ОБЗОРЫ

УДК 517.542

ИНВАРИАНТЫ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

В.С. Монахов, А.А. Трофимук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

INVARIANTS OF FINITE SOLVABLE GROUPS

V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk

F. Scorina Gomel State University, Gomel

К инвариантам конечной разрешимой группы относят производную и нильпотентную длины, p-длину, π-длину и нильпотентную π-длину, главный ранг и p-ранг и т. д. В данной статье приводится обзор результатов, связанных с инвариантами конечных разрешимых групп и примыкающих к исследованиям авторов. Раздел 1 содержит перечень используемых обозначений и определений. В разделе 2 собраны данные об инвариантах разрешимых групп с заданным строением силовских подгрупп. В разделе 3 перечислены оценки инвариантов группы в зависимости от индексов максимальных подгрупп. В разделе 4 содержится информация о нильпотентной π-длине π-разрешимых групп. Формулируются открытые вопросы.

Ключевые слова: *разрешимая группа, производная длина, нильпотентная длина, p-длина, π-длина, нильпотентная π-длина, главный ранг, p-ранг.*

The derived and nilpotent lengths, p-length, π-length, chief rank and p-rank and etc. are invariants of finite solvable group. The review of the results connected with invariants of finite solvable groups is given in this article. These results adjoin to the researches of authors. Section 1 contains the list of used designations and definitions. The data about invariants of solvable groups with given structure of Sylow subgroups are collected in Section 2. The estimations of the invariants depending on indexes of the maximal subgroups are listed in Section 3. The information about nilpotent π-length of π-solvable groups are contained in Section 4. Open questions are formulated.

Keywords: *solvable group, derived length, nilpotent length, p-length, π-length, nilpotent π-length, chief rank, p-rank.*

Введение

В данной статье систематизированы современные результаты теории конечных разрешимых групп, связанные с различными оценками их инвариантов. Статья носит обзорный характер и представляет собой изложение доклада авторов на Международной научной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, октябрь 2009). Доказательства утверждений не приводятся.

Все рассматриваемые в дальнейшем группы предполагаются конечными.

1 Обозначения и определения

Все обозначения и определения соответствуют принятым в [1]–[4].

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$ обозначим через π'. Символом π обозначается также функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел следующим образом: $\pi(a)$ – множество простых чисел, делящих натуральное число a. Для группы G и ее подгруппы H считаем, что $\pi(G)=\pi(|G|)$ и $\pi(G:H)=\pi(|G:H|)$.

Зафиксируем некоторое множество простых чисел π. Если $\pi(m)\subseteq\pi$, то натуральное число m называется *π-числом*. Группа G называется *π-группой,* если $\pi(G)\subseteq\pi$, и *π'-группой*, если $\pi(G)\subseteq\pi'$.

Подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются через $\Phi(G)$ и $F(G)$, а $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π-подгруппа группы G. Запись $G=[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1=G_0\subseteq G_1\subseteq\ldots\subseteq G_m=G,$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех $i=0,1,\ldots,m$. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются *факторами* этого ряда.

Дисперсивной по Оре называют группу G порядка

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n},\ p_1<p_2<\ldots<p_n,$$

у которой имеется нормальный ряд

$$G=G_0\supseteq G_1\supseteq\ldots\supseteq G_{n-1}\supseteq G_n=1$$

такой, что для каждого $i=1,2,\ldots,n$ фактор-группа G_{i-1}/G_i изоморфна силовской p_i-подгруппе группы G.

Для группы G можно построить цепочку коммутантов

$$G\supseteq G'\supseteq(G')'\supseteq\ldots\supseteq G^{(i)}\supseteq G^{(i+1)}\supseteq\ldots.$$

Здесь G' – коммутант группы G и $G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$. Если существует номер n такой, что $G^{(n)} = 1$, то группа G называется *разрешимой*. Наименьшее натуральное n, для которого $G^{(n)} = 1$, называется *производной длиной* и обозначается через $d(G)$.

Пусть G – группа и пусть $F_0(G) = 1$,

$F_1(G) = F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G,

$F_2(G)/F_1(G) = F(G/F_1(G)), \ldots, F_i(G)/F_{i-1}(G) = F(G/F_{i-1}(G)), \ldots$.

Ясно, что $1 = F_0(G) \subseteq F_1(G) \subseteq F_2(G) \subseteq \ldots$.

В разрешимой неединичной группе подгруппа Фиттинга отлична от единичной подгруппы. Поэтому для разрешимой группы существует неотрицательное целое число n такое, что $F_n(G) = G$. Наименьшее n, для которого $F_n(G) = G$, называют *нильпотентной длиной* разрешимой группы G и обозначают через $n(G)$. Другими словами, нильпотентной длиной называют длину самого короткого нормального ряда с нильпотентными факторами. Ясно, что $n(G) = 1$ тогда и только тогда, когда группа G нильпотентна. Группа называется *метанильпотентной*, если она содержит нильпотентную нормальную подгруппу, фактор-группа по которой нильпотентна. Ясно, что нильпотентная длина метанильпотентной группы не превышает 2.

Группа называется *π-разрешимой* [1], если она обладает нормальным рядом, факторы которого являются либо элементарными абелевыми p-группами для $p \in \pi$, либо π'-группами. Хорошо известно, что в каждой π-разрешимой группе индексы максимальных подгрупп являются либо примарными π-числами, либо π'-числами, см. например [1, теорема 1.8.1].

Пусть G – p-разрешимая группа. Это означает, что она обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G,$$

в котором каждая фактор-группа G_{i+1}/G_i является либо p-группой, либо p'-группой. Поэтому для такой группы можно определить (p', p)-ряд:

$$1 = P_0 \subseteq N_0 \subseteq P_1 \subseteq N_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \subseteq P_l \subseteq N_l = G,$$

где $N_i/P_i = O_{p'}(G/P_i)$ – наибольшая нормальная p'-подгруппа в G/P_i, а $P_{i+1}/N_i = O_p(G/N_i)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа в G/N_i. Наименьшее натуральное число l такое, что $N_l = G$, называют *p-длиной* группы G и обозначают через $l_p(G)$.

