Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 3(30), 2005

УДК 512

Гомельская школа по мультипликативным сетям массового обслуживания. История и основные результаты

Ю. В. Малинковский, О. В. Якубович

Начало развития исследований по теории вероятностей и математической статистике в Республике Беларусь связано с приглашением в 1974 году профессора Геннадия Алексеевича Медведева на должность заведующего открывшейся кафедры теории вероятностей и математической статистики Белорусского государственного университета. Им создана известная белорусская вероятностная школа, включающая такие направления исследований, как теория массового обслуживания, теория случайных процессов, многомерный статистический анализ, теория стационарных процессов и временных рядов, финансовая и актуарная математика и др. Широкую известность в мире получила Белорусская школа по теории массового обслуживания, которая регулярно проводится в виде тематических международных конференций начиная с 1985 года в разных областных центрах республики. 17-ая конференция, под названием "Современные математические методы анализа и оптимизации телекоммуникационных сетей" проводилась в Гомельском государственном университете им. Ф.Скорины 23 — 25 сентября 2003 года. Последняя, 18-ая конференция, прошла в конце февраля 2005 года в Минске.

19 февраля 1980 года в Вильнюсском государственном университете им.В.Капсукаса ученик Г.А.Медведева Юрий Владимирович Малинковский защитил диссертацию "Стационарное функционирование приоритетных систем массового обслуживания" на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Он продолжал исследования в том же направлении вплоть до 1984 года. В это время к нему обратился ассистент кафедры математических проблем управления Евгений Аркадьевич Ковалев, у которого возникли трудности в решении задач по сетям массового обслуживания. Кардинальная смена тематики исследований (переход от исследования систем массового обслуживания к исследованию более сложных образований — сетей массового обслуживания) Ю.В.Малинковским оказалась весьма плодотворной в научном плане. Мало того, что была оказана определенная помощь в подготовке кандидатской диссертации Е.А.Ковалеву, но, что более важно, мультипликативные сети обслуживания оказались настоящим "клондайком" в поиске фундаментальных результатов по стационарным распределениям многомерных марковских процессов. Именно в теории сетей массового обслуживания возникло понятие квазиобратимости (Мюнтц, Келли), существенно расширяющее концепцию обратимости, исследованной А.Н.Колмогоровым и Дж.Ф.С. Кингмэном, и имеющее определяющую роль в характеризации мультипликативности стационарного распределения многомерного марковского процесса.

12 марта 1992 года в Томском государственном университете им. В.В.Куйбышева Ю.В.Малинковский защитил диссертацию "Мультипликативность инвариантного распределения в марковских сетях обслуживания" на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. После восстановления специализации "Теория вероятностей и математическая статистика" на математическом факультете ГГУ начинается интенсивная научная работа со студентами, а затем и аспирантами. Первыми аспирантами явились Александр Владимирович Крыленко и Оксана Владимировна Якубович. Приведем перечень защищенных диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по мультипликативным сетям массового обслуживания.

1. Ковалев Евгений Аркадьевич — "Факторизация стационарного распределения в сетях массового обслуживания"(7 июня 1988 г. в Совете Д 061.01.06 при Вильнюсском государственном университете им. В.Капсукаса);

2. Крыленко Александр Владимирович — "Стационарное функционирование сетей с обходами и несколькими классами заявок"(18 ноября 1998 г. в Совете Д 02.01.08 при БГУ; защита состоялась в конце 2-го года обучения в аспирантуре);

3. Якубович Оксана Владимировна — "Стационарное распределение вероятностей состояний сетей обслуживания с обходами" (14 января 2000 г. в Совете Д 02.01.08 при БГУ);

4. Евдокимович Владислав Евгеньевич — "Стационарное распределение сетей обслуживания с характеристиками обслуживания и маршрутизации, зависящими от их состояния"(23 мая 2003 г. в Совете Д 02.01.07 при БГУ);

5. Довженок Татьяна Степановна — "Инвариантность стационарного распределения в сетях с нетрадиционными механизмами обслуживания и маршрутизации"(23 мая 2003 г. в Совете Д 02.01.07 при БГУ);

6. Кравченко Светлана Витальевна — "Стационарное распределение состояний сетей обслуживания с отрицательными заявками и обходами" (27 июня 2003 г. в Совете Д 02.01.07 при БГУ);

7. Тюриков Михаил Юрьевич — "Мультипликативность стационарного распределения марковских сетей обслуживания с многоадресной и динамической маршрутизациями"(19 марта 2004 г. в Совете Д 02.01.07 при БГУ);

8. Нуеман Абдул-Рахман Юсеф (Сирия) — "Инвариантная мера марковских процессов в сетях с многорежимными стратегиями обслуживания"(19 марта 2004 г. в Совете Д 02.01.07 при БГУ)).

Гомельская школа по мультипликативным сетям массового обслуживания поддерживает устойчивые научные связи со многими учеными БГУ, Института математики АН РБ, ГрГУ, Мозырского педуниверситета и многими другими. Вместе с БГУ и ГрГУ проводятся научные исследования по двум пятилетним программам государственных фундаментальных исследований.

Благодаря регулярным Белорусским школам-семинарам по теории массового обслуживания, в которых гомельчане принимали и принимают активное участие (в том числе в качестве членов оргкомитета), у нас сложились самые тесные связи с ведущими учеными стран СНГ и Балтии. Мы поддерживаем научные контакты с учеными МГУ им. М.В.Ломоносова, Российского университета дружбы народов, Института проблем передачи информации (Москва), Томского государственного университета, Нижегородского государственного университета, Петрозаводского государственного университета, Вильнюсского государственного университета, Киевского национального университета и многими другими (Рига, Винница, Ереван и т.д.).

Перейдем к основным результатам Гомельской научной школы по мультипликативным сетям массового обслуживания.

1. Условия мультипликативности инвариантных мер марковских сетевых процессов массового обслуживания

1.1. Заявко-сохраняющие сети

Первый результат, связанный со стационарным распределением сетей массового обслуживания, был получен Ю.В.Малинковским в [1]. Он интересен тем, что для очень частной замкнутой двухузловой сети с двумя типами заявок и абсолютным приоритетом для заявок первого типа найдено стационарное распределение вероятностей состояний, не имеющее мультипликативной формы.

В работах [2–8] рассматриваются открытые и (или) замкнутые заявкосохраняющие сети, состоящие из N узлов. В открытые сети поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ, а каждая из них направляется в i-й узел с вероятностью p_{0i}, $(\sum\limits_{j=1}^{N} p_{0j} = 1, \ \ i = \overline{1,N})$, $p_{00} = 0$. Заявка, обслуженная в i-м узле, с вероятностью p_{ij} переходит в j-й узел, а с вероятностью p_{i0} уходит из сети $(\sum\limits_{k=0}^{N} p_{ik} = 1, \ \ i,j = \overline{1,N})$. Параллельно рассматриваются аналогичные замкнутые сети с K заявками, для которых $\lambda = 0$, $p_{0i} = p_{i0} = 0$. Матрица маршрутизации (p_{ij}) $(i,j = \overline{0,N}$ для открытых и $i,j = \overline{1,N}$ для замкнутых сетей) предполагается неприводимой. Пусть $\lambda\varepsilon_i$ — средняя интенсивность поступления заявок в i-й узел, которая удовлетворяет уравнениям трафика

$$\varepsilon_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j p_{ji}, \qquad i = \overline{1,N}, \tag{1.1}$$

для открытой сети и уравнениям трафика

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j p_{ji}, \qquad i = \overline{1,N}, \tag{1.2}$$

для замкнутой сети. Неприводимость матрицы маршрутизации гарантирует существование единственного положительного решения (1.1) и единственного с точностью до постоянного множителя решения (1.2). Состояние сети описывается неприводимым марковским процессом $\{x(t), \ \ t \geq 0\}$ с пространством состояний X, где для открытой сети $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$, а для замкнутой сети X — подмножество этого прямого произведения, характеризующееся постоянным числом заявок K. Здесь X_i — пространство состояний i-й координаты $x(t)$ и одновременно пространство состояний изолированного i-го узла в фиктивной случайной среде, характеризующейся пуассоновским входным потоком с интенсивностью $\lambda\varepsilon_i$.

В [2,3] впервые рассмотрены сети массового обслуживания, в узлах которых могут находится резервные приборы. В [2] исследована следующая сеть с симметричными резервными каналами. В узлах сети находятся по два симметричных экспоненциальных прибора с интенсивностями обслуживания μ_{i1} и μ_{i2} для i-го узла. Если поступающая в i-й узел заявка не застает в нем других заявок, то с вероятностью $p_i^{(1)}$ она занимает первый прибор и тогда второй прибор становится резервным, а с вероятностью $p_i^{(2)}$ — второй прибор, и тогда резервным становится первый прибор $(p_i^{(1)} + p_i^{(2)} = 1)$. Пока в i-м узле число заявок меньше n_i, резервный прибор не подключается и работает основной прибор. Как только число заявок в узле достигает n_i, подключается резервный прибор. Если в момент окончания обслуживания одним из двух работающих приборов число заявок в узле становится $n_i - 1$, то обслуживающий прибор переходит в резерв. Порядок обслуживания внутри узла произвольный. Обозначим через $X_i = \{0; \ (k,1),(k,2), \ k = \overline{1, n_i - 1}; \ n_i, n_i+1, \ldots\}$ — множество состояний i-го узла для открытой сети и $X_i = \{0; \ (k,1),(k,2), \ k = \overline{1,K}$ при $n_i > K$ и $X_i = \{0; \ (k,1),(k,2), \ k = \overline{1, n_i - 1}; \ n_i, n_i+1, \ldots, K\}$ при $n_i \leq K$ — множество состояний i-го узла для замкнутой сети. Здесь состояние 0 означает, что в i-м узле нет заявок, состояние (k,ν) — что в

i-м узле k заявок и работают лба прибора. Состояние сети характеризуется вектором $x - (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, где $x_i \in X_i$ — состояние i-го узла ($i = \overline{1, N}$).

Пусть $\rho_i = \frac{\lambda e_i}{\mu_{i1}+\mu_{i2}} < 1$, $i = \overline{1, N}$, в случае открытой сети, что гарантирует эргодичность. Назовем i-й узел терминальным или оконечным, если $p_{i0} + p_{ii} = 1$, $p_{i0} > 0$. Основной результат [2] содержится в следующих теоремах.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы в открытой сети стационарное распределение вероятностей состояний имело мультипликативную форму*

$$p(x) = p_1(x_1)p_2(x_2)\ldots p_N(x_N), \tag{1.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы в нетерминальных узлах выполнялось условие

$$p_i^{(1)} = \frac{\mu_{i1}^{n_i-2}}{\mu_{i1}^{n_i-2} + \mu_{i2}^{n_i-2}}; \quad p_i^{(2)} = \frac{\mu_{i2}^{n_i-2}}{\mu_{i1}^{n_i-2} + \mu_{i2}^{n_i-2}}. \tag{1.4}$$

Выходящие из сети потоки заявок в нетерминальных узлах являются пуассоновскими и независимыми, а $p_i(x_i)$ — стационарные вероятности состояний изолированного узла, помещенного в фиктивную случайную среду.

Отметим, что этот результат был первым, в котором были получены не только достаточные, но необходимые и достаточные условия мультипликативности стационарного распределения в терминах изолированных узлов, помещенных в фиктивную случайную среду.

Теорема 1.2. *Для того, чтобы в замкнутой сети стационарное распределение вероятностей состояний имело мультипликативную форму*

$$p(x) = C(N, K)p_1(x_1)p_2(x_2)\ldots p_N(x_N), \tag{1.5}$$

достаточно, чтобы во всех узлах выполнялось условие (1.4).

В [3] теоремы 1.1 и 1.2 распространены на иные типы узлов с резервными приборами. В первом случае в i-м узле находится два идентичных прибора, один из которых резервный. Время обслуживания каждым из них имеет показательное распределение с параметром μ_i. Для резервного прибора выбрана следующая дисциплина включения. Пусть k_i — число заявок в i-м узле. Тогда, если $m_i \le k_i \le n_i$ и резервный прибор не работает, при поступлении очередной заявки с вероятностью $q_i(k_i)$ включается резервный прибор и с вероятностью $1 - q_i(k_i)$ обслуживание продолжается одним прибором, причем $q_i(n_i) = 1$. При $0 \le k_i \le m_i$ обслуживание осуществляется одним прибором, а при $k_i > n_i$ работают оба прибора.

Если обслуживание производится двумя приборами, то в момент окончания обслуживания очередной заявки при $m_i + 1 \le k_i \le n_i + 1$ с вероятностью $q_i^*(k_i)$ один из приборов отключается, становясь резервным, и с вероятностью $1 - q_i^*(k_i)$ продолжают обслуживать оба прибора, причем $q_i^*(m_i + 1) = 1$.

При соответствующем выборе пространства состояний выполняются теоремы 1.1 и 1.2, в которых вместо условия (1.4) фигурирует условие

$$q_i^*(k_i + 1) = \frac{2^{k_i - m_i} q_i(k_i) \prod\limits_{s=m_i}^{k_i-1} (1 - q_i(s))}{\sum\limits_{l=0}^{k_i-m_i} 2^l q_i(m_i + l) \prod\limits_{s=m_i}^{m_i+l-1} (1 - q_i(s))}, \quad k_i = \overline{m_i, n_i}; \quad i = \overline{1, N}.$$

Во втором случае теоремы 1.1 и 1.2 распространяются на неидентичные приборы в узлах.

В [4] результаты работ [2, 3] обобщаются на сети, в которых изолированный узел описывается в достаточной мере произвольным марковским многомерным случайным блужданием по точкам с целочисленными координатами. В k-м узле формируется m_k очередей, так что его состояние характеризуется вектором $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(m_k)})$, где $x_k^{(s)}$ — число заявок в s-й очереди k-го узла ($s = \overline{1,k}$). Заявка, попадающая в k-й узел, с вероятностью $r_k^{(s)}(x_k)$, зависящей от состояния узла в момент ее прихода, становится в s-ю очередь, причем $\sum\limits_{s=1}^{m_k} r_k^{(s)}(x_k) = 1 \quad (k = \overline{1,N})$. Времена обслуживания заявок в очередях не зависимы, не зависят от процесса поступления и имеют показательное распределение. Переход s-й очереди из состояния $x_k^{(s)} > 0$ в состояние $x_k^{(s)} - 1$ происходит с интенсивностью $\mu_k^{(s)}(x_k) \geq 0$, причем $\mu_k^{(s)}(x_k) \equiv 0$ при $x_k^{(s)} = 0$. Теоремы 1.1 и 1.2 при соответствующем выборе пространства состояний остаются в силе, при этом условие (1.4) заменятся условием квазиобратимости

$$\sum_{s=1}^{k} [\mu_k^{(s)}(x_k) p_k(x_k) - \lambda \varepsilon_k r_k^{(s)}(x_k - e_s) p_k(x_k - e_s)] 1_{\{x_k^{(s)} \neq 0\}} = 0;$$

$$\lambda \varepsilon_k p_k(x_k) = \sum_{s=1}^{k} \mu_k^{(s)}(x_k + e_s) p_k(x_k + e_s).$$

Рассмотрим заявко-сохраняющую сеть массового обслуживания с абстрактным описанием состояний узлов и сети: пусть $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$ — состояние сети, $x_i(t)$ — состояние i-го узла в момент t, N — количество узлов; $\{p(x), \quad x \in X\}$ — стационарное распределение $x(t)$. Пусть также $\{A_i(t), \quad D_i(t), \quad t \geq 0\}$ — точечные процессы поступления и ухода заявок для изолированного i-го узла сети, помещенного в фиктивную случайную среду, $\tilde{x}_i(t)$ — состояние такого узла в момент t. Узел i называется **квазиобратимым**, если $\sigma\{A_i(s) - A_i(t), \quad s \geq t\}, \quad \tilde{x}_i(t),$ и $\sigma\{D_i(s), \quad s \leq t\}$ независимы.

Существенное значение в теории мультипликативных сетей имеет

Теорема Келли. *Если все узлы в сети квазиобратимы, то*

$$p(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \ldots p_N(x_N), \tag{1.6}$$

где $p_i(x_i)$ зависит только от состояния i-го узла.

Для открытых сетей в [5] этот результат был усилен следующим образом.

