных  $P_N$ - и  $B_N$ -приближениях различного порядка (рис. 1). Анализ численных результатов позволяет установить:

$P_N$ - и  $B_N$ -транспортные приближения сходятся с ростом  $N$ , причем к одному и тому же результату; сходимость  $P_N$ -приближений более медленная, чем  $B_N$ -приближений (результат  $B_1$ -приближения практически не отличается от результатов  $B_2$ -,  $B_3$ -приближений и др. Результат  $P_1$ -приближения значительно отличается от результатов  $P_3$ - и  $P_5$ -приближений и только в  $P_5$ -приближении полностью совпадает с результатами  $P_7$ - и  $B_1$ -приближений);

сходимость  $P_N$ -приближений при больших летаргиях более быстрая, чем при малых (на рис. 1 результаты  $P_1$ -приближения практически не отличаются от результатов  $B_1$ -приближения);

изучение сходимости по угловой координате приводит к тем же выводам;

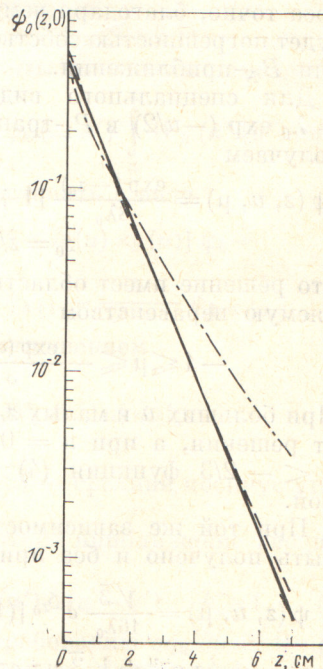
интегралы обращения в  $P_N$ -приближениях сходятся значительно быстрее, чем в  $B_N$ -приближениях (расчет в  $P_5$ -приближении требует в 3 раза меньше машинного времени, чем в  $B_1$ -приближении при полностью совпадающих числовых значениях).

Выясним, сходятся ли эти приближения к точному результату. Из точных результатов в рассматриваемой задаче можно привести лишь один: независимо от характера энергетической зависимости сечений рассеяния

$$\lim_{u \rightarrow 0} \phi_0(z, u) = \frac{1}{2\lambda_0} \exp(-z_0). \quad (10)$$

На рис. 2 приведено распределение (10) в сравнении с результатом  $B_1$ -приближения. Согласие

Р и с. 2. Плотность столкновений нейтронов в водороде при начальной летаргии. Сравнение точного результата (—) с модифицированным (— — —) и обычным (— · —) транспортными приближениями



можно считать весьма хорошим, особенно в сравнении с результатом  $B_1$ -приближения со значением  $\bar{\mu}_0 = 2/3$ . Результаты сопоставления с аналитическими аппроксимациями [9] при  $u > 0$  не уступают по точности приведенному на рис. 2.

При малых летаргиях угловое распределение сильно анизотропно, и с ростом расстояния анизотропия усиливается. Для более высоких летаргий увеличение анизотропии с ростом  $z$  менее значительно, но рост ее сохраняется. По данным работы [8] при всех летаргиях с ростом  $z$  угловая зависимость стремится к  $\delta$  ( $\mu = 1$ ). На рис. 3, а показана зависимость отношения  $\psi(z, u, 1)/\psi_0(z, u)$ , которое характеризует степень анизотропии рассеянного потока нейтронов, от  $z$  при разных  $u$ .

При переходе к реальным сечениям все выводы о сходимости транспортных  $P_N$ - и  $B_N$ -приближений, полученные при изучении варианта с постоянными сечениями, полностью сохраняются. Сопоставлением с расчетами методом Монте-Карло установлено, что функция  $\psi_0(z, u)$  воспроизводится транспортным приближением также хорошо при всех значениях летаргии.

