Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 3(36), 2006

УДК 512.542

Конечные группы с дополняемыми подгруппами

В. Н. Тютянов

В Коуровской тетради [1] В.М. Левчук записал вопрос 8.31 об описании конечных групп, у которых всякая собственная подгруппа дополняема в некоторой большей подгруппе. Данный вопрос рассматривался в его работе [2], в которой используются следующие определения. Подгруппа H группы G называется слабо дополняемой в G, если она дополняема в некоторой подгруппе M, $H < M \leq G$, или совпадает с G. Группа называется слабо факторизуемой, если у нее каждая подгруппа слабо дополняема. В [2] была высказана гипотеза о том, что конечные простые неабелевы группы со свойством слабой факторизуемости исчерпываются группой $PSL_2(7)$. Данная гипотеза рассматривалась в работах [2-5] и была подтверждена для простых групп Шевалле малого лиевского ранга и ряда спорадических групп.

В настоящей работе доказан следующий основной результат.

Теорема 1. *Пусть G — простая неабелева группа, являющаяся слабо факторизуемой. Тогда $G \cong PSL_2(7)$.*

Все рассматриваемые группы являются конечными. Обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в работах [6] и [7].

Доказательство теоремы 1. Если группа G является слабо факторизуемой, то любая ее собственная максимальная подгруппа M имеет в группе G дополнение F такое, что $G = MF$ и $M \cap F = 1$. В работе [6] рассмотрены факторизации конечных простых неабелевых групп и их групп автоморфизмов максимальными подгруппами. Используя эти результаты, будем последовательно исключать простые группы, которые не являются слабо факторизуемыми.

1. G — простая спорадическая группа.

В таблице 6 [6] приведены факторизации спорадических групп максимальными подгруппами. Из таблицы 6 [6] следует, что необходимо рассмотреть только следующие случаи.

$G \cong M_{11}$. Из таблицы 6 [6] следует, что группа G допускает только две следующие максимальные факторизации: $G = L_2(11).M_{10} = L_2(11).(M_9 : 2)$. Группа M_{11} содержит максимальную подгруппу $M \cong S_5$ [7]. Поэтому M не имеет дополнения.

$G \cong M_{12}$. Из таблицы 6 [6] следует, что группа G обладает только следующей максимальной факторизацией с сомножителем, который изоморфен $A_4 \times S_3 : G = AB = (A_4 \times S_3).M_{11}$, где $|A \cap B| = 6$ (стр. 118 [6]). Если подгруппа A имеет дополнение F в группе G, то существует факторизация $G = AF$, где $A \cap F = 1$ и $F \leq M_{11}$. В этом случае $|M_{11} : F| = 6$. Однако группа M_{11} не содержит подгрупп индекса 6 [7].

$G \cong M_{23}$. Из таблицы 6 [6] следует, что группа G допускает только три следующие максимальные факторизации:
$G = (23 : 11).M_{22} = (23 : 11).(M_{21}.2) = (23 : 11).(2^4 : A_7)$. Группа M_{23} содержит максимальную подгруппу $M \cong A_8$ [7]. Поэтому M не имеет дополнения.

$G \cong M_{24}$. Из таблицы 6 [6] следует, что группа G обладает максимальной факторизацией $G = AB = L_2(7).M_{23}$, где $|A \cap B| = 7$. Если подгруппа A имеет дополнение F в группе G, то существует факторизация $G = AF$, где $A \cap F = 1$ и $F \leq M_{23}$, так как максимальным добавлением к $L_2(7)$ в G может быть только подгруппа M_{23}. В этом случае $|M_{23} : F| = 7$. Однако группа M_{23} не содержит подгрупп индекса 7 [7].

$G \cong J_2$. Из таблицы 6 [6] следует, что группа G обладает единственной максимальной факторизацией $G = U_3(3).(A_5 \times D_{10})$. Группа J_2 содержит максимальную подгруппу $M \cong A_5$ [7], которая не имеет дополнения.

$G \cong HS$. Из таблицы 6 [6] следует, что группа G допускает только две максимальные факторизации: $G = M_{22}.(U_3(5).2) = M_{22}.(5:4 \times A_5)$. Группа HS содержит максимальную подгруппу M_{11} [7], которая не имеет дополнения.

$G \cong He$. Из таблицы 6 [6] следует, что группа G обладает единственной максимальной факторизацией: $G = (Sp_4(4):2).(7^2 : SL_2(7))$. Группа He содержит максимальную подгруппу $3.S_7$ [7], которая не имеет дополнения.