Теорема 1.3. *Для того, чтобы в случае открытой сети стационарное распределение марковского процесса $\{x(t), \quad t \geq 0\}$ представлялось в форме произведения (1.6), где $p_i(x_i)$ зависит только от состояния i-го узла, необходимо и достаточно, чтобы нетерминальные узлы являлись квазиобратимыми. При этом $\{p_i(x_i), \quad x_i \in \in X_i\}$ — стационарное распределение изолированного узла в фиктивной окружающей среде. Выходящие из сети потоки на квазиобратимых узлах независимы и пуассоновы.*

Этот результат стал возможным благодаря тому, что автором [5] была выбрана "система координат", отличная от принятой западными учеными. Если в работах Келли, Уолрэнда и др. производилось разбиение по множествам переходов, соответствующих поступлениям, уходам и внутренним переходам, то в работах гомельских ученых производилось разбиение интенсивностей перехода на частичные интенсивности. Если западные ученые “склеивали” изолированные узлы в сеть, то гомельчане “изолировали” узлы из сети. При нашем подходе все выкладки становятся более прозрачными и в несколько раз укорачиваются. Например, доказательство теоремы Келли становится раза в четыре короче. Значительно позже Чао и Миязава применили аналогичный подход в более общем случае, когда узлы сети не являются заявко-сохраняющими; теперь большинство западных ученых перешли на него.

В [6] теорема 1.3 обобщена на открытые сети с несколькими типами заявок. Однако здесь пришлось наложить довольно жесткое ограничение на матрицу маршрутизации.

В [7] приведен пример, показывающий, что для замкнутых сетей аналог теоремы 1.3: $p(x) = C(N, M)p_1(x_1)p_2(x_2)\ldots p_N(x_N)$ тогда и только тогда, когда узлы сети квазиобратимы, не выполняется. Построен критерий мультипликативности, по структуре похожий на теорему 1.3, налагающий условия мультипликативности не на сеть, а на целый класс сетей. Этот результат несколько искусственный. Поэтому в [8] для замкнутых сетей ослабляются условия в теореме Келли и вместо квазиобратимости узлов вводится так называемая ограниченная квазиобратимость. Интересно, что следствием этого результата оказалось ослабление условий одного из 4 пунктов классической BCMP-теоремы.

1.2. Заявко-несохраняющие сети

Для начала приведем описание базового класса марковских сетей массового обслуживания и введем необходимые обозначения. Будем рассматривать открытые сети, описываемые марковскими процессами, с конечным множеством узлов M. Для удобства внешний источник будем считать узлом 0, причем $0 \in M$. Узлы являются экспоненциальными общего вида, их состояния произвольны и образуют не более чем счетные множества X_i. Сеть описывается вектором состояний узлов. Поведение узлов задается интенсивностями переходов $q_i^s(x_i, y_i)$, где s принимает значение d для уходов заявок из узла, i — для внутренних переходов и a — для поступлений заявок в узел. Так как процесс поступления на узел в сети зависит от всей сети, то вместо q_i^a будем рассматривать вероятности переходов p_i^a при условии поступления. Допускаются переходы из состояния в него же. Узлы склеены в сеть таким образом, что заявка, покидающая узел i, с вероятностью p_{ij} поступает на узел j. Для получения марковского процесса изолированного узла достаточно определить процесс поступления (так называемую фиктивную окружающую среду). Интенсивности выхода из состояния x_i определяются как $q_i(x_i) = \sum_{y_i} q_i(x_i, y_i)$, $x_i \in X_i$. Считая $p_i(x_i)$ стационарным распределением изолированного узла i, введем функционал, дающий интенсивности процесса с обращенным временем:

$$\tilde{q}_i(x_i) = \sum_{y_i} p_i(y_i) q_i(y_i, x_i) p_i(x_i)^{-1}, \quad x_i \in X_i,$$

и функционал, дающий средние значения:

$$\overline{q_i} = \sum_{x_i, y_i} p_i(x_i) q_i(x_i, y_i) = \sum_{x_i} p_i(x_i) q_i(x_i) = \sum_{x_i} p_i(x_i) \tilde{q}_i(x_i), \quad x_i \in X_i.$$

Все $\overline{q_i}^d$ и $\overline{q_i}^i$ предполагаются конечными, а все $\overline{p_i}^a = 1$.

В работе [9] исследуется мультипликативность вышеуказанного базового класса сетей. Внешний источник является пуассоновским. Ю.В. Малинковский доказал, что если стационарное распределение сети имеет мультипликативную форму

$$p(x) = \prod_i p_i(x_i), \qquad x \in X, \tag{1.7}$$

то $p_i(x_i)$ является стационарным распределением изолированного узла i. При этом фиктивное окружение характеризуется пуассоновским входящим потоком и обратной связью, то есть, строго говоря, на узел поступает пуассоновский поток с параметром α_i, а уходящая из него заявка с вероятностью p_{ii} поступает снова на вход. α_i находятся из уравнений трафика

$$\alpha_i = \sum_{j \neq i} \overline{q_j}^d p_{ji}, \qquad i \in M. \tag{1.8}$$

Уравнения равновесия такого изолированного узла имеют вид

$$\alpha_i + q_i^d(x_i) + q_i^i(x_i) = \alpha_i \tilde{p_i}^a(x_i) + (1 - p_{ii})\tilde{q_i}^d(x_i) +$$
$$+ p_{ii} \sum_{y_i} p_i(y_i) {q_i}^d(y_i) p_i^a(y_i, x_i) p_i(x_i)^{-1} + \tilde{q_i}^i(x_i), \quad x_i \in X_i. \tag{1.9}$$

Широко известное условие квазиобратимости для таких узлов можно сформулировать как выполнение локального баланса вида $\tilde{q_i}^d(x_i) = \overline{q_i}^d, x_i \in X_i$. Для нахождения необходимых и в то же время достаточных условий в работе [9] накладываются следующее ограничение: узлы (кроме внешнего источника) являются стандартными. Стандартен узел, который обладает свойством

$$q_i^d(x_i) = q_i^i(x_i) = 0, \quad q_i^i(y_i, x_i) = p_i^a(y_i, x_i) = 0, \quad y_i \in X_i,$$

для всех состояний x_i, в которых число заявок в узле является нулевым. Существование таких состояний предполагается. Узел i назван нетерминальным, если $i \neq 0$ и $p_{ii} + p_{i0} < 1$. Основной результат работы [9] Ю.В. Малинковского заключается в следующем:

Теорема 1.4. *Пусть все узлы (кроме 0) стандартны и $\overline{q_i}^d \geq \alpha_i,\ i \neq 0$ (либо $\overline{q_i}^d \leq \alpha_i,\ i \neq 0$). Стационарное распределение сети $p(x)$ имеет форму (1.7) тогда и только тогда, когда все нетерминальные узлы заявко-сохраняющие (т.е. $\overline{q_i}^d = \alpha_i,\ i \neq 0$) и квазиобратимые, все $p_i(x_i)$ — стационарные распределения изолированных узлов (решения (1.9)) относительно α_i, а α_i и $p_i(x_i)$ удовлетворяют (1.8).*

Следующим серьезным шагом в исследовании мультипликативности является работа Х.Чао, М.Миязавы, Р.Серфозо и Х.Такады [10]. В отличие от работы Ю.В.Малинковского, ограничение стандартности узлов не накладывается, а внешний источник не обязательно пуассоновский. Таким образом охарактеризован весь подкласс мультипликативных сетей базового класса сетей массового обслуживания. В [10] доказан следующий критерий представимости в форме произведения:

Теорема 1.5. *Стационарное распределение сети $p(x)$ имеет форму (1.7) тогда и только тогда, когда $p_i(x_i)$ являются стационарными распределениями изолированных узлов относительно α_i и p_{ii} (то есть удовлетворяют (1.9)), а α_i и $p_i(x_i)$ таковы, что выполняется (1.8) и*

$$\left(\tilde{q_i}^d(x_i) - \overline{q_i}^d\right) p_{ij} \left(\tilde{p_j}^a(x_j) - 1\right) + \left(\tilde{q_j}^d(x_j) - \overline{q_j}^d\right) p_{ji} \left(\tilde{p_i}^a(x_i) - 1\right) = 0,$$
$$i \in M,\ \ j \in M \setminus \{i\},\ \ x_i \in X_i,\ x_j \in X_j. \tag{1.10}$$

Отметим, что фиктивная среда, естественно, осталась той же. Чао и другие заметили, что для выполнения (1.10) достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) Оба узла i и j квазиобратимы.

2) Оба узла i и j неэффективны по поступлению. Узел j неэффективен по поступлению, если $\tilde{p_j}^a(x_j) = 1,\ x_j \in X_j$.

3) Один из узлов i и j квазиобратим и неэффективен по поступлению одновременно.

Следствие 1.1. *Пусть $p(x)$ имеет форму (1.7), $p_{ij} \neq 0$ и $p_{ji} = 0$ для некоторых различных i и j и $\tilde{p}_j{}^a(x_j) \neq 1$ для некоторого x_j. Тогда узел j квазиобратим.*

Дальнейшая детализация условий теоремы 1.5 получена М.Ю. Тюриковым как следствие основного результата работы [11]. Изолированный узел i назван обладающим сетевым балансом, если $\tilde{q}_i{}^d(x_i) - \overline{q_i}^d = g_i\Big(\tilde{p}_j{}^a(x_j) - 1\Big), \quad x_i \in X_i$, для некоторого g_i. Квазиобратимость является сетевым балансом с $g_i = 0$. Введем следующие множества узлов: Ω - неэффективные по поступлению узлы, , и $S = \{j \in M: \ \forall j \in \Omega \setminus \{i\} \ p_{jj} = = 0\}$, B^+ и B^- - эффективные по поступлению узлы из S с сетевым балансом, где g_i имеет соответствующий знак, $B = B^+ \cup B^-$.

Теорема 1.6. *$p(x)$ имеет форму (1) тогда и только тогда, когда существуют α_i такие, что $p_i(x_i)$ являются стационарными распределениями узлов в изоляции относительно α_i и $p_i i$, выполняется (1.8) и следующие условия:*

1) каждый узел i обладает сетевым балансом либо $i \in S$;

2) $p_{ij} - 0 \quad (i,j) \in (B^- \times (\Omega \setminus B^+)) \cup (B^+ \times (\Omega \setminus B^-))$;

3) $g_i p_{ij} + g_j p_{ji} = 0, \ \ i \in B^-, \ j \in B^+$.

Для большей ясности условия 1-3 можно сформулировать так: каждый узел относится к одному из типов: 1) квазиобратим и неэффективен по поступлению; 2) квазиобратим и эффективен по поступлению; 3) не квазиобратим и неэффективен по поступлению; 4) не квазиобратим и эффективен по поступлению. Любой узел может слать заявки в неэффективные по поступлению узлы (тип 1 и 3) и получать от квазиобратимых (тип 1 и 2). Остальные межузловые переходы могут быть только между узлами типа 4 при условии, что для них вероятны обратные переходы, связанные узлы i и j имеют сетевые балансы разных знаков такие, что $g_i p_{ij} + g_j p_{ji} = 0$. При этом узлы типа 4 разбиваются на непересекающиеся неприводимые классы.

В работе [10] сформулирован алгоритм, вытекающий из основного результата (теоремы 1.5), который позволяет установить существование стационарного распределения в форме произведения и получить его, если оно существует. Алгоритм включает следующие шаги:

1) Для каждого узла i находим стационарные распределения изолированных узлов с обратной связью p_{ii} как функции от α_i. При этом получим $\overline{q_i}^d$ также в виде функции от α_i.

2) Находим $\alpha_i, \ \ i \in M$, из уравнений трафика (1.8).

3) Проверяем (1.10) для полученных α_i и $p_i(x_i)$.

Если все шаги завершаются успешно, то $p(x) = \prod\limits_i p_i(x_i)$ является стационарным распределением сети. Верно и обратное утверждение. На шагах 1 и 2 могут быть получены несколько решений, алгоритм работает для всех. Этот алгоритм детализирован с помощью теоремы 1.6 в [11]. Чао и другие в [10] показывают, что теорема 1.5 легко обобщается на сети с многотипными заявками. Для описания сетей со счетным множеством T типов заявок будем рассматривать аналогичные характеристики $q^d_{iu}(x_i, y_i), \ \ p^a_{iu}(x_i, y_i), \ \ \alpha_{iu}$ и p_{iujv}, где u и v обозначают типы заявок, которые ушли с узла (пришли на узел). Фиктивная окружающая среда в этом случае характеризуется входящими пуассоновскими потоками заявок различных типов и обратными связями, также зависящими от типов. Интенсивности переходов узла в изоляции принимают вид

$$q_i(x_i, y_i) = \sum_u \left[\alpha_{iu} p^a_{iu}(x_i, y_i) + \Big(1 - \sum_v p_{iuiv}\Big) q^d_{iu}(x_i, y_i)\right] +$$

$$+\sum_{z_i,u,v} q_{iv}^d(x_i,z_i)p_{iviu}p_{iu}^a(z_i,y_i)+q_i^i(x_i,y_i), \quad x_i,y_i \in X_i.$$

Аналог теоремы 1.5 можно сформулировать так:

Теорема 1.7. *$p(x)$ имеет форму (1.7) тогда и только тогда, когда $p_i(x_i)$ являются стационарными распределениями изолированных узлов относительно p_{iuiv} и α_{iu}, удовлетворяющих уравнению трафика $\alpha_{iu}=\sum_{j\neq i}\sum_{v}\overline{q_{jviu}}^d$, $i\in M$, $u\in T$, и*

$$\sum_{u,v}\Big[\Big(\tilde{q_{iv}}^d(x_i)-\overline{q_{iu}}^d\Big)p_{iujv}\Big(\tilde{p_{jv}}^a(x_j)-1\Big)+\Big(\tilde{q_{jv}}^d(x_j)-\overline{q_{jv}}^d\Big)p_{jviu}\Big(\tilde{p_{iu}}^a(x_i)-1\Big)\Big]=0,$$

$$i\in M,\ j\in M\setminus\{i\},\ x_i\in X_i,\ x_j\in X_j.$$

В работе М.Ю. Тюрикова [11] базовый класс сетей расширен за счет введения понятия многоадресной маршрутизации. Суть многоадресности в том, что заявка, уходящая из узла, приходит одновременно на некоторое подмножество узлов δ. Вместо маршрутных вероятностей p_{ij} рассматриваются $p_{i\delta}$. Суммирование по подмножествам существенно усложняет исследование. Фиктивная среда изолированного узла остается принципиально той же, однако обратная связь имеет вероятность $p_{ii}=\sum_{\delta\subset M:\, i\in\delta}p_{i\delta}$. С учетом этого равенства уравнение равновесия изолированного узла принимает вид (1.9). Кроме сетевого баланса, используется понятие расширенного сетевого баланса, которым узел i обладает в том случае, когда для некоторых a_i и b_i и всех $x_i\in X_i$

$$\sum_{y_i}p_i(y_i)\tilde{q}_i^{\,d}(y_i)p_i^a(y_i,x_i)p_i(x_i)^{-1}-\overline{q_i}^d(x_i)=a_i(\tilde{q}_i^{\,d}(x_i)-\overline{q_i}^d)+b_i(\tilde{p_j}^a(x_j)-1).$$

Если выполняется сетевой баланс, то a_i и b_i определяются неоднозначно, тогда мы будем полагать $a_i=0$. От остальных случаев неопределенности избавляемся, считая a_i и (или) b_i равными нулю. Кроме Ω, B, B^+ и B^-, определенных выше, введем следующие множества узлов: $R=\{i\in M;\ \forall\delta\in M\setminus\{i\}:\ \delta\cap\overline{\Omega}\neq\emptyset\ \ p_{i(\delta\cup\{i\}}=0$ или $\overline{q_i}^d=0\}$, E^+ (E^-) — узлы из $\overline{R}\cap\overline{\Omega}$ с расширенным сетевым балансом, где $b_i>0$ ($b_i<0$ соответственно), $E=E^+\cup E^-$, $S_i=\{i\in M:\ \forall\delta\in M\setminus\{i\}:\ \delta\cap\overline{\Omega}\neq\emptyset\ \ p_{i\delta}=0$ или $\overline{q_i}^d=0\}$, $U=\overline{\Omega}\setminus(E^-\cup B^-)$. Для краткости обозначим $p_{i\varepsilon\{\sigma\}}=\sum_{\sigma\subset\varepsilon}p_i(\varepsilon\cup\delta)$. М.Ю. Тюриков в [11] доказал следующий критерий для сетей с многоадресной маршрутизацией.

