

О ШУМАХ В ОБЛАСТИ ЗАХВАТА КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА

Н. Н. Розанов

Проведено сравнение предельно достижимой точности определения скорости вращения по частоте биений «идеального» лазерного гироскопа и (при произвольной ширине области захвата) по «фазовому методу» [5]. Показано, что при учете реальных условий эксперимента оба метода имеют одинаковые погрешности.

Одним из главных факторов, ограничивающих точность измерения угловой скорости по частоте биений встречных волн кольцевого лазера лазерного гироскопа, является явление захвата частоты. В связи с этим были предложены различные способы смещения области захвата и уменьшения ее ширины. Достигнутый успех позволяет ставить вопрос о принципиально достижимой точности «идеального» лазерного гироскопа, в котором ширина области захвата обращалась бы в нуль. В литературе можно встретить утверждение, что в этом случае минимальная обнаружимая угловая скорость и соответственно принципиально достижимая точность лазерного гироскопа соответствует частоте биений порядка естественной ширины линии лазерного излучения [1, 2]. Нетрудно, однако, видеть, что столь общее утверждение, в котором отсутствует какая-либо конкретизация условий эксперимента, не является обоснованным.

Теория естественной ширины линии излучения лазера была дана в целом ряде работ,¹ относящихся в основном к случаю генерации стоячих волн. Случай «идеальных» кольцевых лазеров рассматривался в недавних работах Климонтовича и Ланды [3] и Беленова [4]. Некоторые результаты исследования шумов в области захвата кольцевого лазера были кратко изложены в [5]. Основной целью нашего рассмотрения является сравнение предельно достижимой точности определения скорости вращения по частоте биений «идеального» лазерного гироскопа и (при произвольной ширине области захвата) по предложенному в [5] «фазовому методу», основанному на измерении разности фаз между бегущими волнами в области захвата. Мы будем основываться на проведенном Лэмбом [6] исследовании естественной ширины линии лазерного излучения.

Рассмотрим прежде всего «идеальный» лазерный гироскоп, захват в котором отсутствует. Бегущие в противоположных направлениях волны будем отмечать индексами 1 и 2. В пренебрежении амплитудными флуктуациями² дрейф фаз φ_1 и φ_2 бегущих волн описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= -\frac{\nu}{2\varepsilon_0 E_1} C_1^{(0)}, \\ \dot{\varphi}_2 &= -\frac{\nu}{2\varepsilon_0 E_2} C_2^{(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

¹ В [3] приведен обширный список экспериментальных и теоретических работ, посвященных исследованию шумов в газовых лазерах. См. также обзорную статью [8].

² Анализ амплитудных флуктуаций в «идеальном» кольцевом лазере содержится в [3, 4].

Здесь E_1 и E_2 — стационарные значения амплитуд волн, а $C_1^{(0)}$ и $C_2^{(0)}$ описывают стороннюю поляризацию некоторого стохастического источника [6]

$$C_{\mu}^{(0)}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \{a_{r\mu} \cos[(\nu_r - \omega_{\mu})t - \varphi_{\mu}] + b_{r\mu} \sin[(\nu_r - \omega_{\mu})t - \varphi_{\mu}]\} \quad (\mu = 1, 2). \quad (2)$$

Здесь $\nu_r = \frac{2\pi}{T_0} r$ ($r = 0, 1, 2, \dots$). Введенная для удобства рассмотрения величина T_0 позволяет иметь дело с дискретным, а не сплошным спектром шумов. Будем считать, что корреляции случайных величин $a_{r\mu}$ и $b_{r\mu}$ для различных направлений отсутствуют, т. е.

$$\langle a_{r_1\mu_1} b_{r_2\mu_2} \rangle = \langle a_{r_1\mu_1} b_{r_2\mu_1} \rangle \delta_{\mu_1\mu_2}. \quad (3)$$

В остальном свойства этих величин предполагаются такими же, как в [6].

Естественным обобщением результата Лэмба является соотношение

$$\langle [\varphi_{\mu}(t) - \varphi_{\mu}(0)]^2 \rangle = D_{\mu} t, \quad (4)$$

где

$$D_{\mu} = \left(\frac{\nu}{2\varepsilon_0 E_{\mu}} \right)^2 T_0 \langle a_{\omega_{\mu}, \mu}^2 \rangle. \quad (5)$$

Определим среднюю за время измерения T частоту биений следующим образом:

$$\nu_{\delta} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \{(\nu_2 - \nu_1) + [\dot{\varphi}_2(t) - \dot{\varphi}_1(t)]\}. \quad (6)$$

Для отклонения ν_{δ} от среднего значения имеем

$$\nu_{\delta} - \langle \nu_{\delta} \rangle = \{[\varphi_2(T) - \varphi_1(T)] - [\varphi_2(0) - \varphi_1(0)]\} T^{-1}, \quad (7)$$

и, согласно (3) и (4), погрешность измерения частоты биений характеризуется величиной

$$A = \sqrt{\langle [\nu_{\delta} - \langle \nu_{\delta} \rangle]^2 \rangle} = \sqrt{\frac{D_1 + D_2}{T}}. \quad (8)$$

Предположим, что измерению подлежит некоторая угловая скорость, про которую дополнительно известно, что она не меняется со временем. Тогда, согласно (8), скорость вращения может быть измерена с любой степенью точности, если время измерения T достаточно велико. Это нетрудно видеть и из (7), так как при возрастании T числитель увеличивается медленнее ($\sim \sqrt{T}$), чем знаменатель. Увеличение T эквивалентно увеличению числа измерений при фиксированном T . В такой формулировке очевидна прямая связь результата (8) с основными положениями теории вероятности и статистики.