Если G – неединичная p-разрешимая группа и p^n – наибольшая из степеней простого числа p, делящая порядок главных факторов группы G, то число $n = r_p(G)$ называется *p-рангом* группы G, [4, с. 685]. Если G – разрешима, то она p-разрешима для всех $p \in \pi(G)$. *Главный ранг* разрешимой неединичной группы определим следующим образом:

$$r(G) = \max_{p \in \pi(G)} r_p(G).$$

Для единичной группы 1 полагают $r(1) = 0 = r_p(1)$. В силу теоремы Жордана-Гельдера любые два главных ряда группы G изоморфны, поэтому значения главного ранга и p-ранга определяются однозначно.

Группу G будем называть *p-сверхразрешимой*, если каждый из ее главных факторов является либо группой простого порядка, либо p'-группой. Ясно, что неединичная p-сверхразрешимая группа p-разрешима и имеет p-ранг 1. Если группа G p-сверхразрешима для любого $p \in \pi(G)$, то она называется *сверхразрешимой.* Главный ранг неединичной сверхразрешимой группы равен 1.

2 Инварианты группы в зависимости от силовских подгрупп

Ф. Холл и Г. Хигмен [5] установили зависимость p-длины p-разрешимой группы от некоторых инвариантов ее силовской p-подгруппы. Элементарная теория p-длины изложена в монографии Хупперта [4, глава VI.6], [6, глава IX]. Оценки p-длины p-разрешимой группы в зависимости от инвариантов пересечений силовских p-подгрупп найдены в работе А.Г. Анищенко и В.С. Монахова [7]. Обзор результатов по p-длине разрешимых групп по состоянию на 1980 год содержится в статье В.Д. Мазурова [8].

На произвольные группы понятие p-длины распространил Л.А. Шеметков и доказал, что p-длина любой группы не превышает минимального числа образующих ее силовской p-подгруппы [9]. Для p-разрешимых групп этот факт приводится в монографии Хупперта [4, теорема VI.6.6]. Естественно возник следующий вопрос, сформулированный в обзоре [10, с. 15].

***Вопрос* 1.** *Насколько существенно условие p-разрешимости в известных теоремах о p-длине*?

В работе [11] Л.А. Шеметков получил положительное решение этого вопроса для групп, неразрешимые композиционные факторы которых имеют циклическую силовскую p-подгруппу. В

Коуровской тетради им записан следующий вопрос [12, вопрос 3.60].

***Вопрос* 2.** *Исследовать зависимость между p-длиной группы и инвариантами c_p, d_p, e_p ее силовской p-подгруппы.*

Здесь c_p, d_p, e_p – ступень нильпотентности, производная длина и экспонента соответственно.

Согласно теореме Цассенхауза [4, теорема IV.2.11] *коммутант группы с циклическими силовскими подгруппами является циклической холловой подгруппой, фактор-группа по которой также циклическая. В частности, ее производная длина не выше 2.*

Ф. Холл и Г. Хигмен [4, теорема IV.14.16] установили, что *производная длина разрешимой группы G с абелевыми силовскими подгруппами не превышает числа простых делителей порядка группы: $d(G) \le |\pi(G)|$.*

Метациклическая группа – это группа, содержащая циклическую нормальную подгруппу, фактор-группа по которой также циклическая. Для групп с метациклической силовской подгруппой известны следующие утверждения.

***Теорема* 2.1** ([4, теоремы IV.2.8, IV.5.10, IV.8.6]).

1. *Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G. Если в группе G силовская p-подгруппа P циклическая, то группа G p-нильпотентна, т.е. существует нормальная подгруппа H такая, что фактор-группа G/H изоморфна P. В частности, если в группе G силовская 2-подгруппа циклическая, то G 2-нильпотентна.*

2. *Если силовская p-подгруппа группы G метациклическая и порядок группы G взаимно прост с p^2-1, то G p-нильпотента. В частности, если силовская 2-подгруппа группы G метациклическая и 3 не делит порядок G, то G 2-нильпотентна.*

3. *Если $p > 2$ и силовская p-подгруппа группы G метациклическая и неабелева, то в группе G существует нормальная подгруппа индекса p.*

Группы с метациклической силовской 2-подгруппой рассмотрены в работе В.Д. Мазурова [13]. Теорема 1 этой работы полностью описывает неразрешимые группы с циклическими силовскими p-подгруппами для нечетных простых p и метациклическими силовскими 2-подгруппами, а в леммах 3, 4 указана информация о разрешимых группах с метациклическими силовскими 2-подгруппами. Признаки разрешимости группы с метациклической силовской 2-подгруппой получены в работе Камины и Гагена [14]. Результаты этих работ объединены в следующей теореме.

***Теорема* 2.2** ([13], [14]). *Пусть G – группа с метациклической силовской 2-подгруппой G_2. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если G_2 имеет циклическую нормальную подгруппу N такую, что G_2/N циклическая и $|G_2/N| \ge 4$, то G разрешима.*

2. *Если G разрешима, то $|G/O_{2',2}(G)| \le 6$.*

3. *Если G разрешима и центр $Z(G_2)$ нециклический, то G обладает нормальным рядом*

$$1 \subseteq U \subseteq UG_2 \subseteq G,$$

где $|U|$ – нечетное число, а $|G:UG_2| = 1$ или 3.

4. *Если G разрешима и $Z(G_2)$ циклический, то G обладает нормальным рядом*

$$1 \subseteq U_1 \subseteq T_1 \subseteq U_2 \subseteq G,$$

где $|U_1|$ – нечетное число, T_1/U_1 – 2-группа, $|U_2:T_1|$ равен 1 или 3, $|G:U_2| = 1$ или 2.

Группы, у которых все силовские подгруппы метациклические, исследовались в работе Чиллага и Сона [15]. Теорема 1 этой работы полностью описывает такие неразрешимые группы и содержит следующее утверждение для разрешимых групп.

***Теорема* 2.3** ([15]). *Пусть G – разрешимая группа с метациклическими силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi(G)$. Тогда $\{2,3\}'$-холлова подгруппа группы G нормальна и дисперсивна по Оре.*

Бициклической называют группу $G = AB$, являющуюся произведением циклических подгрупп A и B. Ясно, что метациклическая группа всегда является бициклической. Общие свойства бициклических групп получены в работах [16]–[20] и вошли в монографию [4]. В частности, бициклическая примарная группа нечетного порядка является метациклической [4, теорема III.11.5]. Бициклические 2-группы и непримарные бициклические группы нечетного порядка могут быть неметациклическими.