Теорема 1.8. *$p(x)$ имеет форму (1.7) тогда и только тогда, когда существуют α_i такие, что $p_i(x_i)$ являются стационарными распределениями узлов в изоляции относительно α_i и обратной связи $\sum_{\delta\subset M:\, i\in\delta}p_{i\delta}$, α_i удовлетворяют уравнения трафика*

$$\alpha_i=\sum_{j\neq i}\ \sum_{\delta\subset M:\, i\in\delta}\overline{q_j}^d p_{j\delta}, \qquad i\in M$$

и выполняются следующие условия:

1) каждый узел i имеет расширенный сетевой баланс или $i\in R$;

2) для всех i либо а) узел i имеет сетевой баланс, либо б) $i\in R\cap S$, либо в) $i\in R$ и $p_{i\varepsilon\{\Omega\setminus\{i\}\}}+a_ip_{i(\varepsilon\cup\{i\})\{\Omega\setminus\{i\}\}}=0$, $\varepsilon\subset\overline{\Omega}\setminus\{i\}:\ \varepsilon\neq\emptyset$;

3) $p_{i\delta}=0$, $i\in M:\ \overline{q_i}^d\neq 0$, $\delta\subset M:\ |(\delta\setminus\{i\})\cap U|\geq\varepsilon$;

4) $p_{i\delta}=0$, $i\in B^+\setminus E^-$, $\delta\subset M\setminus\{i\}:\ \delta\cap U\neq\emptyset$;

5) $p_{i(\delta\cup\{i\})}=0$, $i\in B^+\setminus B^-$, $\delta\subset M\setminus\{i\}:\ \delta\cap U\neq\emptyset$;

б) выполняется одно из следующих равносильных условий:

$$\sum_{i\in\Omega}\overline{q}_i^{\,d} p_{i\varepsilon\{\Omega\}} + \sum_{i\in\varepsilon\cap B} g_i p_{i(\varepsilon\setminus\{i\})\{\Omega\}} + \sum_{i\in\varepsilon\cap E} b_i p_{i\varepsilon\{\Omega\}} + \sum_{i\in\overline{\Omega}\setminus\{\varepsilon\}} \overline{q}_i^{\,d}\left(p_{i\varepsilon\{\Omega\}} + p_{i(\varepsilon\setminus\{i\})\{\Omega\}}\right) -$$

$$- \sum_{i\in(\overline{\Omega}\setminus\{\varepsilon\})\cap B} g_i p_{i\varepsilon\{\Omega\}} - \sum_{i\in(\overline{\Omega}\setminus\{\varepsilon\})\cap E} b_i p_{i(\varepsilon\cup\{i\})\{\Omega\}} = 0, \qquad \varepsilon\subset\overline{\Omega}:\ |\varepsilon|\ge 2,\ |\varepsilon\cap U|\le 1;$$

$$\sum_{i\in\overline{\varepsilon}}\overline{q}_i^{\,d}\sum_{\delta:\,\varepsilon\subset\delta} p_{i\delta} + \sum_{i\in\varepsilon\cap B} g_i \sum_{\delta:\,\varepsilon\subset\delta} p_{i(\delta\setminus\{i\})} + \sum_{i\in\varepsilon\cap E} b_i \sum_{\delta:\,\varepsilon\subset\delta} p_{i\delta} = 0, \qquad \varepsilon\subset\overline{\Omega}:\ |\varepsilon|\ge 2,\ |\varepsilon\cap U|\le 1.$$

Совершенно другое направление обобщения результата Чао и других [10] (то есть теоремы 1.5) предложено в работе М.Ю. Тюрикова [12]. Базовый класс сетей расширен за счет усложнения сетевого поведения сразу в двух плоскостях. Во-первых, маршрутные вероятности приобрели зависимость от вектора состояний. Эта так называемая динамическая маршрутизация задается с помощью $p_{ij}(x)$, где x — состояние сети, где учитывается переход в узле i, вызванный уходом заявки, и не учитывается реакция в узле j на поступление заявки. Во-вторых, допускаются мгновенные перемещения заявок. Иными словами, пришедшая в узел заявка (так называемый сигнал) с вероятностью $p_i^{ad}(x_i, y_i)$ вызывает переход $x_i \longrightarrow y_i$ и одновременный уход другой заявки (сигнала) из этого же узла. Таким образом, мгновенно происходит некоторое число последовательных перемещений заявок между узлами, производящих в этих узлах изменения. Конечность одновременных визитов предполагается. Для поступлений, не сопровождающихся одновременным уходом, будем использовать $p_i^{ai}(x_i, y_i) = p_i^a(x_i, y_i) = p_i^{ad}(x_i, y_i)$. Для таких сетей фиктивная среда изолированного узла характеризуется пуассоновским потоком с параметром $\alpha_i(x_i)$, зависящим от состояния узла, брать обратную связь нет смысла. Узел в изоляции имеет интенсивности переходов

$$q_i(x_i, y_i) = \alpha_i(x_i) p_i^a(x_i, y_i) + q_i^d(x_i, y_i) + q_i^i(x_i, y_i), \quad x_i, y_i \in X_i.$$

Обозначим через $x|y_i$ вектор, у которого i-я компонента y_i, а все остальные такие же, как у x. Введем функционал, усредняющий функцию $f(x)$ по множеству узлов A, как $E_A\{f(x)\} = \sum\limits_{x_i:\ i\in A}\left(\prod\limits_{k\in A}\right) f(x)$. Полученный в [12] критерий мультипликативности имеет вид:

Теорема 1.9. *$p(x)$ имеет форму (1.7) тогда и только тогда, когда существуют $\alpha_i(x_i)$ такие, что $p_i(x_i)$ являются стационарными распределениями узлов в изоляции относительно $\alpha_i(x_i)$, выполняется $\alpha_i(x_i) = E_{M\setminus\{i\}}\{\alpha_i(x_i)\}$, $i \in M$, $x_i \in X_i$, где $\alpha_i(x_i)$ находится как неотрицательное решение обобщенного уравнения трафика*

$$\alpha_i(x) = \sum_j \left(\tilde{q}_j^{\,d}(x_j) + \sum_{y_j} p_j(y_j) d_j(x|y_j) p_j^{ad}(y_j, x_j) p_j(x_j)^{-1}\right) p_{ji}(x), \quad i\in M,\ x\in X,$$

и справедливо

$$\sum_i \sum_{y_i} p_i(y_i)[\alpha_i(x|y_i) - \alpha_i(y_i)] p_i^a(y_i, x_i) p_i(x_i)^{-1} = \sum_i [\alpha_i(x) - \alpha_i(x_i)], \quad x\in X.$$

Ввести условие на узел, обобщающее понятие квазиобратимости, не удалось. Однако М.Ю. Тюриков показал в [12, 13], что следующее достаточное условие представимости в форме произведения является обобщением теоремы Келли, утверждающей, что сеть из квазиобратимых узлов мультипликативна.

Следствие 1.2. *Пусть* $p_0^{ai}(x_0, y_0) = 1_{\{x_0=y_0\}}$. *Если* $p_i(x_i)$ *являются стационарными распределениями узлов в изоляции относительно некоторых* $\alpha_i(x_i)$ *и*

$$\alpha_i(x_i) = \sum_j \Big(\tilde{q}_j^{\,d}(x_j) + \sum_{y_i} p_j(y_j)\alpha_j(y_j)p_j^{ad}(y_j, x_j)p_j(x_j)^{-1}\Big)p_{ji}(x), \qquad i \in M \setminus \{0\},\ x \in X,$$

то $p(x)$ *в форме (1.7) — стационарное распределение сети.*

Утверждения, обобщающие теорему 1.9 и следствие 1.2 на случай сетей с многими типами заявок, получены в [13].

1.3. Сети с обобщенной мультипликативной формой

Обратимые марковские процессы исследовались многими авторами. Большой вклад в их теорию внес А.Н.Колмогоров. Многомерные обратимые процессы размножения и гибели подробно исследовались в статье [14]. При исследовании таких процессов используется идея независимости выражения стационарной вероятности произвольного состояния через вероятность некоторого фиксированного состояния от формы пути, связывающего эти состояния на ориентированном графе состояний рассматриваемого марковского процесса. Если $n = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ — состояние рассматриваемого многомерного марковского процесса, то условие его обратимости выражается уравнениями детального баланса

$$p(n)q(n, m) = p(m)q(m, n), \qquad n, m \in X,\ \ m \neq n,$$

где $\{p(n),\ \ n \in X\}$ — стационарное распределение рассматриваемого процесса $x(t)$ с фазовым пространством X, $q(n, m)$ — интенсивность перехода из состояния n в состояние m. Если e_i — единичный вектор i-й оси координат, то, в частности, из уравнений детального баланса следует, что

$$\frac{p(n + e_i)}{p(n)} = \frac{q(n, n + e_i)}{q(n + e_i, n)}. \tag{1.11}$$

Оказывается, что идея независимости от формы пути, о которой говорилось выше, может быть использована и для необязательно обратимых марковских процессов, если в равенстве (1.11) вместо отношения в правой части поставить некоторое обозначение $\rho_i(n)$:

$$\frac{p(n + e_i)}{p(n)} = \rho_i(n), \tag{1.12}$$

которое обяжем удовлетворять некоторому дополнительному условию. Применительно к сетям массового обслуживания это условие выражает некоторое обобщение уравнения трафика.

Для применения предлагаемого метода необходимо ввести определенные ограничения на $\rho_i(n)$, при которых выражение с помощью (1.12) стационарной вероятности произвольного состояния $p(n)$ через стационарную вероятность фиксированного состояния, которое обозначим через 0, не зависит от формы пути между этими состояниями. Тогда стационарное распределение нашего многомерного марковского процесса может быть найдено в обобщенной мультипликативной форме

$$p(n) = p_1(n_1, n)p_2(n_2, n)\ldots p_N(n_N, n).$$

Эта форма произведения отличается от обычной тем, что i-й множитель зависит не только от i-й координаты n_i, но и от всего вектора n.

Отметим, что преимущество предлагаемого метода состоит в том, что он **в принципе** позволяет находить инвариантную вероятностную меру многомерного марковского процесса с произвольной формой зависимости инфинитезимальных характеристик $q(n,m)$ от n и m. Классическая форма произведения является частным случаем обобщенной мультипликативной формы, а определенная часть теории мультипликативных сетей (где удается применить предлагаемый метод) является частным случаем результатов для обобщенно-мультипликативных сетей. При этом можно использовать концепции условно изолированного в фиктивную случайную среду узла, концепцию обобщенной квазиобратимости и т.д.

Идея метода может быть применена к исследованию сетей с положительными и отрицательными заявками, сигналами, мгновенными перемещениями и т.д. Впервые этот метод был применен в работе В.Е. Евдокимовича и Ю.М. Малинковского [15], где получен интересный результат с позиций исследования мультипликативности. В рассмотренных ими сетях динамическая (зависимая от вектора состояний) не только маршрутизация, но и все остальные характеристики сети, не исключая интенсивностей переходов в узле. Внешний источник пуассоновский. Определенным ограничением является то, что узлы не имеют общего абстрактного описания, а представляют собой очередь с интенсивностью обслуживания $q_i^d(x)$, где x_i — количество заявок в узле. Для большей общности дополнительно введена вероятность $f_i(x)$ присоединения поступающей на узел i заявки к очереди, с дополнительной вероятностью эта заявка мгновенно обходит узел и маршрутизируется дальше с помощью $q_{ij}(x)$, отличных от $p_{ij}(x)$. Устанавливаются достаточные условия эргодичности процесса, описывающего сеть. Пусть e_i обозначает вектор, у которого i -ая координата равна 1, а остальные — нулевые.

Теорема 1.10. *Пусть $\alpha_i(x)$ — такие решения уравнения трафика*

$$\alpha_i(x) = q_0^d p_{0i}(x) + \sum_{j\neq 0}\alpha_j(x)\Big[f_j(x)p_{ji}(x) + (1-f_j(x))q_{ji}(x)\Big], \quad i\in M\setminus\{0\},\ x\in X,$$

для которых выполняется

$$\rho_j(x+e_i)\rho_i(x) = \rho_i(x+e_j)\rho_j(x), \qquad i,j\in M\setminus\{0\}, \tag{1.13}$$

где $\rho_i(x) = \frac{f_i(x)\alpha_i(x)}{q_i^d(x+e_i)}$ — условная загрузка i-го узла. Тогда финальное стационарное распределение сети имеет форму

$$p(x) = \prod_{i\neq 0} p_i\Big(x - \sum_{j=1}^{i-1} x_j e_j\Big), \qquad x\in X, \tag{1.14}$$

где $p_i(x) = p_i(x|_{x_j=0})\prod_{y_j=1}^{x_i} p_i(x|y_i)$, $\quad i\in M\setminus\{0\},\ x\in X$, а $p_i(x|_{x_i=0})$ находятся из нормированности $p_i(x)$ для всех фиксированных $x_j,\ j\neq i,0$.

Форма (1.14) не является мультипликативной формой в том смысле, в котором она понимается в предыдущих результатах, поскольку i-й множитель зависит не только от x_i. Однако, как (1.11), (1.14) представляет собой произведение стационарных вероятностей узлов в изоляции, хотя изоляция в [15] является условной, так как зависимость от x сохраняется. Фиктивная среда определяется пуассоновским входящим потоком с параметром $\alpha_i(x)$. Считая $x_j,\ j\neq i$, параметрами, можно рассматривать процесс изолированного узла.

2. Модели сетей массового обслуживания с обходами узлов заявками

В реальных сетях часто возникают проблемы скопления заявок в отдельных узлах. Однако в практических ситуациях клиент, попавший в узел, оценивает, сколько времени ему придется ждать или сколько заявок находится в очереди, и, в зависимости от проведенной оценки, либо остается ожидать, либо переходит в следующий узел. Ю.В.Малинковский для описания подобных случаев предложил модель модифицированной сети Джексона, в которой заявка, поступающая в узел, независимо от других заявок с вероятностью, зависящей от состояния узла, присоединяется к очереди, либо с дополнительной вероятностью мгновенно переходит в следующий согласно неприводимой матрице маршрутов. Такая модель делает возможным разгрузку узлов сети.

В [16] рассматривалась сеть, состоящая из N однолинейных узлов, в которую поступает простейший поток заявок интенсивности λ. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью p_{0i} направляется в i-ый узел ($i = \overline{1,N}$, $\sum\limits_{i=1}^{N} p_{0i} = 1$). Заявка, направленная в i-ый узел (извне или с другого узла) с вероятностью $f_{n_i}^{(i)}$, где n_i — состояние i-го узла, присоединяется к очереди, а с вероятностью $1 - f_{n_i}^{(i)}$ считается мгновенно обслуженной узлом ($0 \leqslant f_{n_i}^{(i)} \leqslant 1$, $i = \overline{1,N}$). Длительности обслуживания заявок в узлах независимы, не зависят от процесса поступления и для i-го узла имеют показательное распределение с параметром $\mu_i(n_i)$ ($i = \overline{1,N}$). Заявка, обслуженная i-ым узлом, независимо от других заявок с вероятностью p_{ij} мгновенно направляется в j-ый узел, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть ($i, j = \overline{1,N}$, $\sum\limits_{j=0}^{N} p_{ij} = 1$).

Будем предполагать, что матрица (p_{ij}, $i,j = \overline{0,N}$), где $p_{00} = 0$ неприводима. Тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_i = p_{0i} + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k p_{ki} \ \ (i = \overline{1,N}) \tag{2.1}$$

имеет единственное решение $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$, для которого $\varepsilon_i > 0$ ($i = \overline{1,N}$).

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $n(t) = (n_1(t), n_2(t), \ldots, n_N(t))$, где $n_i(t)$ — число заявок в i-ом узле в момент t. $n(t)$ — однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более, чем счетным фазовым пространством $X = Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_N$, где $Z_i = 0, 1, 2, \ldots$, если все $f_{n_i}^{(i)} > 0$ ($n_i = 0, 1, 2, \ldots$), и $Z_i = 0, 1, 2, \ldots, K_i$, если $f_{n_i}^{(i)} > 0$ для ($n_i = 0, 1, 2, \ldots, K_i - 1$), а $f_{K_i}^{(i)} = 0$ для некоторого $K_i \geq 1$ ($i = \overline{1,N}$).

Для рассматриваемой модели доказана

Теорема 2.1. *Если выполнено условие*

$$\sum_{n_i=0}^{\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda \varepsilon_i f_{l-1}^{(i)}}{\mu_i(l)} < \infty, \ i = \overline{1,N}$$

то марковский процесс $n(t)$ эргодичен, а финальное распределение имеет форму произведения

$$p(n) = p_1(n_1) \ldots p_N(n_N), \ \ n \in X, \tag{2.2}$$

где

$$p_i(n_i) = p_i(0) \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda \varepsilon_i f_{l-1}^{(i)}}{\mu_i(l)},$$

ε_i *находятся из (2.1), а*

$$\Big[\sum_{n_i=0}^{\infty}\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\lambda\varepsilon_i f_{l-1}^{(i)}}{\mu_i(l)}\Big]^{-1}\ i=\overline{1,N}.$$

В силу (2.2) в стационарном режиме узлы можно считать функционирующими независимо. Отметим, что маргинальные вероятности $p_i(n_i)$ совпадают со стационарными вероятностями состояний узла, расматриваемого изолированно от сети с пуассоновским входным потоком интенсивности $\lambda\varepsilon_i$ и вероятностью потери поступающей заявки $1-f_{n_i}^i$, когда в узле n_i заявок.

Была также исследована замкнутая сеть массового обслуживания с обходами и получено стационарное распределение в мультипликативной форме.