В общем случае нельзя считать угловую скорость постоянной и приходится определять ее среднее за время измерения T значение, считая, что за время T эта скорость меняется незначительно.³ Следующая из (8) зависимость допустимой погрешности от времени измерения представляется вполне естественной.

Перейдем теперь к анализу шумов при захвате частоты. Будем считать, что источник шумов тот же, что и при отсутствии захвата, и снова пре-

³ Вопрос о влиянии углового ускорения рассмотрен Беленовым и Маркиным [2].

небрежем амплитудными флуктуациями. Вместо (1) для ψ -отклонения разности фаз от стационарного значения найдем

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{\tau} \psi - \frac{\nu}{2\varepsilon_0} \left[\frac{C_2^{(0)}}{E_2} - \frac{C_1^{(0)}}{E_1} \right]. \quad (9)$$

Здесь τ — время установления стационарного значения в отсутствие шумов, т. е. в обозначениях [7] $\tau = \left[\frac{1}{2} \varepsilon \frac{\omega}{Q} \cos(\varphi - \varphi_0) \right]^{-1}$.⁴ Для вычисления среднеквадратичной дисперсии разности фаз воспользуемся условием стационарности случайного процесса

$$\langle \psi^2(t + \Delta t) \rangle = \langle \psi^2(t) \rangle + 2\Delta t \langle \dot{\psi}(t) \psi(t) \rangle + \dots = \langle \psi^2(t) \rangle. \quad (10)$$

Поскольку (10) должно выполняться тождественно по Δt , получим

$$\langle \dot{\psi}(t) \psi(t) \rangle = 0.$$

Отсюда, используя (9), находим

$$\frac{1}{\tau} \langle \psi^2 \rangle = \left(\frac{\nu}{2\varepsilon_0} \right)^2 \left\langle \left[\frac{C_2^{(0)}(t)}{E_2} - \frac{C_1^{(0)}(t)}{E_1} \right] \times \int_0^t dt' \left[\frac{C_2^{(0)}(t')}{E_2} - \frac{C_1^{(0)}(t')}{E_1} \right] \exp \left[-\frac{t-t'}{\tau} \right] \right\rangle \quad (11)$$

и

$$\langle \psi^2 \rangle = \frac{D_1 + D_2}{2} \tau.$$

Качественно зависимость (11) была описана в [5]. Погрешность фазового метода будет характеризоваться величиной

$$B = \frac{1}{\tau} \sqrt{\langle \psi^2 \rangle} = \sqrt{\frac{D_1 + D_2}{2\tau}},$$

откуда

$$\frac{A}{B} = \sqrt{\frac{2\tau}{T}}. \quad (12)$$

Таким образом, отношение погрешностей двух методов не зависит от свойств источника шума, что позволяет надеяться на достаточную общность результата.

Для сравнения точности двух методов необходимо время измерения каждым методом считать одинаковым. Время измерения фазовым методом естественно принять порядка времени установления разности фаз τ [здесь, как и в (12), множитель порядка единицы несуществен]. Так, положив $T = 2\tau$, получим $\frac{A}{B} = 1$.

На основании (12) можно было бы заключить, что погрешность «метода биений» будет значительно меньше, чем погрешность «фазового метода», если $T \gg \tau$. Однако в этом случае за время T можно сделать не одно, а несколько независимых измерений разности фаз, что снова приведет к равенству погрешностей двух методов.

Автор благодарен Г. Н. Винокурову и О. Б. Данилову за полезные обсуждения.

⁴ Рассмотренный в [7] случай различных добротностей волн эффективно описывает имеющееся даже в отсутствие взаимного элемента различие коэффициентов усиления встречных волн в неидеальном кольцевом резонаторе, в котором поля этих волн в пределах активного вещества распределены несимметрично.

Литература

- [1] Н. Brunet. *Mém. Artill. Franç.*, 39, 437, 1965.
- [2] Э. М. Беленов, Е. П. Маркин. *ЖЭТФ*, Письма в редакцию, 7, 497, 1968.
- [3] Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда. *ЖЭТФ*, 56, 275, 1969.
- [4] Э. М. Беленов. *ЖТФ*, 39, 133, 1969.
- [5] Н. Н. Розанов, Г. Н. Винокуров, О. Б. Данилов. *Опт. и спектр.*, 23, 624, 1967.
- [6] У. Лэмб. В сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика». Изд. «Мир», М., 1966.
- [7] Н. Н. Розанов. *Опт. и спектр.*, 25, 449, 1968.
- [8] В. Е. Привалов, С. А. Фридрихов. *УФН*, 97, 377, 1969.

Поступило в Редакцию 11 августа 1969 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. СКОРИНЫ