***Пример* 1.** В статье Хупперта [16] построена 2-группа

$$G = \langle a,b,c \mid a^2 = b^8 = c^2 = 1,$$
$$[a,b] = c, [b,c] = b^4, [a,c] = 1 \rangle,$$

которая содержит нормальную элементарную абелеву подгруппу

$$N = \langle a \rangle \times \langle b^4 \rangle \times \langle c \rangle$$

порядка 8 с циклической фактор-группой G/N порядка 4. Кроме того,

$$Z(G) = \langle b^4 \rangle, G' = \langle c \rangle \times \langle b^4 \rangle, \Phi(G) = \langle b^2, c \rangle,$$
$$(ab)^2 = cb^2 \notin \langle b \rangle, (ab)^4 = b^4, G = \langle ab \rangle \langle b \rangle.$$

Поэтому G – бициклическая группа порядка 2^5, она неметациклическая, т. к. содержит

нормальную элементарную абелеву подгруппу N порядка 8.

***Пример* 2.** Вычисления в компьютерной системе GAP [21] показывают, что группа порядка $189 = 3^3 7$ под номером 7 из библиотеки SmallGroups, имеющая вид

$$G =< a,b,c,d \mid b^3 = c^3 = d^7 = 1,\ a^3 = c, [a,b] = c^{-1},$$
$$[a,d] = d^{-1}, [a,c] = [b,c] = [b,d] = [c,d] = 1 >,$$

является произведением двух своих циклических подгрупп $A =< bd >$ порядка 21 и $B =< ab >$ порядка 9. Поэтому G – бициклическая группа нечетного непримарного порядка. В G существуют только три нетривиальные циклические нормальные подгруппы: $N_1 =< c >$ порядка 3, $N_2 =< d >$ порядка 7, $N_3 =< cd >$ порядка 21. Так как фактор-группы по этим подгруппам не являются циклическими, то G неметациклическая.

Бициклическая группа $G = AB$ сверхразрешима, имеет абелев коммутант, а при $|A| \geq |B|$ подгруппа A содержит неединичную нормальную в G подгруппу [4, теоремы VI.4.4 и VI.10.1]. Из определения бициклической группы следует, что бициклическими являются каждая ее силовская подгруппа и всякая ее фактор-группа. У бициклической примарной группы G подгруппа Фраттини, центр и

$$\Theta(G) =< x^p \mid x \in G >$$

являются бициклическими подгруппами [16]. Другие свойства бициклических примарных групп перечислены в следующей теореме.

***Теорема* 2.4** ([16], [22]). *Пусть G – бициклическая p-группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть $p > 2$. Тогда:*

1.1) *G – метациклическая группа;*

1.2) *любые две подгруппы группы G перестановочны;*

1.3) *если N – дополняемая нормальная подгруппа группы G, то либо $N = G$, либо N циклическая.*

2. *Пусть $p = 2$. Тогда:*

2.1) *любая нормальная подгруппа группы G порождается не более, чем тремя элементами;*

2.2) *если N – дополняемая нормальная подгруппа группы G, то $|N/\Phi(N)| \leq 4$.*

В.Д. Мазуров показал, что *если $\alpha \neq 1$ – автоморфизм нечетного порядка метациклической 2-группы T, то порядок α равен 3, T – группа кватернионов порядка 8 или прямое произведение двух изоморфных циклических групп, причем в последнем случае α действует на T без неподвижных точек* [13, лемма 1]. Несложно проверить, что это утверждение сохраняется для бициклических 2-групп.

Известно также, что *фактор-группа G/G' бициклической 2-группы G с нециклическим коммутантом G' является абелевой группой типа $(n,1)$, где $n > 1$ – целое число* [18]. В этой же работе рассмотрены бициклические 2-группы G с циклическим коммутантом G'. Оказалось, что *фактор-группа G/G' является абелевой типа $(2^r, 2)$ в том случае, когда не существует циклической подгруппы N, не содержащей G'.* Блэкберн [19] доказал, что *нециклический коммутант бициклической 2-группы G с фактор-группой G/G' типа $(n,1)$, $n > 2$ является абелевой типа $(m,1)$ для подходящего m.*

Инварианты разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами получены в работе В.С. Монахова и Е.Е. Грибовской [22]. Приведем полную формулировку этих результатов.

***Теорема* 2.5** ([22, теоремы 1–2, лемма 2]).

1. *Пусть G – разрешимая группа, у которой все силовские подгруппы бициклические. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1.1) *$n(G) \leq 4$ и $d(G) \leq 6$;*

1.2) *$\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна в группе и дисперсивна по Оре;*

1.3) *$2'$-холлова подгруппа $G_{2'}$ дисперсивна по Оре, имеет нильпотентный коммутант и $d(G_{2'}) \leq 3$;*

1.4) *$3'$-холлова подгруппа $G_{3'}$ дисперсивна по Оре, имеет нильпотентный сверхразрешимый корадикал и $d(G_{3'}) \leq 4$;*

1.5) *$n(G_{\{2,3\}}) \leq 3$ и $d(G_{\{2,3\}}) \leq 4$;*

1.6) *$\{2,p\}$-холлова подгруппа $G_{\{2,p\}}$ дисперсивна по Оре и $d(G_{\{2,p\}}) \leq 4$ для любого $p > 3$.*

2. *Если G – p-разрешимая группа с бициклической силовской p-подгруппой, то $l_p(G) \leq 1$ при $p > 2$ и $l_2(G) \leq 2$ при $p = 2$.*

Следствие. ([22, следствие]) *Группа G нечетного порядка с метациклическими силовскими подгруппами дисперсивна по Оре и имеет нильпотентный коммутант. В частности, G метанильпотентна и $d(G) \leq 3$.*

В 2009 г. авторы обзора показали, что в формулировку теоремы 2.5 можно добавить условие <силовские p-подгруппы имеют порядок p^3>. Оценка производной длины сохранится.

***Теорема* 2.6** (В.С. Монахов, А.А. Трофимук [23]). *Пусть G – разрешимая группа, у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовские p-подгруппы либо бициклические, либо порядка p^3. Тогда*

производная длина группы G не превышает 6 *и* $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$ *и* $l_p(G) \le 1$ *при* $p > 3$. *В частности, если G – A_4-свободная группа, то производная длина группы G не превышает* 4.

Напомним, что группа G называется A_4-свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4.

Следствие ([23, следствие]). *Пусть G – группа нечетного порядка, у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовская p-подгруппа либо бициклическая, либо порядка p^3. Тогда производная длина группы G не превышает* 3.