В [17] изучались выходящие потоки в открытых сетях Джексона с обходами. Информация о структуре и характеристиках выходных потоков играет важную роль при декомпозиции сетей, и ее изучение в целом сводится к изучению отдельных узлов и дальнейшему их "склеиванию". Для исследования выделенного узла крайне важно знать характер входящих в него потоков. Так как они составляются из потоков, выходящих из остальных узлов (и, возможно, внешних входных потоков), то для изучения выделенного узла необходима информация о структуре и характеристиках выходных потоков из остальных узлов.

Обслуживание заявки узлом назовем "фиктивным", если время обслуживания равно нулю (т.е. заявка осуществляет обход узла), и "истинным" в противном случае. В соответствии с этим выходным потоком первого рода из i-ого узла назовем поток заявок, выходящего из сети после любого обслуживания ("истинного" или "фиктивного") i-ым узлом, а выходным потоком второго рода из i-ого узла — поток заявок, выходящих из сети из любого узла, но получивших последний раз "истинное" обслуживание в i-ом узле ($i=\overline{1,N}$). Для изучения выходящих потоков использовался метод обращения времени.

Теорема 2.2. Выходные потоки первого рода из узлов модифицированной сети Джексона являются независимыми пуассоновскими потоками.

В [18] рассматриваются два класса более общих моделей сетей с обходами. Для первого класса вероятность присоединения заявки к очереди конкретного узла зависит от числа находящихся в нем заявок и номера узла, с которого заявка пришла в данный узел (заявкам, направляющимся извне присваивается нулевой номер). Для второго класса изолированный узел открытой сети с обходами описывается марковской цепью, состояния которой, вообще говоря, не совпадает с числом заявок в узле.

Класс 1. [18] Рассматривалась сеть, состоящая из N однолинейных узлов, состояние каждого узла характеризуется числом n_i заявок в нем ($i=\overline{1,N}$). В сеть поступает простейший поток заявок интенсивности λ. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью p_{0i} направляется в i-ый узел ($i=\overline{1,N}$, $\sum\limits_{i=1}^{N}p_{0i}=1$). Заявка, направленная в i-ый узел извне с вероятностью $f_{n_i}^{(0,i)}$, где n_i — состояние i-го узла, присоединяется к очереди, а с вероятностью $1-f_{n_i}^{(0,i)}$ считается мгновенно обслуженной узлом ($0\leqslant f_{n_i}^{(0,i)}\leqslant 1,\ i=\overline{1,N}$). Заявка, направленная в j-ый узел с i-го узла, с вероятностью $f_{n_j}^{(i,j)}$ присоединяется к очереди j-го узла, а с вероятностью $1-f_{n_j}^{(i,j)}$ считается мгновенно обслуженной узлом ($0\leqslant f_{n_j}^{(i,j)}\leqslant 1,\ i,j=\overline{1,N}$). Длительности обслуживания заявок в узлах независимы, не зависят от процесса поступления и для i-го узла имеют показательное распределение с параметром $\mu_i(n_i)$ ($i=\overline{1,N}$). Заявка, обслуженная i-ым узлом, независимо от других заявок с вероятностью p_{ij} мгновенно направляется в j-ый узел, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть $(i,j=\overline{1,N},\ \sum\limits_{j=0}^{N} p_{ij}=1)$.

Будем предполагать, что матрица $(p_{ij},\ i,j=\overline{0,N})$, где $p_{00}=0$ неприводима. Тогда уравнение трафика (2.1) имеет единственное решение $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)$, для которого $\varepsilon_i>0$ $(i=\overline{1,N})$.

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $n(t) = (n_1(t),n_2(t),\ldots,n_N(t))$, где $n_i(t)$ — число заявок в i-ом узле в момент t. $n(t)$ — однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более, чем счетным фазовым пространством $X=Z_1\times Z_2\times\ldots\times Z_N$, где $Z_i=0,1,2,\ldots$, если при всех n_j найдется i такое, что $f_{n_j}^{(i,j)}>0$ $(i=\overline{0,N})$ и $Z_j=0,1,2,\ldots,K_j$, если при всех $n_j\leqslant K_j-1$ найдется $i\in 0,1,2,\ldots,N$ такое, что $f_{n_j}^{(i,j)}>0$, а $f_{K_j}^{(i,j)}=0$ для всех $(i=\overline{0,N})$.

Для рассматриваемой модели доказана

Теорема 2.3. *Если выполнено условие*

$$\sum_{n_i=0}^{\infty}\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\lambda\Big(p_{0i}f_{l-1}^{(0,i)}+\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j p_{ji}f_{l-1}^{(j,i)}\Big)}{\mu_i(l)}<\infty,\ i=\overline{1,N}$$

то марковский процесс $n(t)$ эргодичен, а финальное распределение имеет форму произведения

$$p(n)=p_1(n_1)\ldots p_N(n_N),\ \ n\in X,$$

где

$$p_i(n_i)=p_i(0)\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\lambda\Big(p_{0i}f_{l-1}^{(0,i)}+\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j p_{ji}f_{l-1}^{(j,i)}\Big)}{\mu_i(l)},$$

ε_i находятся из (2.1), а

$$\Big[\sum_{n_i=0}^{\infty}\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\lambda\Big(p_{0i}f_{l-1}^{(0,i)}+\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j p_{ji}f_{l-1}^{(j,i)}\Big)}{\mu_i(l)}\Big]^{-1}\ i=\overline{1,N}.$$

В рамках класса 1 в [18] была исследована также замкнутая сеть массового обслуживания с обходами, в которой вероятность присоединения заявки к очереди конкретного узла зависит от числа находящихся в нем заявок и номера узла, с которого заявка пришла в данный узел. Найдено стационарное распределение в мультипликативной форме.

Класс 2. [18] В открытую сеть, состоящую из N однолинейных узлов, поступает простейший поток заявок интенсивности λ. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью p_{0i} направляется на i-ый узел $(i=\overline{1,N},\ \sum\limits_{i=1}^{N}p_{0i}=1)$. Заявка, направленная в i-й узел (извне или с другого узла) с вероятностью $f_{x_i}^{(i)}$, где x_i – состояние i-го узла, присоединяется к очереди, а с вероятностью $1-f_{x_i}^{(i)}$ считается мгновенно обслуженной узлом $(0\leqslant f_{x_i}^{(i)}\leqslant 1,\ i=\overline{1,N})$. Заявка, обслуженная i-м узлом, независимо от других заявок с вероятностью p_{ij} мгновенно направляется в j-й узел, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть $(i,j=\overline{1,N},\ \sum\limits_{j=0}^{N}p_{ij}=1)$. Будем предполагать, что матрица $(p_{ij},\ i,j=\overline{0,N})$, где $p_{00}=0$ неприводима. Тогда уравнение трафика (2.1) имеет единственное решение $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$, для которого $\varepsilon_i > 0$ $(i = \overline{1, N})$. Предположим, что если i-й узел рассматривать изолированно от сети и считать, что на него поступает простейший поток с параметром $\lambda\varepsilon_i$, а каждая поступающая заявка с вероятностью $1 - f_{x_i}^{(i)}$, зависящей от состояния x_i i-го узла в момент ее поступления, теряется, то состояние узла описывается стандартной консервативной цепью Маркова $\{\tilde{x}_i(t),\, t \geqslant 0\}$ с непрерывным временем и не более, чем счетным фазовым пространством X_i.

Обозначим через $q(x_i, \tilde{x}_i)$ инфинитезимальные интенсивности перехода $\tilde{x}_i(t)$ из состояния $x_i \in X_i$ в состояние $\tilde{x}_i \in X_i$ $(\tilde{x}_i \neq x_i)$. Пусть $\pi_i(x_i, \tilde{x}_i)$ – условная вероятность того, что узел перейдет в состояние $\tilde{x}_i$, если на него поступит заявка, заставшая его в состоянии x_i, $|\tilde{x}_i| = |x_i| + 1$. Здесь и в дальнейшем $|x_i|$ – число заявок в узле, находящемся в состоянии x_i. $\mu_i(x_i, \tilde{x}_i)$ – интенсивность перехода из x_i в $\tilde{x}_i$ за счет ухода заявок в i-ом узле, $|\tilde{x}_i| = |x_i| - 1$, $|x_i| \neq 0$; $\nu_i(x_i, \tilde{x}_i)$ – интенсивность перехода из x_i в $\tilde{x}_i$ за счет внутренних изменений в i-м узле (т.е. не связанных с поступлением и уходом заявок), $|\tilde{x}_i| = |x_i|$, $\tilde{x}_i \neq x_i$. Тогда

$$q_i(x_i, \tilde{x}_i) = \begin{cases} \lambda\varepsilon_i f_{x_i}^{(i)} \pi_i(x_i, \tilde{x}_i), & \text{если } |\tilde{x}_i| = |x_i| + 1; \\ \mu_i(x_i, \tilde{x}_i), & \text{если } |\tilde{x}_i| = |x_i| - 1,\ |x_i| \neq 0; \\ \nu_i(x_i, \tilde{x}_i), & \text{если } |\tilde{x}_i| = |x_i|,\ \tilde{x}_i \neq x_i; \\ 0, & \text{в остальных случаях}\ , \end{cases}$$

при этом $\pi_i(x_i, \tilde{x}_i) \geqslant 0$, $\mu_i(x_i, \tilde{x}_i) \geqslant 0$, $\nu_i(x_i, \tilde{x}_i) \geqslant 0$, $\sum\limits_{|\tilde{x}_i| = |x_i| + 1} \pi_i(x_i, \tilde{x}_i) = 1$, $\mu_i(x_i) = \sum\limits_{|\tilde{x}_i| = |x_i| - 1} \mu_i(x_i, \tilde{x}_i)$ – интенсивность обслуживания заявок i-м узлом, когда он находится в состоянии x_i; $\nu_i(x_i) = \sum\limits_{|\tilde{x}_i| = |x_i|,\, \tilde{x}_i \neq x_i} \nu_i(x_i, \tilde{x}_i)$ – интенсивность выхода из состояния x_i за счет внутренних переходов i-го узла.

Пусть $x_i(t)$ – состояние i-го узла в момент t, которое, вообще говоря, отличается от $\tilde{x}_i(t)$ $(i = \overline{1, N})$; $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_N(t))$ – состояние сети в момент t. При сделанных предположениях $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более, чем счетным фазовым пространством $X = X_1 \times \ldots \times X_N$. Предполагается, что описанные выше параметры сети выбраны таким образом, что $\{x(t), t \geqslant 0\}$ эргодичен. Тогда финальное распределение является стационарным распределением. Считаем, что начальное распредление совпадает с ним; тогда $\{x(t), t \geqslant 0\}$ – стационарный процесс.

Лемма 2.1. *Для квазиобратимости изолированного узла с учетом обходов необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lambda\varepsilon_i f_{x_i}^{(i)} p_i(x_i) = \sum_{|\tilde{x}_i| = |x_i| + 1} p_i(\tilde{x}_i) \mu_i(\tilde{x}_i, x_i),$$

$$[\mu_i(x_i) + \nu_i(x_i)] p_i(x_i) = \sum_{|\tilde{x}_i| = |x_i| - 1} p_i(x_i) \lambda\varepsilon_i f_{\tilde{x}_i}^{(i)} \pi_i(\tilde{x}_i, x_i) I_{\{|x_i| \neq 0\}} +$$

$$+ \sum_{|\tilde{x}_i| = |x_i|} p_i(\tilde{x}_i) \nu_i(\tilde{x}_i, x_i),\ x_i \in X_i.$$

Теорема 2.4. *Если все изолированные узлы квазиобратимы с учетом обходов, то стационарное распределение сети имеет мультипликативную форму*

$$p(x) = p_1(x_1) \ldots p_N(x_N),$$

где $p_i(x_i)$ зависят только от состояния i-го узла и могут быть выбраны как стационарные вероятности состояний изолированного i-го узла с обходами.

В [19] была рассмотрена модель замкнутой сети с обходами, изолированный узел которой описывается марковской цепью. Доказано, что стационарное распределение имеет форму произведение с заменой условия квазиобратимости на условие ограниченной квазиобратимости.

В [18] были также исследованы выходные потоки первого рода из узлов сети с обходами и доказана следующая

Теорема 2.3. *При выполнении условия квазиобратимости узлов с учетом обходов выходные потоки первого рода из узлов сети с обходами являются независимыми пуассоновскими.*

В [20] исследована открытая сеть массового обслуживания с обходами и несколькими типами заявок.

Рассматривалась сеть, состоящая из N однолинейных узлов, в которую поступает простейший поток заявок интенсивности λ. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок направляется в i-ый узел и становится заявкой l-го типа с вероятностью $p_{0(i,l)}$ $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{l=1}^{M} p_{0(i,l)} = 1$). Заявки могут быть M типов. Заявка, направленная в i-ый узел с типом l извне, с вероятностью $f^{(0,i)}_{(x_i,l)}$, зависящей от состояния i-го узла и типа l данной заявки, присоединяется к очереди узла, а с вероятностью $1-f^{(0,i)}_{(x_i,l)}$ мгновенно обходит узел, и в дальнейшем ее поведение такое же, как будто она обслужена этим узлом и имеет тип l ($0 \leqslant f^{(0,i)}_{(x_i,l)} \leqslant 1$, $i=\overline{1,N}$, $l=\overline{1,M}$). Заявка l-го типа, завершившая обслуживание в i-ом узле, независимо от других заявок мгновенно направляется в j-й узел и становится заявкой m-го типа с вероятностью $p_{(i,l)(j,m)}$, а с вероятностью $p_{(i,l)0}$ покидает сеть $\left(\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{m=1}^{M} p_{(i,l)(j,m)} + p_{(i,l)0} = 1;\ i=\overline{1,N};\ l,m=\overline{1,M}\right)$. Заявка, направленная в находящийся в состоянии x_j j-ый узел из i-го узла и изменившая свой тип с l на m с вероятностью $f^{(i,j)}_{(l,x_j,m)}$ присоединяется к очереди j-го узла, а с вероятностью $1-f^{(i,j)}_{(l,x_j,m)}$ обходит этот узел, после чего ее движение управляется стохастической матрицей $(p_{(i,l)(j,m)})$ ($0 \leqslant f^{(i,j)}_{(l,x_j,m)} \leqslant 1$, $i,j=\overline{1,N}$, $l=\overline{1,M}$) Будем предполагать, что матрица $(p_{(i,l)(j,m)})$, неприводима.

Длительности обслуживания заявок в узлах независимы, не зависят от процесса поступления и для i-го узла имеют показательное распределение с параметром $\mu_i(n(i))$. Здесь и далее $n(i)=|x_i|$ — число заявок в i-ом узле ($i=\overline{1,N}$).

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_N(t))$, где $x_i(t)=(x_{i1}(t),x_{i2}(t)\ldots,x_{in_i}(t))$ описывает состояние i-го узла. Здесь $x_{i1}(t)$ — тип заявки, находящейся в момент t на обслуживании, $x_{ij}(t)$ — тип заявки, находящейся в момент t $j-1$-ой в очереди $j=\overline{2,n(i)}$.

Теорема 2.5. *Пусть для любого состояния $x_i \in X_i$ ($|x_i| \neq 0$), любого $\ell=\overline{1,M}$ выполнено условие*

$$\left(p_{0(i,x_{i,n(i)})} f^{(0,i)}_{(T^-(x_i),x_{i,n(i)})} + \sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{M} \varepsilon_{rs} p_{(r,s)(i,x_{i,n(i)})} f^{(r,i)}_{(s,T^-(x_i),x_{i,n(i)})}\right) \times$$

$$\times \left(p_{0(i,\ell)} f^{(0,i)}_{(x_i,\ell)} + \sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{M} \varepsilon_{rs} p_{(r,s)(i,\ell)} f^{(r,i)}_{(s,x_i,\ell)}\right) =$$

$$= \left(p_{0(i,\ell)} f^{(0,i)}_{(T^-(x_i),\ell)} + \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{M} \varepsilon_{rs} p_{(r,s)(i,\ell)} f^{(r,i)}_{(s,T^-(x_i),\ell)} \right) \times \tag{2.3}$$

$$\times \left(p_{0(i,x_{i,n(i)})} f^{(0,i)}_{(T^+{}_\ell(T^-(x_i)),x_{i,n(i)})} + \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{M} \varepsilon_{rs} p_{(r,s)(i,x_{i,n(i)})} f^{(r,i)}_{(s,T^+{}_\ell(T^-(x_i)),x_{i,n(i)})} \right)$$

и

$$\sum_{n(i)=0}^{\infty} \lambda^{n(i)} \sum_{|x_i|=n(i)} \prod_{k=1}^{n(i)} \left(p_{0(i,x_{ik})} f^{(0,i)}_{((x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \varepsilon_{j\ell} p_{(j,\ell)(i,x_{ik})} f^{(j,i)}_{(\ell,(x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} \right) \mu_i^{-1}(k) < \infty \quad (i = \overline{1,N}).$$

Тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение имеет форму произведения

$$p(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \ldots p_N(x_N) \quad (x \in X),$$

где

$$p_i(x_i) = p_i(0) \lambda^{n(i)} \prod_{k=1}^{n(i)} \left(p_{0(i,x_{ik})} f^{(0,i)}_{((x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \varepsilon_{j\ell} p_{(j,\ell)(i,x_{ik})} f^{(j,i)}_{(\ell,(x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} \right) \mu_i^{-1}(k),$$

$\varepsilon_{i\ell}$ $(i = \overline{1,N};\ \ell = \overline{1,M})$ *находятся из уравнений трафика, а*

$$p_i(0) = \left[\sum_{x_i \in X_i} \lambda^{n(i)} \prod_{k=1}^{n(i)} \left(p_{0(i,x_{ik})} f^{(0,i)}_{((x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \varepsilon_{j\ell} p_{(j,\ell)(i,x_{ik})} f^{(j,i)}_{(\ell,(x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} \right) \mu_i^{-1}(k) \right]^{-1} \quad (i = \overline{1,N}).$$

Здесь и далее предполагается, что индексы $((x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik}) = (0,x_{i1})$, $(\ell,(x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik}) = (\ell,0,x_{i1})$ при $k=1$.