$G \cong Ru$. Из таблицы 6 [6] следует, что группа G обладает единственной максимальной факторизацией $G = L_2(29).{}^2F_4(2)$. Группа Ru содержит максимальную подгруппу A_8 [7], которая не имеет дополнения.

$G \cong Suz$. Из таблицы 6 [6] следует, что группа G допускает только две следующие максимальные факторизации: $G = G_2(4).U_5(2) = G_2(4).(3^5 : M_{11})$. Группа Suz содержит максимальную подгруппу $L_2(25)$ [7], которая не имеет дополнения.

$G \cong Fi_{22}$. Из таблицы 6 [6] следует, что группа G обладает единственной максимальной факторизацией $G = {}^2F_4(2).(2.U_6(2))$. Группа Fi_{22} содержит максимальную подгруппу M_{12} [7], которая не имеет дополнения.

$G \cong Co_1$. Из таблицы 6 [6] следует, что группа G допускает только четыре следующие максимальные факторизации: $G = Co_2.(3.Suz.2) = Co_2.((A_4 \times G_2(4)).2) = Co_3.(3.Suz.2) = Co_3.((A_4 \times G_2(4)).2)$. Из [7] следует, что группа Co_1 содержит максимальную подгруппу $2^{11} : M_{24}$, которая не имеет дополнения.

2. G — знакопеременная группа и $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$ — множество точек, на котором действует $G, n \geq 5$.

Пусть сначала $n \geq 13$. В качестве M возьмем стабилизатор точки множества $\Omega^{(k)}$ элементами которого являются все подмножества в Ω, содержащие k элементов. Так как $n \geq 13$, то k можно выбрать таким образом, что $6 \leq k \leq n/2$. Подгруппа M максимальна в G и ее дополнение T по теореме D [6] действует k-однородно на Ω. Из теоремы 12.6.16 [8] следует, что T является k-транзитивной на Ω. Так как $k \geq 6$, то $T = A_n$. Последнее невозможно.

Следовательно, $n \leq 12$. Если $n = 5$, то группа G содержит максимальную подгруппу $A \cong D_{10}$ и дополнением к A в группе G может быть только подгруппа $B \cong S_3$. Таким образом, $G = AB = D_{10}.S_3$ и $A \cap B = 1$. Поскольку для всякого $g \in G$ имеет место факторизация $G = AB^g$ и все инволюции в G сопряжены, то найдется элемент $f \in G$ такой, что $|A \cap B^f| = 2$. Последнее невозможно. Если $n = 6$, то группа G содержит максимальную подгруппу $M \cong S_4$ индекса 15. Таким образом, дополнение F к M изоморфно $Z_3 \times Z_5$. Однако силовская 5-подгруппа в G самоцентрализуема [7]. Если $n = 7$, то G содержит максимальную подгруппу $M \cong PSL_2(7)$ индекса 15 [7]. Поэтому, если M имеет дополнение F, то $G = MF$, где $|F| = 15$ и $F \cong Z_5 \times Z_3$. Однако $C_G(G_5) = G_5$ [7]. Если $n = 8$, то G содержит максимальную подгруппу $M \cong 2^4 : (S_3 \times S_3)$ индекса 35 [7]. Поэтому если M имеет дополнение F, то $G = MF$, где $|F| = 35$ и $F \cong Z_5 \times Z_7$. Однако $C_G(G_7) = G_7$ [7]. Если $n = 9$, то G содержит максимальную подгруппу $M \cong 3^3 : S_4$ индекса $280 = 2^3.5.7$ [7]. Из [7] следует, что если в G есть подгруппа F порядка 280, то она может содержаться только в максимальных подгруппах A_8 или S_7. Если $F \subset A_8$, то из [7] следует, что F может содержаться только в подгруппе A_7. Однако группа A_7 не содержит подгрупп порядка 280 [7]. Таким образом, подгруппа M не имеет дополнения. Пусть $n = 10$. Из [7] следует, что в G имеется максимальная подгруппа $M \cong S_8$ индекса 45. Очевидно, что если M имеет дополнение F, то $F = F_5 \times F_3$ — прямое произведение силовских подгрупп. Поэтому в G имеется элемент порядка 5, централизатор которого делится на 45. Из таблицы характеров для группы A_{10} [7] видно, что это невозможно. Таким образом, M не имеет дополнения. Если $n = 11$, то G содержит максимальную подгруппу $M \cong (A_8 \times 3) : 2$ индекса 165=3.5.11 [7]. Из [7] следует, что если в группе G есть подгруппа F порядка 165, то она может содержаться только в максимальной подгруппе M_{11}, и $|M_{11} : F| = 48$. Тогда из [7] следует, что $F \subset L_2(11)$ и $|L_2(11) : F| = 4$. Однако в группе $L_2(11)$ нет подгрупп индекса 4 [7]. Таким образом, M не имеет дополнения. Если $n = 12$, то в G существует максимальная подгруппа $M \cong S_{10}$ индекса 66=2.3.11 [7]. Из [7] следует, что если в G есть подгруппа F порядка 66, то она может содержаться только в максимальных подгруппах M_{12} и A_{11}. Пусть $F \subset M_{12}$. Тогда $F \subset L_2(11)$ или $F \subset M_{11}$ [7]. В группе $L_2(11)$ нет подгрупп порядка 66. Следовательно, $F \subset M_{11}$. Но тогда $F \subset L_2(7)$ [7], что невозможно. Поэтому $F \subset A_{11}$. Из [7] следует, что $F \subset M_{11}$. Как показано выше, последнее невозможно. Таким образом, M не имеет дополнения.