***Пример* 3.** Группа $GL(2,3)$ порождается матрицами

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$a^8 = b^2 = c^3 = 1, a^b = a^3, (a^2)^c = ab,$$

$$(ab)^c = aba^2, c^b = c^{-1},$$

[24, лемма XII.5.3]. Ясно, что

$$GL(2,3) = < a > ([< c >] < b >),$$

т. е. группа $GL(2,3)$ является произведением подгруппы $< a >$ порядка 8 и $[< c >] < b >$ порядка 6. Производная длина группы $GL(2,3)$ равна 4. Значит, оценка производной длины в п. 1.5 теоремы 2.5 является точной.

***Пример* 4.** В системе компьютерной алгебры GAP построен пример, показывающий точность оценки $d(G) = 6$ в теореме 2.6. Это группа G порядка 6000, содержащая нормальную экстраспециальную подгруппу H порядка 5^3 такую, что фактор-группа $G/H \cong S$, где $S = \langle a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^4 = abc \rangle$ – группа порядка 48.

***Пример* 5.** Возможности системы GAP позволили найти A_4-свободную группу $[[Z_3 \times Z_3]Z_3]Q_8$ порядка 216, удовлетворяющую условию теоремы 2.6. Она имеет производную длину равную 4. Здесь Q_8 – группа кватернионов порядка 8, а Z_n – циклическая группа порядка n. Таким образом, оценка производной длины A_4-свободной группы является точной. Кроме того, данная группа является дисперсивной по Оре.

Отметим, что теоремы 2.5 и 2.6 охватывают все разрешимые группы $G = AB$ с циклическими силовскими подгруппами в факторах A и B. Но такие факторизуемые группы обладают новыми свойствами, не присущими группам с бициклическими силовскими подгруппами.

Пусть p – простое число. Группу с циклической силовской p-подгруппой называют z_p*-группой*, а z*-группа* – это группа, у которой все силовские подгруппы циклические.

***Теорема* 2.7** (Я.Г. Беркович [25], Р. Майер [26]). *Пусть $G = AB$, где A и B – z_p-подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если порядок G нечетен, то G p-сверхразрешима.*

2. *Если группа G p-разрешима, а подгруппы A и B p-нильпотентны, то G p-сверхразрешима.*

3. *Если порядок G нечетен, A и B – z-подгруппы, то G сверхразрешима.*

Если группа $G = AB$ имеет четный порядок, A и B – z-подгруппы, то группа G может быть неразрешимой. Примером служит симметрическая группа S_5 степени 5, которая является произведением z-подгруппы порядка 20 и циклической подгруппы порядка 6.

В.Д. Мазуров [27] доказал, что *группа $G = AB$ непроста, если A и B являются z-подгруппами.* Кроме того, В.Д. Мазуров ([28, с. 75]) для любого простого p>2 указал примеры не p-сверхразрешимой разрешимой группы четного порядка, которая является произведением двух z_p-подгрупп.

Новая информация о разрешимых группах, факторизуемых двумя z-подгруппами, получена В.С. Монаховым.

***Теорема* 2.8** ([29, теорема, следствия 2–4]).

1. *Если 3-разрешимая группа $G = AB$, где A и B являются z_p-подгруппами для $p = 2$ и $p = 3$, то группа G 3-сверхразрешима.*

2. *Если $\{2,3\}$-группа $G = AB$, где A и B – z-подгруппы и $l_2(G) \le 1$, то группа G сверхразрешима.*

3. *Если S_4-свободная $\{2,3\}$-группа $G = AB$, где A и B – z-подгруппы, то G сверхразрешима.*

4. *Разрешимая группа $G = AB$, где A и B – z-подгруппы, обладает нормальным рядом длины ≤ 3 со сверхразрешимыми факторами.*

Отметим, что для получения 3-сверхразрешимости группы G в условии теоремы 2.8 нельзя заменить факторизуемость требованием, что силовские 2- и 3-подгруппы в группе бициклические. Примером служит группа $[E_9]Z_8$, являющаяся расширением элементарной абелевой группы E_9 порядка 3^2 с помощью циклической группы Z_8 порядка 2^3, которая неприводимо действует на E_9.

Камина и Гаген доказали, что *если $G = AB$ – неразрешимая группа, A – циклическая подгруппа, B – метациклическая подгруппа, то*

$G/S(G) \cong PGL(2,p)$, $p>3$, *p – простое число,* [30]. Здесь $S(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G.

Отметим также следующее предложение, полученное В.С. Монаховым: *если* $G = AB$, $A \cap B = 1$, *A – z_2-подгруппа четного порядка, B – собственная подгруппа, то группа G содержит подгруппу индекса* 2 [31, лемма 2]. В.Д. Мазуров [27] требование $A \cap B = 1$ ослабил до следующего: пересечение $A \cap B$ имеет нечетный порядок.

Нормальный ранг $r_n(P)$ конечной p-группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \lhd P} log_p \mid X/\Phi(X) \mid, \qquad (2.1)$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P, в том числе и P. Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X. Из теоремы Бернсайда о базисе [4, теорема III.3.15] следует, что нормальный ранг $r_n(P)$ есть наименьшее натуральное число k такое, что любая нормальная подгруппа p-группы P порождается не более, чем k элементами. Очевидно, что p-группа нормального ранга 1 циклическая. Метациклическая p-группа имеет нормальный ранг ≤ 2. Бициклическая 2-группа имеет нормальный ранг ≤ 3. Развитием теоремы 2.5 является следующая теорема.

***Теорема* 2.9** ([32]).

1. *Если G – разрешимая группа с силовскими подгруппами нормального ранга ≤ 3, то нильпотентная длина группы G не превышает* 5, *а p-длина не превышает* 2 *для всех простых p.*

2. *Если G – разрешимая группа с силовской 2-подгруппой нормального ранга ≤ 3 и силовскими p-подгруппами нормального ранга ≤ 2 для всех $p>2$, то $n(G) \le 4$, $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$ и $l_p(G) \le 1$ для всех простых $p>3$.*

3. *Если G – группа нечетного порядка с силовскими подгруппами нормального ранга ≤ 2, то G метанильпотентна.*

4. *Если G – разрешимая группа с силовскими подгруппами нормального ранга ≤ 2, то $n(G) \le 4$, $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$ и $l_p(G) \le 1$ для всех простых $p>3$. Кроме того, для холловых подгрупп группы G справедливы следующие утверждения:*

4.1) $n(G_{2'}) \le 2$;

4.2) $n(G_{3'}) \le 3$;

4.3) $n(G_{\{2,3\}}) \le 3$;

4.4) $n(G_{\{2,p\}}) \le 2$ *для любого* $p>3$.