Изменение характера энергетической зависимости сечений сильно влияет на пространственное и угловое распределение нейтронов. Функция  $\psi_0(z, u)$ , начиная с  $u \approx 3$ , перестает зависеть от летаргии, так как после трех-четырёх столкновений нейтрон переходит в область летаргии с  $u > 3$  и последующие его пробеги (в силу их малости по сравнению с предыдущими) практически не изменяют пространственного распределения нейтронов. Угловые распределения с увеличением  $z$  и  $u$  очень быстро становятся изотропными (см. рис. 3, б). Объясняется это тем, что после трех-четырёх столкновений нейтрон практически прекращает пространственные перемещения и все последующие столкновения только сглаживают угловую зависимость. В случае же постоянных сечений нейтроны с  $\mu \approx 1$  при любых летаргиях равным образом удалялись бы от источника, усиливая анизотропию на больших расстояниях; нейтроны с  $\mu \approx -1$  приближались бы к источнику, уменьшая начальную анизотропию на малых расстояниях.

Недостатки  $P_N$ -приближений низших порядков в задачах глубокого проникновения обычно связывают с тем, что на больших расстояниях от источника распределение рассеянных нейтронов должно быть сильно анизотропным и не может быть описано малым числом членов разложения по сферическим гармоникам. Это представление было проверено на наиболее простом, на первый взгляд, случае постоянных сечений и привело к сильно заниженным значениям плотности потока нейтронов. Как показывает наш анализ, именно при постоянном сечении (случай весьма далекий от действительности) предъявляются наиболее

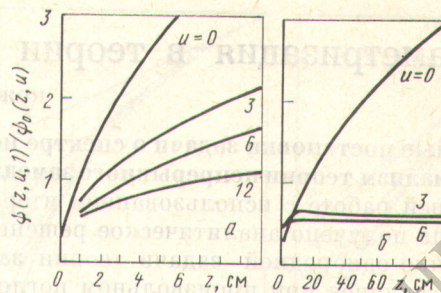


Рис. 3. Пространственная зависимость угловой анизотропии плотности столкновений нейтронов при различных летаргиях для постоянного (а) и реального (б) сечений

жесткие требования к качеству метода расчета. Реально угловое распределение нейтронов с увеличением летаргии может довольно быстро стать почти изотропным практически на всех расстояниях [10], и даже  $P_1$ -приближение в этом случае дает удовлетворительный результат.

**Выводы.** Нефизические решения, полученные в работе [3], не есть результат транспортного приближения и не должны считаться присущим ему недостатком. Недостаток транспортного приближения, заключающийся в более слабой пространственной зависимости плотности потока нейтронов (завышении  $\bar{z}$ ), может быть эффективно исправлен соответствующим переопределением среднего косинуса угла рассеяния. Предельное распределение, к которому сходятся транспортные приближения, хорошо воспроизводит нулевую угловую гармонику плотности столкновений при всех значениях летаргии. Характер энергетической зависимости сечений взаимодействия сильно влияет на свойства функции распределения, что в ряде задач позволяет применять  $P_N$ -приближения низших порядков.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширков Д. В. — В кн.: Физика и теплотехника реакторов. М., Атомиздат, 1958, с. 15.
2. Бергельсон Б. Р., Суворов А. П., Торлин Б. З. Многогрупповые методы расчета защиты от нейтронов. М., Атомиздат, 1970.
3. Diamond D., Yip S. — Nucl. Sci. Engng, 1970, v. 40, p. 460.
4. Stacey W. — Ibid., 1970, v. 44, p. 457.
5. Кожевников Д. А., Хавкин В. С., Велижанин В. А. — Атомная энергия, 1973, т. 34, вып. 4, с. 283.
6. Кожевников Д. А., Пшеничнюк А. И. — В кн.: Математическое моделирование в ядерной геофизике. Уфа, изд. Башк. филиала АН СССР, 1979, с. 22.
7. Кожевников Д. А., Насибуллаев Ш. К. — Докл. АН СССР, 1972, т. 205, № 6, с. 1320.
8. Inerney J. — Nucl. Sci. Engng, 1965, v. 22, p. 215.
9. Amster H., Cheuk Chan K. — Ibid., 1976, v. 61, p. 388.
10. Кожевников Д. А. — Атомная энергия, 1964, т. 17, вып. 1, с. 34.

Поступила в Редакцию 08.01.81