Отметим, что условие (2.3) выполняется, например, если:

а) вероятности $f^{(0,i)}_{(x_i,\ell)} = f^{(0,i)}_{n(i)}$, $f^{(j,i)}_{(m,x_i,\ell)} = f^{(j,i)}_{m,n(i)}$ зависят только от номера узла i, числа $n(i)$ заявок в нем, а также от номера предыдущего узла j и от предыдущего типа m; либо

б) вероятности $f^{(0,i)}_{(x_i,\ell)} = f^{(0,i)}_{\ell}$, $f^{(j,i)}_{(m,x_i,\ell)} = f^{(j,i)}_{m,\ell}$ зависят только от номера узла i, типа поступающей в него заявки ℓ, а также от номера предыдущего узла j и от предыдущего типа m.

Для этой модели в [20] исследованы также выходные потоки и доказана

Теорема 2.6. *При выполнении условия (2.3) выходные потоки первого рода ℓ-го типа с i-го узла при различных (i,ℓ) $(i = \overline{1,N};\ \ell = \overline{1,M})$ являются независимыми пуассоновскими потоками.*

В [21] исследована замкнутая сеть массового обслуживания с обходами и несколькими типами заявок, найдено стационарное распределение в форме произведения.

В [22] рассматривается открытая сеть многолинейных систем массового обслуживания. Сеть состоит из N многолинейных узлов, где в i-м узле имеется N_i обслуживающих приборов, а поступающий в нее поток заявок — простейший с параметром λ. Структура обходов в сети такая же как в предыдущем случае. Заявка, направленная в узел, сразу же начинает обслуживаться. Прибор, на который она поступает, выбирается наудачу. Если заявка вытесняется в очередь, то при повторном обслуживании она дообслуживается оставшееся время. Длительности обслуживания заявок в узлах независимы от процесса поступления, независимы между собой и для i-го узла имеют произвольное распределение $F_{i\ell}(x, n_{i\ell})$ с интенсивностью обслуживания $\mu_{i\ell}(n_{i\ell}) > 0$, обслуживается требование ℓ-го типа (наряду с другими).

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $x(t) = (x_1(t), \ldots$ $\ldots, x_N(t))$, где $x_i(t) = (x_{i1}(t), \ldots, x_{i,n(i)}(t)) = = (x_{i1}(t), \ldots, x_{i,d(i)}(t), \overline{x}_{i1}(t), \ldots, \overline{x}_{i,q(i)}(t))$ описывает состояние i-го узла. Здесь $n(i)$ – число заявок в i-м узле, $q(i) = \min(n(i), N_i)$ – число занятых приборов в i-м узле, $d(i) = n(i) - q(i)$ – число заявок в очереди i-го узла, $\overline{x}_{ij}(t)$ – тип заявки, обслуживаемой в момент t j-м прибором ($j = \overline{1, q(i)}$), $x_{ik}(t)$ – тип заявки, стоящей в момент t на k-м месте в очереди с конца ($k = \overline{1, d(i)}$). Понятно, что если $n(i) = q(i)$, то $x_i(t) = (\overline{x}_{i1}(t), \ldots, \overline{x}_{i,q(i)}(t))$ и $d(i) = 0$.

Далее требуется выполнение условий, аналогичных условиям (2.3), но имеющих намного более громоздкий вид. Отметим, что эти условия выполняются, например, если:

а) $f^{(0,i)}_{(x_i,\ell)} = f^{(0,i)}_{n(i)}$, $f^{(j,i)}_{(m,x_i,\ell)} = f^{(j,i)}_{m,n(i)}$; либо

б) $f^{(0,i)}_{(x_i,\ell)} = f^{(0,i)}_{\ell}$, $f^{(j,i)}_{(m,x_i,\ell)} = f^{(j,i)}_{m,\ell}$; либо

в) $f^{(0,i)}_{(x_i,\ell)} = f^{(0,i)}_{(x_{i1},\ldots,x_{i,d(i)})}$, $f^{(j,i)}_{(m,x_i,\ell)} = f^{(j,i)}_{(m,(x_{i1},\ldots,x_{i,d(i)}))}$; либо

г) $N_i = 1$, то есть когда в узле только один прибор.

Теорема 2.7. *Пусть существует стационарное эргодическое распределение процесса $x(t)$ и выполнены условия, о которых сказано выше. Тогда стационарное распределение имеет форму произведения*

$$p(x) = p_1(x_1) \ldots p_N(x_N) \quad (x \in X),$$

где

$$p_i(x_i) = p_i(0)\lambda^{n(i)} \prod_{k=1}^{n(i)} \left(p_{0(i,x_{ik})} f^{(0,i)}_{((x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \varepsilon_{j\ell} p_{(j,\ell)(i,x_{ik})} f^{(j,i)}_{(\ell,(x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} \right) (\mu_{i,x_{ik}}(n_{i,x_{ik}}) \min(k, N_i))^{-1},$$

$\varepsilon_{i\ell}$ ($i = \overline{1, N}$; $\ell = \overline{1, M}$) находятся из уравнений трафика, а

$$p_i(0) = \left[\sum_{x_i \in X_i} \lambda^{n(i)} \prod_{k=1}^{n(i)} \left(p_{0(i,x_{ik})} f^{(0,i)}_{((x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \varepsilon_{j\ell} p_{(j,\ell)(i,x_{ik})} f^{(j,i)}_{(\ell,(x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} \right) (\mu_{i,x_{ik}}(n_{i,x_{ik}}) \min(k, N_i))^{-1}, \right]^{-1}.$$

В [21] исследована замкнутая сеть массового обслуживания с обходами и несколькими типами заявок, найдено стационарное распределение в форме произведения.

В [22] рассматривается открытая сеть многолинейных систем массового обслуживания. Сеть состоит из N многолинейных узлов, где в i-м узле имеется N_i обслуживающих приборов, а поступающий в нее поток заявок — простейший с параметром λ. Структура обходов в сети такая же как в предыдущем случае. Заявка, направленная в узел, сразу же начинает обслуживаться. Прибор, на который она поступает, выбирается наудачу. Если заявка вытесняется в очередь, то при повторном обслуживании она дообслуживается оставшееся время. Длительности обслуживания заявок в узлах независимы от процесса поступления, независимы между собой и для i-го узла имеют произвольное распределение $F_{i\ell}(x, n_{i\ell})$ с интенсивностью обслуживания $\mu_{i\ell}(n_{i\ell}) > 0$, обслуживается требование ℓ-го типа (наряду с другими).

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $x(t) = (x_1(t), \ldots$ $\ldots, x_N(t))$, где $x_i(t) = (x_{i1}(t), \ldots, x_{i,n(i)}(t)) = = (x_{i1}(t), \ldots, x_{i,d(i)}(t), \overline{x}_{i1}(t), \ldots, \overline{x}_{i,q(i)}(t))$ описывает состояние i-го узла. Здесь $n(i)$ – число заявок в i-м узле, $q(i) = \min(n(i), N_i)$ – число занятых приборов в i-м узле, $d(i) = n(i) - q(i)$ – число заявок в очереди i-го узла, $\overline{x}_{ij}(t)$ – тип заявки, обслуживаемой в момент t j-м прибором ($j = \overline{1, q(i)}$), $x_{ik}(t)$ – тип заявки, стоящей в момент t на k-м месте в очереди с конца ($k = \overline{1, d(i)}$). Понятно, что если $n(i) = q(i)$, то $x_i(t) = (\overline{x}_{i1}(t), \ldots, \overline{x}_{i,q(i)}(t))$ и $d(i) = 0$.

Далее требуется выполнение условий, аналогичных условиям (2.3), но имеющих намного более громоздкий вид. Отметим, что эти условия выполняются, например, если:

а) $f^{(0,i)}_{(x_i,\ell)} = f^{(0,i)}_{n(i)}$, $f^{(j,i)}_{(m,x_i,\ell)} = f^{(j,i)}_{m,n(i)}$; либо

б) $f^{(0,i)}_{(x_i,\ell)} = f^{(0,i)}_{\ell}$, $f^{(j,i)}_{(m,x_i,\ell)} = f^{(j,i)}_{m,\ell}$; либо

в) $f^{(0,i)}_{(x_i,\ell)} = f^{(0,i)}_{(x_{i1},\ldots,x_{i,d(i)})}$, $f^{(j,i)}_{(m,x_i,\ell)} = f^{(j,i)}_{(m,(x_{i1},\ldots,x_{i,d(i)}))}$; либо

г) $N_i = 1$, то есть когда в узле только один прибор.

Теорема 2.7. *Пусть существует стационарное эргодическое распределение процесса $x(t)$ и выполнены условия, о которых сказано выше. Тогда стационарное распределение имеет форму произведения*

$$p(x) = p_1(x_1)\ldots p_N(x_N) \quad (x \in X),$$

где

$$p_i(x_i) = p_i(0)\lambda^{n(i)} \prod_{k=1}^{n(i)} \Bigg(p_{0(i,x_{ik})} f^{(0,i)}_{((x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{M} \varepsilon_{j\ell} p_{(j,\ell)(i,x_{ik})} f^{(j,i)}_{(\ell,(x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} \Bigg) \left(\mu_{i,x_{ik}}(n_{i,x_{ik}})\min(k, N_i)\right)^{-1},$$

$\varepsilon_{i\ell}$ ($i = \overline{1, N}$; $\ell = \overline{1, M}$) *находятся из уравнений трафика, а*

$$p_i(0) = \Bigg[\sum_{x_i \in X_i} \lambda^{n(i)} \prod_{k=1}^{n(i)} \Bigg(p_{0(i,x_{ik})} f^{(0,i)}_{((x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{M} \varepsilon_{j\ell} p_{(j,\ell)(i,x_{ik})} f^{(j,i)}_{(\ell,(x_{i1},\ldots,x_{i,k-1}),x_{ik})} \Bigg) \left(\mu_{i,x_{ik}}(n_{i,x_{ik}})\min(k, N_i)\right)^{-1}, \Bigg]^{-1}.$$

3. Сети с многорежимными стратегиями обслуживания

Аналитические модели сетей с ненадежными приборами почти не рассматривались в литературе в силу сложности нахождения инвариантной меры. Наша постановка позволяет исследовать сети, в которых приборы могут частично выходить из строя, работая при этом в "щадящем"режиме.

В [23] рассматривается сеть, состоящая из N однолинейных узлов, в которую поступает стационарный пуассоновский поток заявок с параметром λ. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью π_{0j} направляется в j-й узел ($j = \overline{1,N}$; $\sum_{j=1}^{N} \pi_{0j} = 1$). Заявка, обслуженная в l-м узле, мгновенно с вероятностью π_{lj} направляется в j-й узел, а с вероятностью π_{l0} покидает сеть ($l, j = \overline{1,N}$; $\sum_{j=0}^{N} \pi_{lj} = 1$). В l-м узле находится единственный прибор, который может работать в $r_l + 1$ режимах. Состояние l-го узла характеризуется парой чисел $x_l = (i_l, j_l)$, где i_l – число заявок в l-м узле, j_l – номер режима, в котором работает прибор в l-м узле ($l = \overline{1,N}$; $j_l = \overline{0,r_l}$). Длительность обслуживания прибором l-го узла, находящегося в состоянии x_l, имеет показательное распределение с параметром $\mu_{x_l}(l)$, зависящим от состояния (т.е. от числа заявок i_l в узле и режима j_l его работы). Назовем 0 основным режимом работы. Время пребывания в основном режиме работы имеет показательное распределение с параметром $\nu_{i_l,0}(l)$, после чего прибор переходит в режим 1. Для состояний x_l, у которых $1 \leqslant j_l \leqslant r_l - 1$, время пребывания в режиме j_l также имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\varphi_{x_l}(l)$ прибор l-го узла переходит в режим $j_l - 1$, а с интенсивностью $\nu_{x_l}(l)$ – в режим $j_l + 1$. Время пребывания в последнем r_l-м режиме имеет показательное распределение с параметром $\varphi_{i_l,r_l}(l)$, после чего прибор переходит в $r_l - 1$-й режим. Во время переключения прибора с одного режима работы на другой число заявок в узле не меняется.

Переход с режима 0 в режим 1 можно трактовать как частичную потерю работоспособности прибора, влекущую уменьшение интенсивности обслуживания с величины $\mu_{i_l,0}(l)$ на $\mu_{i_l,1}(l)$. Аналогично, переход с режима j_l в режим $j_l + 1$ означает переход прибора в более щадящий режим обслуживания. Переход с режима j_l в режим $j_l - 1$ означает восстановление тех функциональных возможностей, которые были утеряны прибором при переходе с режима $j_l - 1$ в режим j_l.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $x(t) = (x_1(t), \ldots$ $\ldots, x_N(t))$, где $x_l(t) = (i_l(t), j_l(t))$ – состояние l-го узла в момент времени t. В соответствии с вышесказанным здесь $i_l(t)$ – число заявок в l-м узле в момент t, $j_l(t)$ – номер режима работы l-го узла в момент t.

Предположим, что $\mu_{x_l}(l) > 0$, если $i_l \neq 0$ и $\mu_{x_l}(l) = 0$, если $i_l = 0$; $\nu_{x_l}(l) > 0$, если $0 \leq j_l \leq r_l - 1$ и $\nu_{x_l}(l) = 0$, если $j_l = r_l$; $\varphi_{x_l}(l) > 0$, если $1 \leq j_l \leq r_l$ и $\varphi_{x_l}(l) = 0$, если $j_l = 0$, а уравнение трафика

$$\varepsilon_l = \pi_{0l} + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \pi_{kl}, \qquad l = \overline{1,N}, \tag{3.1}$$

имеет единственное решение $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$, для которого $\varepsilon_1 > 0, \ldots, \varepsilon_N > 0$ (для этого достаточно, чтобы матрица $(\pi_{kl},\ k, l = \overline{0,N})$, где $\pi_{00} = 0$, была неприводимой). Тогда $x(t)$ – неприводимый марковский процесс на фазовом пространстве $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$, где $X_l = \{(i_l, j_l) | i_l = 0, 1, \ldots; j_l = \overline{0,r_l}\}$. Основным результатом работы [23] являются следующие

Теорема 3.1. *Для того, чтобы стационарное распределение открытой сети с многорежимными стратегиями обслуживания в узлах представлялось в форме произведения*

$$p_x = p_{x_1}(1)\, p_{x_2}(2) \dots p_{x_N}(N), \tag{3.2}$$

необходимо и достаточно, чтобы в нетерминальных узлах выполнялось условие

$$\nu_{i,j-1}(l)\mu_{i,j}(l)\varphi_{i-1,j}(l) = \nu_{i-1,j-1}(l)\mu_{i,j-1}(l)\varphi_{i,j}(l), \ \ i \geqslant 1, \ \ 1 \leqslant j \leqslant r_l, \tag{3.3}$$

При выполнении этого условия для эргодичности марковского процесса $x(t)$, описывающего поведение сети, достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{x\in X} q_x \prod_{l=1}^{N} \left[(\lambda\varepsilon_l)^{i_l} \prod_{k=1}^{j_l} \nu_{0,k-1}(l)\varphi_{0k}^{-1}(l) \prod_{k=1}^{i_l} \mu_{kj_l}^{-1}(l) \right], \tag{3.4}$$

где $(\varepsilon_l, \ l=\overline{1,N})$ — положительное решение уравнения трафика (3.1),

$$q_x = \lambda + \sum_{l=1}^{N} [\mu_{i_l,j_l}(l) + \nu_{i_l,j_l}(l) + \varphi_{i_l,j_l}(l)], \tag{3.5}$$

причем для случаев, когда $\mu_{i_l,j_l}, \nu_{i_l,j_l}, \varphi_{i_l,j_l}$ не определены, они полагаются равными нулю.