Оценки инвариантов разрешимой группы с произвольными нормальными рангами силовских подгрупп будут представлены в разделе 3.

В.С. Монахов [33] установил зависимость инвариантов разрешимой группы от порядков силовских подгрупп.

***Теорема* 2.10** ([33]). *Если порядок разрешимой группы G не делится на $(n+1)$-е степени простых чисел, то справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $n \in \{2,3,4\}$, *то* $d(G/\Phi(G)) \le 3+n$;

2) *если* $n \in \{5,6,7\}$, *то* $d(G/\Phi(G)) \le 8$;

3) *если* $n \in \{8,9\}$, *то* $d(G/\Phi(G)) \le 1+n$;

4) *если* $n \in \{10,\ldots,17\}$, *то* $d(G/\Phi(G)) \le 11$;

5) *если* $n \in \{18,\ldots,25\}$, *то* $d(G/\Phi(G)) \le 12$;

6) *если* $n \in \{26,\ldots,33\}$, *то* $d(G/\Phi(G)) \le 13$;

7) *если* $n \in \{34,\ldots,65\}$, *то* $d(G/\Phi(G)) \le 14$;

8) *если* $n \ge 66$, *то*

$$d(G/\Phi(G)) \le 1+5log(n-2)+53/10.$$

В частности, в любом случае

$$d(G/\Phi(G)) \le 3+n.$$

***Теорема* 2.11** ([33]). *Если порядок группы G нечетен и не делится на $(n+1)$-е степени простых чисел, то справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $n \le 2$, *то* $d(G/\Phi(G)) \le 2$;

2) *если* $n \in \{3,4\}$, *то* $d(G/\Phi(G)) \le 3$;

3) *если* $5 \cdot 7^x \le n < 15 \cdot 7^x$,

то $d(G/\Phi(G)) \le 4+2x$;

4) *если* $15 \cdot 7^x \le n < 5 \cdot 7^{x+1}$,

то $d(G/\Phi(G)) \le 5+2x$.

Следует отметить, что оценка производной длины, полученная на основании общей методики исследования разрешимых групп с ограничениями на порядки силовских подгрупп, является неточной при малых значениях порядков. Например, если порядки силовских подгрупп разрешимой группы G свободны от кубов, т. е $n \le 2$ в теореме 2.10, то $d(G) \le 3$, а из теоремы 2.10 вытекает оценка $d(G/\Phi(G)) \le 5$. Информация о строении групп порядка, свободного от кубов, представлена в следующей теореме.

***Теорема* 2.12** ([34]). *Пусть G – разрешимая группа, у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовская p-подгруппа либо циклическая, либо имеет порядок p^2. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *производная длина группы G не превышает* 3;

2) *$2'$-холлова подгруппа метабелева.*

А.А. Трофимук [35] заметил, что для оценки производной длины разрешимой группы достаточно рассматривать порядки силовских подгрупп только ее подгруппы Фиттинга. Кроме

того, существенное влияние на верхнюю границу производной длины группы оказывают порядки не всех силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга, а только тех, которые не являются бициклическими, если таковые имеются.

***Теорема* 2.13** (Трофимук [35]). *Пусть G – разрешимая непримарная группа и F – ее подгруппа Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\pi^*(F) \neq \varnothing$, то*

$$d(G) \leq \rho(t(F)) + max\ \{d(F_p) \mid p \in \pi(F)\}.$$

2. *Если $\pi^*(F) = \varnothing$, то $d(G) \leq 6$.*

Здесь $\pi^*(F)$ – множество всех простых чисел p из $\pi(F)$, для которых силовская p-подгруппа в F не является бициклической. Если $\pi^*(F) = \varnothing$, то в группе F все силовские подгруппы бициклические. Функции $t_p(F)$ и $t(F)$ определяются следующим образом:

$$t_p(F) = log_p(|F_p|), t(F) = \max_{p \in \pi^*(F)} t_p(F).$$

Через $\rho(n)$ обозначается максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп группы $GL(n,F)$ степени n, где F – поле. Согласно теореме Цассенхауза [36] такая функция $\rho(n): \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует и не зависит от поля F. Значения функции $\rho(n)$ для каждого n известны, см. например [37]–[40].

Следствие ([35]). *Пусть G – разрешимая непримарная группа и F – ее подгруппа Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если силовские подгруппы в F бициклические, то производная длина не превышает* 6.

2. *Если $\pi^*(F) \neq \varnothing$,*

то $d(G) \leq \rho(t(F)) + \delta(t(F)) + 1$.

Здесь $\delta(n) = max\{d \in \mathbb{N} \mid n \geq 2^d + 2d - 2\}$.

Нахождение инвариантов разрешимых групп с заданными свойствами силовских подгрупп нашло развитие в исследовании строения групп по свойствам силовских подгрупп в факторах их нормальных рядов.

Если у группы G имеется нормальный ряд с циклическими силовскими подгруппами в факторах, то несложно проверить, что G сверхразрешима. Поэтому группа G дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен, и нильпотентная длина группы G не выше 2. Поскольку любая p-группа имеет нормальный ряд с факторами простых порядков, то производную длину таких групп ограничить сверху нельзя. Однако, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ будет не выше 2.

Исследование разрешимых групп, обладающих нормальным рядом, факторы которого имеют бициклические силовские подгруппы, проведено в 2009 г. авторами настоящего обзора.

***Теорема* 2.14** (В.С. Монахов, А.А. Трофимук [41]). *Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом, факторы которого имеют бициклические силовские подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нильпотентная длина группы G не превышает* 4, *а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает* 5.

2. $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ *и* $l_p(G) \leq 1$ *для всех простых* $p > 3$.

3. *Если группа G A_4-свободна, то:*

3.1) $l_p(G) \leq 1$ *для любого простого* p;

3.2) *производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает* 3.

4. *Если G имеет нечетный порядок, то коммутант группы G нильпотентен. В частности, фактор-группа $G/\Phi(G)$ метабелева.*

Ясно, что теорема 2.14 охватывает все группы, обладающие нормальным рядом с бициклическими факторами.