3. $G \cong PSL_n(q),\ n \geq 2$.

В работе [2] было показано, что при $n = 2$ только группа $PSL_2(7)$ является слабо факторизуемой. Поэтому будем считать, что $n \geq 3$. Пусть $n = 3$. Так как $PSL_3(2) \cong PSL_2(7)$, то $q \geq 3$. Из таблиц 1,2,3 [6] следует, что группа G допускает максимальную факторизацию только параболической подгруппой P_1 или P_2 и нормализатором минизотропного тора. Поэтому максимальная подгруппа M в G, содержащая подгруппу Картана группы G, не имеет дополнения. Таким образом, $n \geq 4$. Из таблиц 1,3[6] следует, что если G не изоморфна $PSL_5(2)$, тогда в любой максимальной факторизации группы G один из сомножителей есть параболическая подгруппа P_1 или P_{n-1}. Следовательно, максимальная параболическая подгруппа P_i, где $i \notin \{1, n-1\}$ не имеет дополнения в G. Рассмотрим случай $G \cong L_5(2)$. В группе $L_5(2)$ каждая максимальная подгруппа имеет дополнение [7]. Рассмотрим максимальную подгруппу $M \cong 2^4 : L_4(2)$ индекса 31 [7]. В группе M существует максимальная подгруппа $T \cong 2^4 : S_6$ [7]. Из строения максимальных подгрупп в $L_5(2)$ видно, что T содержится только в максимальных подгруппах группы $L_5(2)$, которые изоморфны M. Достаточно показать, что S_6 не имеет дополнения в $L_4(2)$. Индекс $|L_4(2) : S_6| = 28$. Если S_6 имеет дополнение F в $L_4(2)$, то $|F| = 28$. Так как $|F| = 2^2.7$, то $G_7 \lhd F$. Силовская 7-подгруппа порядка 7 в $L_4(2)$ является самоцентрализуемой [7]. Поэтому нормализатор G_7 в $L_4(2)$ содержится в группе вида $Z_7 : Z_6$ и группы F не существует.

4. $G \cong PSp_{2n}(q),\ n \geq 2$.

Рассмотрим случай $n = 2$. Если q — нечетное число, то из таблиц 1,2,3 [6] следует, что группа допускает только одну максимальную факторизацию $PSp_4(q) = (PSp_2(q^2).2).P_1$, кроме случая $G \in \{PSp_4(3), PSp_6(3)\}$. Следовательно, если $G \notin \{PSp_4(3), PSp_6(3)\}$, то максимальная параболическая подгруппа P_2 не имеет дополнения в G. Пусть $G \cong PSp_4(3)$. Группа G содержит максимальную параболическую подгруппу $M \cong 3^3.S_4$ индекса $2^3.5$ [7]. Поэтому, если M дополняема в G, то $G = MF$, где $M \cap F = 1$ и $|F| = 2^3.5$. Очевидно, что группа F порядка $2^3.5$ разрешима и ее силовская 5-подгруппа нормальна в ней. Однако $|N_G(G_5)| = 20$. Следовательно, M не имеет дополнения в G. В группе $PSp_6(3)$ максимальная параболическая подгруппа P_2 не имеет дополнения (таблицы 1,2,3 [6]). Пусть q является четным числом. Если $q = 2$, то $Sp_4(2) \cong A_6$, и данный случай был рассмотрен. Поэтому будем считать, что $q \geq 4$. Группа $Sp_4(q)$ содержит максимальную подгруппу $M \cong Sp_4(q_0)$, где $GF(q_0)$ максимальное подполе в $GF(q)$. Из таблиц 1,2,3 [6] следует, что M не имеет дополнения в G.