Пусть L_i – часть выходящего из i-го узла потока заявок, покидающих сеть ($i = \overline{1,N}$), $\{i_1,\dots,i_s\} \subseteq \{1,2,\dots,N\}$ – подмножество нетерминальных узлов ($1 \leqslant s \leqslant N$).

Следствие 3.1. *Потоки $L_{i_1}, L_{i_2}, \dots, L_{i_s}$ являются независимыми пуассоновскими потоками с параметрами $\lambda\,\varepsilon_{i_1}\,\pi_{i_1,0}, \ \lambda\varepsilon_{i_2}\,\pi_{i_2,0},\dots,\lambda\,\varepsilon_{i_N}\,\pi_{i_N,0}$ соответственно.*

Заметим, что если условию (3.2) подчиняются все узлы, то $L_1, L_2, \dots, L_N$ – независимые пуассоновские потоки.

В [24] результаты [23] распространяются на более общий случай, когда для каждого узла l существует конечное или счетное множество индексов $0 \le M_1(l) \le N_1(l) < < M_2(l) \le N_2(l) < \ < \dots < M_m(l) \le N_m(l) \le \dots$ такое, что $\nu_{x_l}(l) > 0, \ \varphi_{x_l}(l) > 0$ для всех x_l, у которых $M_m(l) \le i_l \le N_m(l)$ для некоторого m и $\nu_{x_l}(l) = \varphi_{x_l}(l) = 0$ для всех x_l иного вида (фактически в [23] рассматривался случай $M_1(l)=0, \ \ N_1(l)=\infty$).

Пусть $X = \{x \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N : \ i_1 + i_2 + \dots + i_N = M\}$, где $X_l = \{x_l = (i_l, j_l); \ \ i_l = \overline{0,\infty}, \ \ j_l = \overline{0, r_l}\}$. В работах [25, 26] на фазовом пространстве X задается многомерный марковский процесс $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_N(t))$, где $x_l(t) = (i_l(t), j_l(t))$, своими инфинитезимальными интенсивностями перехода

$$q_{x,x+e_{m1}-e_{l1}} = \mu_{x_l}(l)\pi_{lm} I_{(i_l\neq 0)};$$

$$q_{x,x+e_{l2}} = \nu_{x_l}(l) I_{(j_l \neq r_l)}; \qquad q_{x,x-e_{l2}} = \varphi_{x_l}(l) I_{(j_l\neq 0)}, \quad l,m = \overline{1,N}.$$

Интенсивности перехода из состояния x во все состояния, отличные от вышеперечисленных, предполагаются равными нулю. Здесь $\mu_{x_l}(l) > 0$ при $i_l \neq 0$ и $\mu_{x_l}(l) = 0$ при $i_l = 0$; $\nu_{x_l}(l) \geq 0$, $\varphi_{x_l}(l) \geq 0$; $\pi_{lm} \geq 0$ и $\sum_{m=1}^{N} \pi_{lm} = 1$.

Марковский процесс $x(t)$ описывает замкнутую сеть, в которой циркулирует M заявок. В l-м узле находится единственный экспоненциальный прибор с интенсивностью обслуживания $\mu_{x_l}(l)$, зависящей от состояния узла. Заявка, обслуженная в l-м узле, переходит с вероятностью π_{lm} в m-й узел. Как и в случае открытых сетей, компонента i_l выражает число заявок в l-м узле, а компонента j_l — номер режима работы прибора.

Прибор l-го узла может работать в r_l+1 режимах $0,1,\dots,r_l$ с показательно распределенным временем пребывания в них; $\nu_{x_l}(l)$ — интенсивность увеличения номера режима на единицу, $\varphi_{x_l}(l)$ — интенсивность уменьшения номера режима на единицу.

В [25, 26] рассматривается общий случай, когда для каждого узла l существует натуральное число $k(l)$ и конечное множество индексов $0 \le M_1(l) \le N_1(l) < M_2(l) \le N_2(l) < \ldots < M_{k(l)}(l) \le N_{k(l)}(l) \le M$ такое, что $\nu_{x_l}(l) > 0$, $\varphi_{x_l}(l) > 0$ для всех x_l, у которых $M_m(l) \le i_l \le N_m(l)$ для некоторого m и $\nu_{x_l}(l) = \varphi_{x_l}(l) = 0$ для всех x_l иного вида.

Будем предполагать, что матрица $(\pi_{lm},\ l,m=\overline{1,N})$ неприводима. Тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_l = \sum_m \varepsilon_m \pi_{ml}, \quad l=\overline{1,N}. \tag{3.6}$$

имеет единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение $\{\varepsilon_l, \quad l=\overline{1,N}\}$. Рассмотрим марковский процесс $\tilde{x}_l(t)$ на фазовом пространстве $\tilde{X}_l = \{x_l \in X_l:\ i_l \le M\}$, заданный инфинитезимальными интенсивностями

$$q_{x_l,x_l+(1,0)} = \varepsilon_l;\quad q_{x_l,x_l-(1,0)} = \mu_{x_l}(l);\quad q_{x_l,x_l+(0,1)} = \nu_{x_l}(l) I_{(j_l\neq r_l)};$$

$$q_{x_l,x_l-(0,1)} = \varphi_{x_l} I_{(j_l\neq 0)};$$

для всех иных состояний y_l считаем, что $q_{x_l,y_l}=0$. Процесс $\tilde{x}_l(t)$ описывает изолированный узел в фиктивной окружающей среде, в которой на узел посылается стационарный пуассоновский поток с параметром ε_l, где ε_l — любое решение уравнения трафика (3.6). При этом узел предполагается имеющим ограниченную емкость M. Это значит, что когда в нем находится M заявок и поступает заявка, то она теряется.

В [25, 26] стационарное распределение $\{p_x, \quad x \in X\}$ процесса $x(t)$ связывается со стационарными распределениями $\{p_{x_l}, \quad x_l \in \tilde{X}_l\}$ процессов $\tilde{x}_l(t)$ и интересуются достаточными условиями выполнения равенства

$$p_x = C(N,M) p_{x_1}(1) p_{x_2}(2) \ldots p_{x_N}(N), \tag{3.7}$$

где $C(N,M)$ — нормирующая постоянная, зависящая от числа узлов в сети и от числа циркулирующих в ней заявок. Основной результат [25, 26] — следующий.

Теорема 3.2. *Марковский процесс $x(t)$ эргодичен. Для того, чтобы его стационарное распределение представлялось в форме произведения (3.7), достаточно, чтобы во всех узлах сети выполнялись условия*

а) *для $M_m(l) \le i_l < N_m(l)$ при некотором $m=\overline{1,k(l)}$*

$$\nu_{i_l,j_l}(l)\varphi_{i_l+1,j_l+1}(l)\mu_{i_l+1,j_l}(l) = \nu_{i_l+1,j_l}(l)\varphi_{i_l,j_l+1}(l)\mu_{i_l+1,j_l+1}(l);$$

б) *для всех M_i, N_i, $i=\overline{1,k(l)}$*

$$\nu_{N_i(l),j_l}(l)\varphi_{M_{i+1}(l),j_l+1}(l) \prod_{s=N_i(l)}^{M_{i+1}(l)} \mu_{s,j_l}(l) =$$

$$= \nu_{M_{i+1}(l),j_l}(l)\varphi_{N_i(l),j_l+1}(l) \prod_{s=N_i(l)+1}^{M_{i+1}(l)} \mu_{s,j_l+1}(l),$$

где при $i = k(l)$ не определенная ранее величина $M_{k(l)+1}(l)$ должна быть заменена на M. При этом множители в (3.7) имеют форму

$$p_{i_l,j_l}(l) = \prod_{v=i_l+1}^{M_1(l)} \frac{\mu_{v,j_l}(l)}{\varepsilon_l} \prod_{t=1}^{j_l} \frac{\nu_{M_1(l),t-1}(l)}{\varphi_{M_1(l),t}(l)} \prod_{u=1}^{M_1(l)} \frac{\varepsilon_l}{\mu_{u,0}(l)} p_{00}(l)$$

$$\text{для } 0 \le i_l < M_1(l);$$

$$p_{i_l,j_l}(l) = \prod_{s=M_i(l)+1}^{i_l} \frac{\varepsilon_l}{\mu_{s,j_l}(l)} \prod_{t=1}^{j_l} \frac{\nu_{M_i(l),t-1}(l)}{\varphi_{M_i(l),t}(l)} \prod_{u=1}^{M_i(l)} \frac{\varepsilon_l}{\mu_{u,0}(l)} p_{00}(l)$$

$$\text{для } M_i(l) \le i_l < M_{i+1}(l), \quad i = \overline{1, k(l)},$$

где при $i = k(l)$ последнее неравенство надо заменить на $M_{k(l)}(l) \le i_l \le M$ и в которых полагается, что $p_{00}(l) = 1$, а постоянная $C(N, M)$ имеет вид:

$$C(N,M)^{-1} = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_N \ge 0,\ i_1+i_2+\dots+i_N=M} \ \sum_{j_1=0}^{r_1} \sum_{j_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{j_N=0}^{r_N} \prod_{l=1}^{N} \varepsilon_l^{i_l} \times$$

$$\times \Big(\prod_{v=i_l+1}^{M_1(l)} \mu_{v,j_l}(l) \prod_{t=1}^{j_l} \frac{\nu_{M_1(l),t-1}(l)}{\varphi_{M_1(l),t}(l)} \prod_{u=1}^{M_1(l)} \frac{1}{\mu_{u,0}(l)} I_{(0 \le i_l < M_1(l))} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k(l)} \prod_{s=M_i(l)+1}^{i_l} \frac{1}{\mu_{s,j_l}(l)} \prod_{t=1}^{j_l} \frac{\nu_{M_i(l),t-1}(l)}{\varphi_{M_i(l),t}(l)} \prod_{u=1}^{M_i(l)} \frac{1}{\mu_{u,0}(l)} I_{(M_i(l) \le i_l < M_{i+1}(l))} \Big),$$

где $M_{k(l)+1}(l) = M$.

Здесь рассматриваются результаты по стационарному распределению для некоторых моделей сетей с отрицательными заявками и другими информационными сигналами. Рассмотренные сети являются некоторыми расширениями G-сетей и некоторых других сетей.

4. Сетевые модели с отрицательными заявками и другими сигналами

4.1. Сети с обходами узлов заявками

В [29] рассматривалась следующая модель. В сеть, состоящую из N однолинейных экспоненциальных узлов с интенсивностями обслуживания μ_i $(i = \overline{1, N})$, поступает два независимых пуассоновских потока: положительных заявок с интенсивностью λ и отрицательных заявок с интенсивностью ν. Каждая положительная заявка направляется в i-й узел с вероятностью p_{0i}^+, а отрицательная — с вероятностью p_{0i}^- $\Big(\sum_{i=1}^{N} p_{0i}^+ =$

$= \sum_{i=1}^{N} p_{0i}^- =$

$= 1\Big)$. Пусть n_i — число положительных заявок в i-м узле. Направленная на i-й узел положительная заявка присоединяется к нему с вероятностью $f_i(n_i)$ и обходит этот узел с вероятностью $1 - f_i(n_i)$ $(0 \le f_i(n_i) \le 1)$. Обошедшая узел положительная заявка ведет себя так же, как обслуженная, т.е. направляется в j-й узел с вероятностью p_{ij}^+ как положительная, с вероятностью p_{ij}^- как отрицательная заявка и покидает сеть с вероятностью p_{i0} $\left(\sum\limits_{i=1}^{N}(p_{ij}^{+}+p_{ij}^{-})+p_{i0}=1\right)$. Матрица маршрутизации $(p_{ij}^{+},\ \ i,j=\overline{1,N})$ с $p_{00}^{+}=0$ предполагается неприводимой. Пусть $n_i(t)$ — число положительных заявок в i-м узле в момент t. Тогда $n(t)=(n_1(t),n_2(t),\ldots,n_N(t))$ — неприводимый марковский процесс с непрерывным временем и фазовым пространством $X=X_1\times X_2\times\ldots X_N$. Здесь $X_i=\{0,1,\ldots\}$ если все $f_i(n_i)>0$ $(n_i=0,1,\ldots)$, и $X_i=\{0,1,\ldots k_i\}$ если все $f_i(n_i)>0$ $(n_i=\overline{1,k_i-1})$ и для некоторого $k_i\geq 1$ выполняется $f_i(k_i)=0$ $(i=\overline{1,N})$. Из [28] следует, что уравнения трафика

$$\lambda_i=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\frac{\mu_j}{\mu_j+\nu_j}p_{ji}^{+}\ +\ \lambda p_{0i}^{+},\qquad \nu_i=\sum_{j=1}^{N}\nu_j\frac{\mu_j}{\mu_j+\nu_j}p_{ji}^{-}\ +\ \nu p_{0i}^{-},\quad i=\overline{1,N},$$

имеют положительное решение. Для рассматриваемого марковского процесса не существует стационарного распределения в форме произведения. Небольшая модификация нашей модели, разрешающая фиктивные переходы из состояния n_l в это же самое состояние n_l для изолированного узла с некоторой положительной интенсивностью, приводит к новому марковскому процессу. Этот процесс — некоторая аппроксимация исходного процесса; поэтому будем обозначать его той же буквой $n(t)$, что и первоначальный процесс. Результатом [29] является

Теорема 4.1. *Если*

$$\sum_{n_i\in X_i}\prod_{k=1}^{n_i}\frac{\lambda_i f_i(k-1)}{\mu_i+\nu_i}<\infty\quad (i=\overline{1,N})$$

то аппроксимирующий марковский процесс $n(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет следующую форму:

$$p(n)=p_1(n)p_2(n)\ldots p_N(n_N),\quad n\in X \tag{4.1}$$

где

$$p_i(n_i)=p_i(0)\prod_{k=1}^{n_i}\frac{\lambda_i f_i(k-1)}{\mu_i+\nu_i},\quad i=\overline{1,N},\quad n_i\in X_i.$$

В [30] для данной модели введено дополнительное предположение: время ожидания заявок в l-м узле ограничено показательно распределенной случайной величиной со средним θ_l^{-1}.

Теорема 4.2. *Если*

$$\sum_{n_i\in X_i}\prod_{k=1}^{n_i}\frac{\lambda_i f_i(k-1)}{\mu_i+\nu_i+(k-1)\theta_l}<\infty\quad (i=\overline{1,N})$$

то аппроксимирующий марковский процесс $n(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет форму (4.1), где

$$p_i(n_i)=p_i(0)\prod_{k=1}^{n_i}\frac{\lambda_i f_i(k-1)}{\mu_i+\nu_i+(k-1)\theta_l},\quad i=\overline{1,N},\quad n_i\in X_i.$$

Этот результат был обобщен на сети с многоканальными узлами в [31].

4.2. Сети с многорежимными стратегиями обслуживания

В [32,33] рассматривалась следующая сеть, состоящая из N однолинейных узлов, в которую поступали два независимых пуассоновских потока: положительных заявок с интенсивностью λ^+ и отрицательных заявок с интенсивностью λ^-. Каждая положительная (отрицательная) заявка направляется в l-й узел с вероятностью π_{0l}^+ (π_{0l}^-) $(l = \overline{1,N}; \sum_{l=1}^N \pi_{0l+} = \sum_{l=1}^N \pi_{0l-} = 1)$. После завершения обслуживания в l-м узле положительная заявка направляется в m-й узел как положительная заявка с вероятностью π_{lm}^+, как отрицательная заявка с вероятностью π_{lm}^- и покидает сеть с вероятностью π_{l0} $(l,m = \overline{1,N}; \sum_{m=1}^N(\pi_{lm}^+ + \pi_{lm}^-) + \pi_{l0} = 1)$. Единственный прибор в l-м узле может работать в $r_l + 1$ режимах. Состояние l-го узла — $x_l = (i_l, j_l)$, где i_l — число положительных заявок в l-м узле, j_l — порядковый номер режима обслуживания в этом узле $(l = \overline{1,N}; j_l = \overline{0,r_l})$. Время обслуживания в l-м узле имеет показательное распределение с параметром $\mu(l)$. Время пребывания в режиме 0 (основном режиме) имеет показательное распределение с параметром $\nu_{i_l,0}(l)$, после завершения которого номер режима работы в l-м узле преобразуется в номер 1. Для состояний x_l с $1 \leqslant j_l \leqslant r_l - 1$ время пребывания в j_l-м режиме также имеет показательное распределение. После его завершения номер режима в l-м узле может измениться с интенсивностью $\varphi_{x_l}(l)$ на режим $j_l - 1$ или с интенсивностью $\nu_{x_l}(l)$ на режим $j_l + 1$. Время пребывания в r_l-м режиметакже имеет показательное распределение с параметром $\varphi_{i_l,r_l}(l)$. После этого номер режима в l-м узле преобразуется в $r_l - 1$. Состояние сети в момент t описывается вектором $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_N(t))$, где $x_l(t) = (i_l(t), j_l(t))$ — состояние l-го узла в момент t. Предполагается, что $\mu(l), \nu_{x_l}(l), \varphi_{x_l}(l)$ строго положительны. Пусть α_l^+ (α_l^-) — средняя интенсивность поступления положительных (отрицательных) заявок в l-й узел. Она удовлетворяет следующей системе нелинейных уравнений трафика:

$$\alpha_l^+ = \lambda^+ \pi_{0l}^+ + \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k^+ \mu(k)}{\mu(k) + \alpha_k^-} \pi_{kl}^+; \qquad \alpha_l^- = \lambda^- \pi_{0l}^- + \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k^+ \mu(k)}{\mu(k) + \alpha_k^-} \pi_{kl}^-. \tag{4.2}$$

Из [28] следует, что при обычных предположениях эти уравнения имеют положительное решение. Поэтому марковский процесс $x(t)$ неприводим на пространстве состояний $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$, где $X_l = \{(i_l, j_l) : i_l = 0,1,2,\ldots;\ j_l = 0,1,\ldots,r_l\}$.