Следующие примеры показывают, что оценки, полученные в теореме 2.14, являются точными.

***Пример* 6.** Хорошо известно, что группа S_4 имеет нормальный ряд

$$1 \subset E_4 \subset A_4 \subset S_4$$

с бициклическими факторами и $l_2(S_4) = 2$.

Группа $G = [E_{3^2}]SL(2,3)$ имеет нормальный ряд

$$1 \subset E_{3^2} \subset [E_{3^2}]Z_2 \subset [E_{3^2}]Q_8 \subset [E_{3^2}]SL(2,3)$$

с бициклическими факторами и $l_3(G) = 2$.

***Пример* 7.** Пусть E_{7^2} – элементарная группа порядка 7^2. Ее группой автоморфизмов является полная линейная группа $GL(2,7)$ с циклическим центром $Z = Z(GL(2,7))$ порядка 6. Выберем в группе Z подгруппу C порядка 2. Очевидно, что C нормальна в $GL(2,7)$. Вычисления в компьютерной системе GAP показывают, что в $GL(2,7)$ существует подгруппа S порядка 48 такая, что фактор-группа S/C изоморфна симметрической группе S_4 степени 4. Полупрямое произведение $G = [E_{7^2}]S$ является группой порядка $2352 = 2^4 7^2 3$, причем $\Phi(G) = 1$. Нильпотентная длина группы G равна 4, производная длина равна 5. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset E_{7^2} \subset [E_{7^2}]Z_2 \subset [E_{7^2}]Q_8 \subset$$
$$\subset [[E_{7^2}]Q_8]Z_3 \subset [E_{7^2}]S = G$$

с бициклическими факторами:

$E_{7^2}, ([E_{7^2}]Z_2)/(E_{7^2}) \cong Z_2, ([E_{7^2}]Q_8)/([E_{7^2}]Z_2) \cong E_4,$
$([[E_{7^2}]Q_8]Z_3)/([E_{7^2}]Q_8) \cong Z_3, (G/[[E_{7^2}]Q_8]Z_3) \cong Z_2.$

***Пример* 8.** Пусть E_{5^2} – элементарная абелева группа порядка 5^2. Ее группой автоморфизмов является полная линейная группа $GL(2,5)$, в которой имеется подгруппа, изоморфная симметрической группе S_3 степени 3. Полупрямое произведение $G = [E_{5^2}]S_3$ является A_4-свободной группой с единичной подгруппой Фраттини. Производная длина группы G равна 3. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset E_{5^2} \subset [E_{5^2}]Z_3 \subset [E_{5^2}]S_3 = G$$

с бициклическими факторами:

$E_{5^2}, ([E_{5^2}]Z_3)/(E_{5^2}) \cong Z_3, ([E_{5^2}]S_3)/([E_{5^2}]Z_3) \cong Z_2.$

3 Инварианты группы в зависимости от индексов максимальных подгрупп

Одной из первых работ, в которой исследовалось влияние величины индексов максимальных подгрупп на строение группы, была статья Хупперта [42]. Здесь получены следующие утверждения.

***Теорема* 3.1** ([42, теоремы 9, 14, 16, 17]).

1. *Тогда и только тогда группа G сверхразрешима, когда все ее максимальные подгруппы имеют простые индексы.*

2. *Если индексы всех максимальных подгрупп разрешимой группы G являются простыми числами либо квадратами простых чисел, то четвертый коммутант группы G нильпотентен и группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3\}'$-холлову подгруппу. Кроме того, если группа G имеет нечетный порядок, то ее второй коммутант нильпотентен.*

3. *Если G – разрешимая группа, и индексы всех ее максимальных подгрупп являются простыми числами, либо квадратами простых чисел, либо кубами простых чисел, то шестой коммутант группы G нильпотентен. Если такая группа имеет нечетный порядок, то ее четвертый коммутант нильпотентен.*

В 1958 г. Ф. Холл показал, что в п. 2 теоремы 3.1 разрешимость группы можно заранее не предполагать.

***Теорема* 3.2** (Ф. Холл [43, теорема 10.5.7]). *Если индексы всех максимальных подгрупп в группе G являются простыми числами, либо квадратами простых чисел, то G разрешима.*

Этот результат Л.Я. Поляков [44] распространил на нормальные подгруппы. Он установил разрешимость нормальной подгруппы K группы G при условии, что индексы максимальных подгрупп группы G, не содержащих K, примарны и свободны от кубов. В случае $K = G$ получается теорема 3.2.

Л.А. Шеметков [45] установил π-сверхразрешимость (π, π')-разрешимой нормальной подгруппы K группы G, у которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих K, являются простыми числами из π либо не делятся ни на одно простое число из π. Отсюда следует сверхразрешимость нормальной подгруппы K группы G с простыми индексами максимальных подгрупп, не содержащих K, а при $K = G$ получается утв. 1 теоремы 3.1.

Результаты Л.А. Шеметкова и Л.Я. Полякова получили развитие в работах В.С. Монахова, М.В. Селькина и С.Ф. Каморникова [46]–[49], см. также [50, глава 3].

Д.А. Ходанович [51] заметил, что для разрешимости группы достаточно ограничивать индексы только ненильпотентных максимальных подгрупп.

***Теорема* 3.3** ([51]).

1. *Если в группе G индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число, то группа G метанильпотентна.*

2. *Если в группе G индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число либо квадрат простого числа, то группа G разрешима.*

***Пример* 9.** Пусть группа $G = [E_{3^2}]S$, где S – силовская 2-подгруппа группы $GL(2,3)$, которая действует неприводимо на группе E_{3^2}. В этой группе максимальные подгруппы исчерпываются подгруппами S и $E_{3^2}M_i$, где M_i – максимальная подгруппа в S. Поэтому ненильпотентные максимальные подгруппы группы G имеют индекс 2. Этот пример указывает на то, что группа из п. 1 теоремы 3.3 может не обладать абелевым коммутантом.

***Пример* 10.** В простой группе $PSL(2,7)$ индексы максимальных подгрупп принадлежат множеству $\{7,8\}$, причем максимальные подгруппы индекса 8 являются сверхразрешимыми подгруппами порядка 21, а максимальные подгруппы индекса 7 изоморфны симметрической группе S_4. Этот пример показывает, что группы с простыми индексами несверхразрешимых максимальных подгрупп могут быть неразрешимыми.