Если $n \geq 3$, то из таблиц 1,2,3 [6] следует, что максимальная параболическая подгруппа P_2 не имеет дополнения в G.

5. $G \cong PSU_n(q)$, $n \geq 3$.

Если n является нечетным числом, то из таблиц 1,3 [6] следует, что только $G \in$ $\in \Omega = \{PSU_3(3), PSU_3(5), PSU_9(2)\}$ допускает максимальную факторизацию. При этом $U_3(3) = L_2(7).P_1$, $U_3(5) = A_7.P_1$, $U_9(2) = J_1.P_1$. Из [7] следует, что любая группа из множества Ω имеет максимальную подгруппу M, которая не изоморфна ни одному из сомножителей, факторизующих группу G. Поэтому M не имеет дополнения в G.

Пусть n является четным числом. Если $n \geq 6$, то из таблиц 1,3 [6] следует, что максимальная параболическая подгруппа P_1 не имеет дополнения в G. Пусть $n = 4$. Так как $U_4(2) \cong PSp_4(3)$, то из таблиц 1,3 [6] следует, что если G не изоморфна $PSU_4(3)$, то максимальная параболическая подгруппа P_1 не имеет дополнения в G. Если $G \cong$ $\cong PSU_4(3)$, то из таблиц 1,3 [6] и [7] следует, что максимальная подгруппа A_7 не имеет дополнения в G.

6. G — исключительная группа Шевалле.

Из таблицы 5 [6] следует, что $G \in \{G_2(q),\ q = 3^n;\ G_2(4),\ F_4(q),\ q = 2^n\}$. Рассмотрим максимальную подгруппу $M \cong P_1$. Из таблицы 5 [6] следует, что M не обладает дополнением.

7. $G \cong P\Omega_{2n+1}(q)$, $n \geq 3$.

Если q — четное число, то из таблиц 1,2,3 [6] следует, что группа G не имеет никаких факторизаций. Поэтому q является нечетным числом. Рассмотрим максимальную параболическую подгруппу $M \cong P_2$. Из таблиц 1,2,3 [6] следует, что M не имеет дополнений.

8. $G \in \{P\Omega^+_{2n}(q),\ n \geq 5;\ P\Omega^-_{2n}(q),\ n \geq 4;\ P\Omega^+_8(q)\}$.

Из таблиц 1,2,3,4 [6] следует, что во всех случаях максимальная параболическая подгруппа P_2 не имеет дополнений в G.

Теорема полностью доказана.

Как следствие доказательства теоремы 1 получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть G — простая неабелева группа, у которой любая максимальная подгруппа имеет дополнение. Тогда $G \in \{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$.*

Полное доказательство теоремы 2 можно найти в работе автора [9].

Abstract. The author obtained two results.

Let G be a finite simple group such that every subgroup of G admits a complement. Then G is isomorphic to $PSL_2(7)$.

Let G be a finite simple group such that every maximal subgroup of G admits a complement. Then G is isomorphic to $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ or $PSL_5(2)$.

Литература

1. Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). 14-е изд. Новосибирск: ИМ СО РАН. 1999.

2. Левчук В.М. О слабо факторизуемых группах, Мат. заметки, **73**, № 4 (2003), 565-572.

3. Лихарев А.Г. О слабо факторизуемых группах лиева типа малых рангов и спорадических группах, Algebra and model Theory 4, Новосибирск. НГТУ, 2003, 56–61.

4. Лихарев А.Г. О конечных слабо факторизуемых группах, Международная алгебраическая конфернция, посвященная 250-летию Московского университета. Тезисы

докладов. Москва.: Мех.-мат. МГУ, 2004, 88–89.

5. Лихарев А.Г. О слабо факторизуемых группах лиева типа малых рангов, Алгебра, логика и кибернетика: Материалы международной конференции, посвященной 75-летию со дня рождения профессора А.И. Кокорина. Иркутск, Издательство ГОУ ВПО ИГЛУ, 2004, 243–244.

6. Liebeck M.W., Praeger CE., Saxl J. The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups, Mem. Amer. Math. Soc., **86**, № 432 (1990), 1–151.

7. Conway J. H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A. and Wilson R.A. Atlas of Finite Groups, Oxford, 1985.

8. Huppert B., Blackburn N. Finite Groups, III, Berlin, Springer-Verlag, 1982.

9. Тютянов В.Н. Конечные простые слабо факторизуемые группы, Гомель, 2005, 12 с. (Препринт/Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины; №1).

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 10.03.06