Теорема 4.3. *Если для всех $l = \overline{1,N}$ узлов выполняются условия*

$$\nu_{i_l,j_l-1}(l)\varphi_{i_l-1,j_l}(l) = \nu_{i_l-1,j_l-1}(l)\varphi_{i_l,j_l}(l), \qquad i_l \geq 1,\ \ 1 \leq j_l \leq r_l \tag{4.3}$$

и

$$\frac{\alpha_l^+}{\mu(l) + \alpha_l^-} < 1, \quad \sup_{x_l \in X_l} [\nu_{x_l}(l) + \varphi_{x_l}(l)] = c_l < \infty \tag{4.4}$$

то марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет следующую мультипликативную форму:

$$p_x = p_{x_1}(1) p_{x_2}(2) \ldots p_{x_N}(N) \tag{4.5}$$

где

$$p_{i_l,j_l}(l) = \Big(\frac{\alpha_l^+}{\mu(l) + \alpha_l^-}\Big)^{i_l} \prod_{k=0}^{j_l-1} \frac{\nu_{0,k}(l)}{\varphi_{0,k+1}(l)} p_{00}(l).$$

В [34] получено следующее обобщение [32,33]. Введены два дополнительных пуассоновских потока: сигналов возрастания режима с интенсивностями ω^+ и сигналов убывания режима с интенсивностями ω^-. Если в l-й узел поступает сигнал возрастания режима, то он переключает режим $j_l < r_l$ на режим $j_l + 1$ и сохраняет режим r_l. Если же поступает сигнал убывания режима, то он переключает режим $j_l \geq 1$ на режим $j_l - 1$ и сохраняет режим 0. После этого сигналы пропадают и не оказывают дальнейшего влияния на сеть. Поступающие в сеть положительные заявки, отрицательные заявки, сигналы возрастания и сигналы убывания режимов направляются на l-й узел с вероятностями соответственно π_{0l}^+, π_{0l}^-, q_{0l}^+, q_{0l}^- ($l = \overline{1,N}$; $\sum_{l=1}^N \pi_{0l}^+ = \sum_{l=1}^N \pi_{0l}^- = \sum_{l=1}^N q_{0l}^+ = \sum_{l=1}^N q_{0l}^- = 1$). После завершения обслуживания в l-м узле положительная заявка направляется в m-й узел как положительная заявка с вероятностью π_{lm}^+, как отрицательная заявка с вероятностью π_{lm}^-, как сигнал возрастания режима с вероятностью q_{lm}^+, как сигнал убывания режима с вероятностью q_{lm}^-, или покидает сеть с вероятностью π_{l0} $\left(\sum_m (\pi_{lm}^+ + \pi_{lm}^- + q_{lm}^+ + q_{lm}^-) + \pi_{l0} = 1\right)$. Пусть β_l^+ и β_l^- — средние интенсивности поступления сигналов возрастания и убывания режимов в l-й узел соответственно. Они могут быть получены как

$$\beta_l^+ = \omega^+ \sigma_{0l}^+ + \sum_k \frac{\alpha_k^+ \mu(k)}{\mu(k) + \alpha_k^-} q_{kl}^+; \qquad \beta_l^- = \omega^- \sigma_{0l}^- + \sum_k \frac{\alpha_k^+ \mu(k)}{\mu(k) + \alpha_k^-} q_{kl}^-,$$

где α_k^+, α_k^- удовлетворяют (4.2).

Теорема 4.4. *Если для всех $l = \overline{1,N}$ узлов выполняются условия (4.3) и (4.4), то марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а его равновесное распределение имеет форму произведения (4.5), где*

$$p_{i_l,j_l}(l) = \left(\frac{\alpha_l^+}{\mu(l) + \alpha_l^-}\right)^{i_l} \prod_{s=1}^{j_l} \frac{\nu_{0,s-1}(l) + \beta_l^+}{\varphi_{0,s}(l) + \beta_l^-} p_{0,0}(l), \qquad (i_l, j_l) \in X_l.$$

В [35, 36] рассмотрены открытые сети с многорежимными стратегиями и сигналами, действующими в течение некоторого показательно распределенного случайного времени. Поступают два независимых пуассоновских потока: положительных заявок и сигналов с интенсивностями λ^+ и λ^- соответственно. Пусть π_{0l}^+ и π_{0l}^- — вероятности того, что они будут направлены соответственно в l-й узел ($l = \overline{1,N}$). Пусть также k_l — число положительных заявок и n_l — число сигналов в l-м узле. Время обслуживания положительной заявки в l-м узле имеет показательное распределение с параметорм $\mu_l^+(k_l)$, по завершении которого заявка направляется в m-й узел как положительная заявка с вероятностью π_{lm}^+, как сигнал с вероятностью π_{lm}^-, или покидает сеть с вероятностью π_{l0}. Каждый поступающий в l-й узел сигнал действует в течение случайного времени, имеющего показательное распределение с параметром $\mu_l^-(n_l)$. По истечении этого времени сигнал перемещает положительную заявку из l-го узла в m-й узел с вероятностью σ_{lm}^+ как положительную заявку, с вероятностью σ_{lm}^- как сигнал, или уничтожает некоторую положительную заявку и пропадает с вероятностью $\sigma_{l0} = 1 - \sum_{m=1}^N (\sigma_{lm}^+ + \sigma_{lm}^-)$. Когда в l-м узле нет положительных заявок, сигнал аннулируется. Параметры режимов определяются как и выше и зависят от (k_l, j_l), где j_l — порядковый номер режима l-го узла. Состояние сети — вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, где $x_l = (k_l, n_l, j_l)$ — состояние l-го узла.

В [35] рассмотрен случай $\mu_l^+(k_l) = \mu_l^+$ для $k_l > 0$. Пусть имеется положительное решение уравнений трафика

$$\alpha_l^+ = \lambda^+ \pi_{0l}^+ + \sum_k \frac{\alpha_k^+ (\mu_k^+ \pi_{kl}^+ + \alpha_k^- \sigma_{kl}^+)}{\alpha_k^- + \mu_k^+}; \quad \alpha_l^- = \lambda^- \pi_{0l}^- + \sum_k \frac{\alpha_k^+ (\mu_k^+ \pi_{kl}^- + \alpha_k^- \sigma_{kl}^-)}{\alpha_k^- + \mu_k^+}.$$

Теорема 4.5. *Если для всех $l=\overline{1,N}$ узлов выполняются условия*

$$\alpha_l^+ < \alpha_l^- + \mu_l^+; \quad \sum_{n_l=0}^{\infty}\prod_{s=1}^{n_l}\frac{\alpha_l^-}{\mu_l^-(s)} < \infty; \quad \sup_{k_l,j_l} \nu_l(k_l,j_l) < \infty;$$

$$\forall k_l, j_l \quad \nu_l(k_l, j_l-1) < M\varphi_l(k_l,j_l) \quad \textit{for some} \;\; M<1$$

то марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а его инвариантная мера имеет форму произведения

$$p(k,n,j) = \prod_{l=1}^{N} p_l(k_l,n_l,j_l)$$

где

$$p_l(k_l,n_l,j_l) = \Big(\frac{\alpha_l^+}{\alpha_l^- + \mu_l^+}\Big)^{k_l}\prod_{s=1}^{n_l}\frac{\alpha_l^-}{\mu_l^-(s)}\prod_{u=0}^{j_l}\frac{\nu_l(k_l,u-1)}{\varphi_l(k_l,u)}.$$

В [36] снято ограничение $\mu_l^+(k_l)=\mu_l^+$ для $k_l>0$, но зато оно заменено другим, не менее жестким:

$$\pi_{lm}^+ = \sigma_{lm}^+ = p_{lm}^+, \;\; \pi_{lm}^- = \sigma_{lm}^- = p_{lm}^-, \;\; \pi_{l0} = \sigma_{l0} = p_{l0}$$

т.е. сеть — симметрическая.

4.3. Сети с общим описанием узлов

В [37] рассмотрена следующая сеть с N однолинейными узлами, в которую поступают два независимых пуассоновских потока заявок: положительных с параметром λ^+ и отрицательных с параметром λ^-. Положительные (отрицательные) заявки направляются в l-й узел с вероятностью p_{0l}^+ (p_{0l}^-), $\quad l=\overline{1,N}$. Обслуженная в l-м узле заявка немедленно направляется в m-й узел как положительная с вероятностью p_{lm}^+, как отрицательная — с вероятностью p_{lm}^-, или покидает сеть с вероятностью p_{l0}. Состояние сети — $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_N(t))$, где $x_l(t)$ — состояние l-го узла. Пусть $|x_l|$ — число положительных заявок в l-м узле в состоянии x_l. Когда положительная (отрицательная) заявка поступает в l-й узел, состояние узла меняется с x_l на $\tilde{x}_l$ с вероятностью $\pi_l^+(x_l,\tilde{x}_l)$, $\;|\tilde{x}_l| = |x_l|+1 \quad (\pi_l^-(x_l,\tilde{x}_l), \;\; |\tilde{x}_l| = |x_l|-1) \quad \Big(\sum\limits_{|\tilde{x}_l|=|x_l|+1}\pi_l^+(x_l,\tilde{x}_l) = \sum\limits_{|\tilde{x}_l|=|x_l|-1}\pi_l^-(x_l,\tilde{x}_l)=1\Big)$. Длительность обслуживания в l-м узле имеет показательное распределение с параметром μ_l, а после его завершения состояние l-го узламеняется с x_l на $\tilde{x}_l$ с вероятностью $\rho_l(x_l,\tilde{x}_l)$, $\;|\tilde{x}_l|=|x_l|-1 \quad \Big(\sum\limits_{|\tilde{x}_l|=|x_l|-1}\rho_l(x_l,\tilde{x}_l)=1, \;\; l=\overline{1,N}\Big)$. Let us $(\alpha_1^+,\ldots,\alpha_N^+; \;\; \alpha_1^-,\ldots,\alpha_N^-)$ — положительное решение уравнений трафика

$$\alpha_l^+ = \lambda^+p_{0l}^+ + \sum_k \frac{\alpha_k^+\mu_k}{\mu_k+\alpha_k^-}p_{kl}^+; \quad \alpha_l^- = \lambda^-p_{0l}^- + \sum_k \frac{\alpha_k^+\mu_k}{\mu_k+\alpha_k^-}p_{kl}^-; \quad l=\overline{1,N}.$$

Предполагается, что процесс состояний для изолированного узла в фиктивной среде обратим. Его стационарное распределение

$$p_l(x_l) = p_l(0)\prod_{k=1}^{|x_l|}\frac{\alpha_l^+\pi_l^+(u_{l,k-1}u_{l,k})}{\mu_l\rho_l(u_{l,k}u_{l,k-1}) + \alpha_l^-\pi_l^-(u_{l,k}u_{l,k-1})}\Big|_{|u_{l,k}|=k} \tag{4.6}$$

не зависит от формы пути $0 \to u_{l,1} \to u_{l,2} \to \ldots \to u_{l,|x_l|-1} \to x_l$ из состояния 0 в состояние x_l.

Теорема 4.6. *Если для всех $m = \overline{1,N}$ узлов выполняются неравенства $\alpha_m^+ < \mu_m + \alpha_m^-$ и условия*

$$\sum_{|\tilde{x}_m|=|x_m|+1} p_m(\tilde{x}_m)\rho_m(\tilde{x}_m, x_m) = \sum_{|\tilde{x}_m|=|x_m|+1} p_m(\tilde{x}_m)\pi_m^-(\tilde{x}_m, x_m),$$

то процесс $x(t)$ эргодичен, а его равновесное распределение имеет мультипликативную форму $p(x) = p_1(x_1)\ldots p_N(x_N)$, в которой множители определены с помощью (4.6).

Результат сохранится, если дополнительно предположить, что имеются внутренние переходы в узлах с некоторой интенсивностью $\nu_l(x_l, \tilde{x}_l)$ из состояния x_l в состояние $\tilde{x}_l$, $|x_l| = |\tilde{x}_l|$.

4.4. Инвариантность стационарного распределения

В [38] рассмотрена открытая сеть с N однолинейными узлами, в которую поступают два независимых пуассоновских потока: положительных заявок с интенсивностью λ^+ и отрицательных заявок с интенсивностью λ^-. Положительные (отрицательные) заявки направляются в l-й узел с вероятностью p_{0l}^+, $l = \overline{1,N}$, $\sum\limits_{l=1}^{N} p_{0l}^+ = 1$ $(p_{0l}^-,\quad l = \overline{M+1,N},\quad \sum\limits_{l=M+1}^{N} p_{0l}^- = 1)$. Направленная в l-й узел $(l = \overline{1,M})$ положительная заявка начинает обслуживаться с вероятностью $f_l(n_l)$, зависящей от числа положительных заявок в l-м узле, или обходит l-й узел с вероятностью $1 - f_l(n_l)$ и такой же маршрутизацией, как у обслуженной в этом узле заявки. Поступающая в l-й узел $(l = \overline{M+1,N})$ положительная заявка начинает обслуживаться немедленно. Обслуженная в узле l $(l = \overline{1,N})$ положительная заявка немедленно направляется в m-й узел как положительная с вероятностью p_{lm}^+, как отрицательная с вероятностью p_{lm}^-, или покидает сеть с вероятностью p_{l0}. Дисциплина обслуживания во всех узлах — LCFS PR. Единственный прибор в узле $l = \overline{M+1,N}$ экспоненциален с интенсивностью μ_l и в узле $l = \overline{1,M}$ время обслуживания имеет произвольное распределение $B_l(n_l,t)$ такое, что

$$\mu_i^{-1}(n_i) = \int_0^{+\infty} [1 - B_i(n_i,t)]dt, \qquad i = \overline{1,M}.$$

Если матрица $P^+ = (p_{lm}^+,\ \ l,m = \overline{0,N})$ с $p_{00}^+ = 0$ неприводима, то уравнение трафика

$$\lambda_l^+ = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k^+ p_{kl}^+ + \sum_{k=M+1}^{N} \frac{\lambda_k^+ \mu_k}{\mu_k + \lambda_k^-} p_{kl}^+ + \lambda^+ p_{0l}^+, \qquad l = \overline{1,N},$$

$$\lambda_l^- = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k^+ p_{kl}^- + \sum_{k=M+1}^{N} \frac{\lambda_k^+ \mu_k}{\mu_k + \lambda_k^-} p_{kl}^- + \lambda^- p_{0l}^-, \qquad l = \overline{M+1,N}$$

имеет положительное решение. Состояние сети — $n(t) = (n_1(t), n_2(t)\ldots n_N(t))$, где $n_l(t)$ — число положительных заявок в l-м узле в момент t. Пространство состояний — $\mathbf{X} = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$, где для $l = \overline{1,M}$ $X_l = \{0,1,2,\ldots\}$, если все $f_l(n_l) > 0$ $(n_l = 0,1,\ldots)$

и $X_l = \{0, 1, ..., k_l\}$, если все $f_l(n_l) > 0\,(n_l = 0, 1, ..., k_l - 1)$ и $f_l(k_l) = 0$ для некоторого $k_l \geq 1$; $X_l = \{0, 1, 2, ...\}$, если $l = \overline{M+1, N}$.