Более детальное исследование групп, в которых индексы максимальных подгрупп примарны и не делятся на кубы простых чисел, проведено в работах С.Ф. Каморникова [52], В.С. Монахова, М.В. Селькина и Е.Е. Грибовской [22], [53].

***Теорема* 3.4** ([52], [22], [53]). *Пусть G – группа, у которой индексы максимальных подгрупп являются простыми числами или*

квадратами простых чисел. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $r(G/\Phi(G)) \le 2$;

2) $n(G) \le 4$, $d(G/\Phi(G)) \le 5$;

3) $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$ *и* $l_p(G) \le 1$ *для всех простых* $p > 3$.

Кёлер [54] показал, что *если в группе G нечетного порядка индексы максимальных подгрупп делят квадраты простых чисел, то и в каждой подгруппе индексы максимальных подгрупп делят квадраты простых чисел.* В этой же работе построена группа R порядка $2^a p^b$, где p – нечетное простое число, в которой индексы всех максимальных подгрупп принадлежат множеству $\{2, 4, p, p^2\}$, но в группе R существует подгруппа H, обладающая максимальной подгруппой индекса $p^{2^t} > p^2$. Таким образом, в группах четного порядка условие <индексы максимальных подгрупп делят квадраты простых чисел> не наследуется подгруппами.

Если рассматривать группы с индексами максимальных подгрупп, равными простым числам, квадратам простых чисел или 8, то такие группы могут быть неразрешимыми. Примером служит простая группа $PSL(2,7)$. Для описания неразрешимых групп с примарными индексами максимальных подгрупп можно воспользоваться теоремой Гуральника: *если в группе G все максимальные подгруппы имеют примарные индексы, то либо G – разрешима, либо* $G/S(G) \cong PSL(2,7)$, [55]. Этот результат можно также вывести из теоремы Л.С. Казарина [56]. Обе работы используют классификацию конечных простых групп. Здесь $S(G)$ – разрешимый радикал группы G.

Итак, если в группе G индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел либо 8 и группа неразрешима, то $G/S(G) \cong PSL(2,7)$. Строение разрешимых групп с такими ограничениями на индексы максимальных подгрупп было изучено Е.Е. Грибовской и А.А. Трофимуком.

***Теорема* 3.5** ([57], [58], [59]). *Пусть G – разрешимая группа, у которой индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел либо 8. Тогда четвертый коммутант группы G нильпотентен и* $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$ *и* $l_p(G) \le 1$ *при* $p > 3$. *В частности, если G –* A_4*-свободная группа, то справедливы следующие утверждения:*

1) $l_p(G) \le 1$ *для любого простого* $p \in \pi(G)$;

2) *второй коммутант группы G нильпотентен.*

Отметим, что из теоремы Гуральника [55] следует разрешимость A_4-свободной группы, индексы максимальных подгрупп которой либо простые числа, либо квадраты простых чисел, либо 8.

Строение разрешимых групп, индексы максимальных подгрупп которых равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел, получено в работах В.С. Монахова, М.В. Селькина и Е.Е. Грибовской.

***Теорема* 3.6** ([22], [53], [60], [61]). *Если G – разрешимая группа, у которой индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых простых чисел, то:*

1) $r(G/\Phi(G)) \le 3$;

2) $n(G) \le 5$, $d(G/\Phi(G)) \le 6$;

3) $l_p(G) \le 2$ *для всех* p.

В.С. Монахов и Д.А. Ходанович развили эти результаты за счет рассмотрения индексов только несверхразрешимых максимальных подгрупп.

***Теорема* 3.7** ([62], [63]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация, содержащая все сверхразрешимые группы.*

1. *Если в разрешимой группе G индекс каждой максимальной подгруппы, не принадлежащей* $\mathfrak{F}$, *есть простое число, квадрат простого числа либо куб простого числа, то* $G \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{N}_2\mathfrak{F}$. *В частности,* $n(G) \le 5$, *а* $l_p(G) \le 2$ *для всех простых* p.

2. *Если в группе G нечетного порядка индекс каждой максимальной подгруппы, не принадлежащей* $\mathfrak{F}$, *есть простое число, квадрат простого числа либо куб простого числа, то* $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}\mathfrak{F}$. *Кроме того, если порядок группы G не делится на* 3, *то* $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.

3. *Если в группе G нечетного порядка индекс каждой несверхразрешимой максимальной подгруппы есть простое число, квадрат простого числа либо куб простого числа, то нильпотентная длина группы G не выше* 3.

Здесь $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_2$ обозначают формации всех абелевых, нильпотентных и 2-групп соответственно, а $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ – произведение формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$. Как всегда, $\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$.

***Пример* 11.** Элементарная абелева группа E_{3^6} порядка 3^6 имеет группу автоморфизмов, изоморфную $[Z_7]Z_3$, которая действует неприводимо на E_{3^6}. Поэтому полупрямое произведение $[E_{3^6}]([Z_7]Z_3)$ является группой, у которой 3-длина равна 2, и все несверхразрешимые максимальные подгруппы имеют индекс 3 или 7. Поэтому оценка p-длины в теореме 3.7 – точная.

Для исследования свойств разрешимых групп в зависимости от произвольной величины индексов максимальных подгрупп В.С. Монахов [33] предложил на множестве всех разрешимых групп рассматривать следующие функции.

$$m_p(G) = \max\{\log_p |G:M| \mid M <_{max} G, |G:M| = p^a\},$$
$$p \in \pi(G);$$
$$m(G) = \max_{p\in\pi(G)} m_p(G). \qquad (3.1)$$

Здесь запись $H <_{max} G$ означает, что H – максимальная подгруппа группы G.

Инварианты разрешимых групп, для которых $m(G) \le 3$, перечислены в теоремах 3.1–3.7. Для произвольных значений $m(G)$ справедлива следующая теорема.

***Теорема* 3.9** (В.С. Монахов [33, теорема 1]). *Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $r(G/\Phi(G)) = m(G)$;

2) $d(G/\Phi(G)) \le 1 + \rho(m(G)) \le 3 + m(G)$;

3) $l_p(G) \le 1 + t$, *где* $2^{t-1} < m_p(G) \le 2^t$.

Здесь через $\rho(n)$ – максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп группы $GL(n,F)$ степени n, где F – поле.

Следствие ([33, следствия 1.1, 1.2]).