Теорема 4.7. *Если выполнены условия*

$$\sum_{n_i \in X_i} \prod_{k=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^+ f_i(k-1)}{\mu_i(k)} < +\infty, \quad i = \overline{1, M}, \qquad \sum_{n_i \in X_i} \prod_{k=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \lambda_i^-} < +\infty, \quad i = \overline{M+1, N},$$

то процесс $n(t)$ эргодичен, а его инвариантная мера имеет форму произведения $p(x) = p_1(x_1) \dots p_N(x_N)$, где

$$p_i(n_i) = \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^+ f_i(k-1)}{\mu_i(k)} & \text{for} \quad i = \overline{1, M}, \\ \prod\limits_{k=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \lambda_i^-} & \text{for} \quad i = \overline{M+1, N}. \end{cases}$$

Из теоремы 4.7 следует, что стационарное распределение не зависит от распределений длительностей обслуживания в узлах $l = \overline{1, M}$, когда эти распределения обладают фиксированными первыми моментами. В [39] получен аналогичный результат, когда дисциплина обслуживания в узлах — EPS.

5. Инвариантность стационарного распределения по отношению к распределениям длительностей обслуживания

Коротко приведем результаты по нечувствительности стационарного распределения сетей массового обслуживания к распределениям длительностей обслуживания.

В [40] рассмотрены открытые и замкнутые сети из N однолинейных узлов, в которых, в отличие от классических сетей Джексона и Гордона-Ньюэлла, при направлении требования с i-го узла в j-й с вероятностью $f_{n_j}^{(i,j)}$, зависящей от числа требований в j-м узле и от номера i узла, с которого оно направлено, становится на обслуживание, а с вероятностью $1 - f_{n_j}^{(i,j)}$ мгновенно обходит этот узел, после чего его движение управляется той же матрицей маршрутизации (p_{jk}), которой управляется движение обслуженных j-м узлом требований. В случае открытой сети требование, направленное в j-й узел извне, с вероятностью $f_{n_j}^{(0,j)}$ становится на прибор, а с вероятностью $1 - f_{n_j}^{(0,j)}$ мгновенно обходит узел и в дальнейшем его поведение такое же, как будто она обслужена этим узлом. Дисциплина обслуживания в узлах LCFS PR. Вытесненное с прибора требование вклинивается в начало очереди, сдвигая стоящие в ней требования, причем при возобновлении обслуживания оно дообслуживается оставшееся время. Длительности обслуживания требований в узлах не зависят от процесса поступления (в случае открытой сети) и друг от друга и имеют произвольную функцию распределения $B_i(n_i, t)$ для i-го узла, зависящую от числа требований в нем, причем

$$\mu_i^{-1}(n_i) = \int_0^\infty [1 - B_i(n_i, t)]dt.$$

Данная модель обобщает модель [18], приведенную во втором разделе этого обзора, на случай произвольного распределения длительностей обслуживания в узлах.

Установлено достаточное условие эргодичности. Доказано, что стационарное распределение процесса $n(t) = n_1(t), \dots, n_N(t)$, где $n_i(t)$ — число требоаваний в i-м узле момент t, как для открытой, так и для замкнутой сети не зависит от вида распределений $B_i(n_i, t)$, если фиксированы их первые моменты $\mu_i^{-1}(n_i)$. Метод доказательства стандартный с помощью составления уравнений для совместной вероятности по компонентам n_i и функции распределения по дополнительным компонентам (остаточным временам обслуживания) и угадывания решения (по схеме доказательства результата Севастьянова). Этот метод используется во всех результатах по нечувствительности, хотя некоторые из них можно получить с помощью критерия Коваленко.

В следующих двух работах [41, 42] результаты работы [40] обобщаются на сети с абстрактным описанием узла и с квазиобратимыми заявкосохраняющими (т.е. интенсивность входа в узел равна интенсивности выхода из него) узлами с сохранением мгновенных обходов узлов с вероятностями, зависящими от состояния.

В работах [43–45] для сетей двух видов с несколькими классами заявок, в которых заявки с некоторой вероятностью присоединяются к узлу, а с дополнительной вероятностью обходят узел и считаются мгновенно обслуженными, доказана инвариантность стационарного распределения относительно функционального вида распределений времен обслуживания в узлах и выписан его аналитический вид в мультипликативной форме. Сеть первого вида состоит из многолинейных узлов с очередью и дисциплиной LCFS PR, а сеть второго вида состоит из бесконечнолинейных узлов и узлов с дисциплиной EPS справедливого разделения прибора. В [44] рассматривались только замкнутые сети, в [43–45] — как открытые, так и замкнутые сети.

В работах [46, 47] установлена нечувствительность стационарного распределения открытых сетей с обходами, отрицательными заявками и дисциплинами LCFS PR и EPS относительно распределения длительностей обслуживания в заявкосохраняющих узлах.

В работе [48] при тех же дисциплинах доказана инвариантность для сети, вообще говоря, немультипликативного типа.

В отличие от работы [40], все характеристики [48] зависят от состояния сети, определяемого числом заявок в каждом из узлов, а матрица маршрутизации после обхода узла заявкой может отличаться от матрицы маршрутизации после обслуживания. При определенных ограничениях стационарное распределение имеет обобщенную форму произведения, в котором множители зависят не только от состояний индивидуальных узлов, но и от состояния всей сети.

Как показывает наш опыт, в сетях массового обслуживания нечувствительность выполняется, если:

1) при экспоненциальных предположениях и пуассоновских входящих потоках стационарное распределение имеет форму произведения (product-form) или обобщенную форму произведения;

2) узлы в сети являются заявкосохраняющими (уравнения трафика являются линейными);

3)дисциплина обслуживания является немедленной (т.е. требование, приходящее в узел, начинает немедленно обслуживаться).

Такой вывод может быть сделан также с учетом работ Ивницкого и других авторов. Однако в такой общей постановке это утверждение нигде не доказано. Трудность заключается в абстрактном задании сети с произвольной немедленной дисциплиной обслуживания.

Abstract. The authors present a review of the achievements of the Gomel school on multiplicative networks of the mass service. The authors consider conditions of multiplicativity of the invariant measures of the Markov network processes of the mass service, models of the networks of the mass service, network models with negative requests and other signals.

Литература

1. Ю. В. Малинковский, *О разностных уравнениях, возникающих в одной задаче теории массового обслуживания*, ДАН БССР, **XXIII**, № 1 (1979), 23–25.

2. Ю. В. Малинковский, *Сети массового обслуживания с симметричными резервными каналами*, Известия АН СССР, Техническая кибернетика, № 4 (1986), 69–77.

3. Е. А. Ковалев, Ю. В. Малинковский, *Сети массового обслуживания с резервными приборами*, Автоматика и вычислительная техника, № 2 (1987), 64–70.

4. Ю. В. Малинковский, *Мультипликативность стационарного распределения состояний для одного класса сетей массового обслуживания*, Автоматика и телемеханика, № 2 (1988), 108–118.

5. Ю. В. Малинковский, *Критерий точечной независимости состояний узлов в открытой стационарной марковской сети обслуживания с одним классом заявок*, Теория вероятностей и ее применения, **35**, № 4 (1990), 779–784.

6. Ю. В. Малинковский, *Критерий представимости стационарного распределения состояний открытой марковской сети обслуживания с несколькими классами заявок в форме произведения*, Автоматика и телемеханика, №4 (1991), 75–83.

7. Ю. В. Малинковский, *Мультипликативное представление стационарного распределения в замкнутых марковских сетях*, Автоматика и вычислительная техника, № 3 (1990), 34–39.

8. Ю. В. Малинковский, *Ограниченная квазиобратимость и факторизация стационарного распределения замкнутых сетей обслуживания* // Автоматика и вычислительная техника, № 5 (1991), 27–33.

9. Ю. В. Малинковский, *Мультипликативность стационарного распределения открытых сетей обслуживания со стандартными узлами и однотипными заявками*, Проблемы передачи информации, **35**, Вып.1 (1999), 96–110.

10. X. Chao, M. Miyazawa, R. F. Serfozo, H. Takada, *Markov network processes with product form stationary distributions*, Queueing Systems, **28**, № 4 (1998), 377–401.

11. М. Ю. Тюриков, *Мультипликативность марковских сетей с многоадресной маршрутизацией*, Проблемы передачи информации, **38**, Вып. 3 (2002), 72–82.

12. М. Ю. Тюриков, *Критерий мультипликативности сетей с динамической маршрутизацией и мгновенными перемещениями*, Известия ГГУ имени Ф.Скорины, № 6(15) (2002), 193–196.

13. М. Ю. Тюриков, Форма произведения инвариантного распределения марковских сетей с многотипными заявками, динамической маршрутизацией и мгновенными перемещениями, Препринт ГГУ им. Ф. Скорины, № 59, 2003.

14. J. F. C. Kingman, *Markov Population Processes*, J. Appl. Prob, **6** (1976), 1–18.

15. В. Е. Евдокимович, Ю. В. Малинковский, *Сети массового обслуживания с динамической маршрутизацией и динамическими вероятностными обходами узлов заявками,* Проблемы передачи информации, **37**, Вып. 3 (2001), 55–66.

16. Ю. В. Малинковский, *Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками,* Автоматика и телемеханика, № 2 (1991), 102–110.

17. Ю. В. Малинковский, *Выходные потоки в модифицированных сетях Джексона,* Автоматика и телемеханика, № 9 (1992), 134–138.

18. Ю.В. Малинковский, О.В. Якубович, *Сети массового обслуживания с мгновенно обслуживаемыми заявками I. Модели с одним типом заявок,* Автоматика и телемеханика, № 1 (1998), 92–106.

19. Ю.В. Малинковский, О. В. Якубович, Замкнутые сети массового обслуживания с обходами узлов заявками, Весці Акадэміі навук Беларусі, Сер. фіз.-мат. навук, № 1 (1999), 119–124.

20. А. В. Крыленко, Ю. В. Малинковский, *Сети массового обслуживания с мгновенно обслуживаемыми заявками II. Модели с несколькими типами заявок,* Автоматика и телемеханика, № 2 (1998), 62–71.

21. А. В. Крыленко, Ю. В. Малинковский, Замкнутые сети массового обслуживания с обходами узлов и несколькими классами заявок // Весці Акад. навук Беларусі, Сер. фіз.-мат. навук, № 2 (1998).

22. А. В. Крыленко, *Инвариантность сетей массового обслуживания с несколькими типами узлов и заявок, немедленным обслуживанием и обходами узлов заявками,* Математические методы исследования систем и сетей массового обслуживания: Материалы 14-й Бел. зимней школы-семинара по ТМО (междунар. науч. конф. BWWQT-98), Минск, 27–29 янв. 1998~г., Бел. гос. унив. – СПб., 1998, 112–115.

23. Ю. В. Малинковский, А. Ю. Нуеман, *Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания,* Весці НАНБ, серыя фіз.-мат. навук, № 3 (2001), 129–134.

24. Ю. В. Малинковский, А. Ю. Нуеман, *Инвариантная мера марковского сетевого процесса с многорежимными стратегиями,* Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины, № 6(15) (2002), 183–188.

25. Ю. В. Малинковский, А. Ю. Нуеман, *Замкнутые информационные сети с многорежимными стратегиями обслуживания,* Информационные системы и технологии (IST, 2002): Материалы I межд. конф., Минск, 5–8 ноября, 2002~г., В 2 ч., БГУ, Минск, Ч. 1, (2002), 324–328.

26. А. Ю. Нуеман, *Замкнутые сети с многорежимными стратегиями обслуживания,* Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети: Материалы международной конференции “Современные математические методы исследования информационно-вычислительных сетей”, 23–25 января 2001~г., Минск, Минск, БГУ, Вып.16 (2001), 159–160.

27. E. Gelenbe, *Product Form Queueing Networks with Negative and Positive Customers,* J. Appl. Probab, **28** (1991), 656–663.

28. E. Gelenbe, R. Shassberger, Stability *of Product-Form G-networks*, Probab. in Eng. and Inform. Sci., № 6 (1992), 271–276.

29. Ю. В. Малинковский, О.А. *Никитенко Стационарное распределение состояний сетей с обходами и "отрицательными заявками",* Автоматика и телемеханика, № 8 (2000), 79–85.

30. Ю. В. Малинковский, С. В. Кравченко, *Сети массового обслуживания с отрицательными заявками, обходами узлов заявками и ограниченным временем ожидания в очередях,* Вести НАН РБ, Сер. физ.-мат. наук, № 4 (2001), 118–122.

31. С. В. Кравченко, *Стационарное распределение открытых G-сетей массового обслуживания с обходами узлов и ограниченными временами ожидания,* Queues, Flows, Systems, Networks. Proceedings of the Int. Conf. "Modern Math. Methods of Investigating the Inf.-Comp. Networks", 23–25, January, 2001, Minsk,121–123.

32. А. Ю. Нуеман, *Открытые сети с многорежимными стратегиями обслуживания и отрицательными заявками,* Вестник ТГУ, №1(1) (2002), 90–93.

33. А. Ю. Нуеман, *Сети массового обслуживания с ненадежными приборами и отрицательными заявками,* Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы V Респ. научной конф. студентов и аспирантов, Гомель, 18-20 марта 2002 г., Гомель, Гомельский гос. университет им. Ф.Скорины, (2002), 179–180.

34. Ю. В. Малинковский, А. Ю. Нуеман, *Инвариантная мера Марковского сетевого процесса с многорежимными стратегиями,* Известия Гомельского гос. унив. им. Ф. Скорины, №~6(15) (2002), 183–188.

35. С. В. Кравченко, Открытые сети с многорежимными стратегиями обслуживания и сигналами, Вестник ГГТУ им. П.О.Сухого, № 1 (2003), 3–10.

36. С. В. Кравченко, *Симметричные сети с многорежимными стратегиями обслуживания и сигналами,* Тез. докл. VII науч.-практ. конф. "Макроэкон. и конституц. проблемы общ. с перех. экономикой", Моск. инст. труд. и соц. отношений. Гомельский филиал, **II** (2003), 29–30.

37. С. В. Кравченко, Ю. В. Малинковский, *Мультипликативность стационарного распределения открытых стохастических сетей с отрицательными заявками,* Вестник ТГУ, № 1(1) (2002), 78–82.

38. Т. С. Довженок, *Инвариантность стационарного распределения сетей с обходами и отрицательными заявками,* Автоматика и телемеханика, № 9 (2002), 97–110.

39. Т. С. Довженок, *Сети с обходами, отрицательными заявками и дисциплиной справедливого распределения процессора,* Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы IV Респ. научной конф. студентов и аспирантов, Гомель, 19-22 марта 2001 г., Гомель, Гомельский гос. унив. им. Ф.Скорины, (2001), 97–99.

40. Ю.В. Малинковский, *Инвариантность стационарного распределения состояний модифицированных сетей Джексона и Гордона-Ньюэлла,* Автоматика и телемеханика, № 9 (1998), 29–36.

41. Ю. В. Малинковский, О. В. Якубович, *Инвариантность стационарного распределения в замкнутых сетях с обходами,* Математические методы исследования телекоммуникационных сетей: Материалы 13-й Бел. зимней школы-семинара по ТМО (межд. науч. конф. BWWQT-97), Минск, 3-5 февр. 1997 г., Минск, Бел. гос. унив., (1997), 118–119.

42. Ю. В. Малинковский, О. В. Якубович, *Инвариантность марковских сетей массового обслуживания с обходами узлов заявками и немедленным обслуживанием,* Математические методы исследования систем и сетей массового обслуживания: Материалы 14-й Бел. зимней школы-семинара по ТМО (межд. науч. конф. BWWQT-98), Минск, 27-29 янв. 1998 г., Минск, Бел. гос. унив., (1998), 121–122.

43. А. В. Крыленко, *Инвариантность сетей массового обслуживания с несколькими типами узлов и заявок, немедленным обслуживанием и обходами узлов заявками,* Математические методы исследования систем и сетей массового обслуживания: Материалы 14-й Бел. зимней школы-семинара по ТМО (междунар. науч. конф. BWWQT-98), Минск, 27-29 янв. 1998 г. / Минск, Бел. гос. унив., (1998), 112–115.

44. Крыленко А.В. Инвариантность замкнутых сетей массового обслуживания с несколькими типами заявок, неэкспоненциальным обслуживанием и обходами узлов заявками // Новые информационные технологии в образовании: Труды третьей международной конференции (NITE-98), Минск, 12-13 нояб. 1998. — С. 52-53.

45. А. В. Крыленко, *Сети с несколькими типами заявок, двумя дисциплинами обслуживания и обходами узлов заявками,* Автоматика и телемеханика, № 10 (2000), 95–106.

46. Т. С. Довженок, *Сети с обходами, отрицательными заявками и дисциплиной справедливого распределения процессора,* Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы IV Респ. научной конф. студентов и аспирантов, Гомель, 19–22 марта 2001 г., ГГУ им. Ф. Скорины, (2001), 97–99.

47. Т. С. Довженок, *Инвариантность стационарного распределения сетей с обходами и отрицательными заявками,* Автоматика и телемеханика, №9 (2002), 97–110

48. Т. С. Довженок, *Инвариантность стационарного распределения сетей с обходами и динамической маршрутизацией,* Вестник ТГУ, №1(I) (2002), 37–42.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 15.03.05