1. *Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1.1) *если* $m(G) \in \{2,3,4\}$,
то $d(G/\Phi(G)) \le 3 + m(G)$;

1.2) *если* $m(G) \in \{5,6,7\}$,
то $d(G/\Phi(G)) \le 8$;

1.3) *если* $m(G) \in \{8,9\}$,
то $d(G/\Phi(G)) \le 1 + m(G)$;

1.4) *если* $m(G) \in \{10,\ldots,17\}$,
то $d(G/\Phi(G)) \le 11$;

1.5) *если* $m(G) \in \{18,\ldots,25\}$,
то $d(G/\Phi(G)) \le 12$;

1.6) *если* $m(G) \in \{26,\ldots,33\}$,
то $d(G/\Phi(G)) \le 13$;

1.7) *если* $m(G) \in \{34,\ldots,65\}$,
то $d(G/\Phi(G)) \le 14$;

1.8) *если* $m(G) \ge 66$,
то $d(G/\Phi(G)) \le 1 + 5log(n-2) + 53/10$.

2. *Пусть G – группа нечетного порядка. Тогда справедливы следующие утверждения:*

2.1) *если* $m(G) \le 2$, *то* $d(G/\Phi(G)) \le 2$;

2.2) *если* $m(G) \in \{3,4\}$, *то* $d(G/\Phi(G)) \le 3$;

2.3) *если* $5\cdot 7^x \le m(G) < 15\cdot 7^x$,
то $d(G/\Phi(G)) \le 4 + 2x$;

2.4) *если* $15\cdot 7^x \le m(G) < 5\cdot 7^{x+1}$,
то $d(G/\Phi(G)) \le 5 + 2x$.

Для группы G положим $s(G) = \max_{p\in\pi(G)} r_n(G_p)$. Напомним, что $r_n(G_p)$ – нормальный ранг силовской p-подгруппы G_p, определяемый формулой (2.1). В лемме 12 работы [33] доказано, что $m_p(G) \le r_n(G_p)$ *для любого простого p и любой разрешимой группы G; в частности,* $m(G) \le s(G)$. Это утверждение позволяет распространять полученные результаты об индексах максимальных подгрупп на разрешимые группы с ограниченными нормальными рангами силовских подгрупп. В частности, в теореме 3.9 и в ее следствии функцию $m(G)$ можно заменить на $s(G)$.

Введенная функция $m(G)$ позволяет также установить существование новых сопряженных классов подгрупп в произвольных разрешимых группах.

***Теорема* 3.10** (В.С. Монахов [33, теорема 2]). *Для любого натурального числа k в каждой разрешимой группе G существует подгруппа H, обладающая следующими свойствами:*

1) $m(H) \le k$;

2) *если* $H \le H_1 < T \le G$, *то существует подгруппа M такая, что:*

2.1) $H_1 \le M <_{max} T$;

2.2) $|T:M| = p^t$ *и* $t > k$.

Кроме того, любые две подгруппы группы G, обладающие свойствами 1)–2), *сопряжены между собой.*

В случае $k = 1$ теорема 3.10 превращается в результат Гашюца о существовании и сопряженности сверхразрешимых проекторов (т. е. проекторов, соответствующих классу всех сверхразрешимых групп) в разрешимых группах, см. например [3, теорема 5.39].

В работе Я.Г. Берковича и Л.С. Казарина [64] содержится вопрос 5.5.

***Вопрос* 3.** *Пусть всякая собственная немаксимальная подгруппа группы G содержится в подгруппе простого индекса группы G; верно ли, что G – разрешимая группа?*

Положительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

***Теорема* 3.11** (В.С. Монахов, В.Н. Тютянов [65]). *Если G – группа, у которой любая собственная немаксимальная подгруппа содержится в подгруппе простого индекса, то фактор-группа $G/F(G)$ сверхразрешима.*

Обратно, если M – максимальная подгруппа конечной группы G и $G/F(G)$ сверхразрешима, то каждая немаксимальная подгруппа в фактор-группе G/M_G содержится в подгруппе простого индекса.

Здесь $M_G = \cap_{g\in G} M^g$ – ядро подгруппы M в группе G.

***Пример* 12.** В группе $SL(2,3)$ силовская 2-подгруппа нормальна, а силовская 3-подгруппа немаксимальна и не содержится ни в какой подгруппе простого индекса.

Этот пример указывает на то, что существует группа, являющаяся расширением нильпотентной группы с помощью сверхразрешимой, в которой имеется немаксимальная подгруппа, не содержащаяся ни в одной подгруппе простого индекса.

Если G – неединичная разрешимая группа, то подгруппа Фраттини является собственной подгруппой в подгруппе Фиттинга группы G [4, теорема III.4.2]. Поэтому существуют максимальные подгруппы в группе G, которые не содержат подгруппу Фиттинга. В.С. Монахов получил следующий результаты.

***Теорема* 3.12** ([66], [67]). *Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Подгруппа Фраттини группы G совпадает с пересечением максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга.*

2. *Если $H <_{max} G$ и $|G:H| = p^h$, p – простое, то существует подгруппа $M <_{max} G$ такая, что:*

2.1) *$F(G)$ не содержится в M;*

2.2) *$|G:M| = q^m$, q – простое, и $h \le m$.*

3. *Существует максимальная подгруппа H, не содержащая подгруппу Фиттинга, такая, что $|G:H| = p^{r(G/\Phi(G))}$ для некоторого простого числа p.*

Обратим внимание на то, что в разрешимой группе индексы максимальных подгрупп примарны, т. е. являются степенями простых чисел. Поэтому записи $|G:H| = p^h$, $|G:M| = q^m$ не являются ограничениями, а служат только для обозначения и фиксирования показателей h и m.

Замечание. Б. Хупперт [42] доказал следующее утверждение: *если G – разрешимая группа с абелевыми силовскими подгруппами, то имеется максимальная подгруппа M в группе G индекса $p^{r(G)}$ для некоторого простого p*. В этой же работе на стр. 418 приводится пример разрешимой группы, показывающий, что условие абелевости силовских подгрупп опустить нельзя. Если в п. 3 теоремы 3.12 принять $\Phi(G) = 1$, то в теореме Хупперта условие <силовские подгруппы абелевы> может быть заменено условием <подгруппа Фраттини группы G единична>.

При доказательстве п. 3 теоремы 3.12 существенную роль играют фиттинговы главные факторы группы G. Главный фактор H/K называется *фиттинговым*, если подгруппа H содержится в подгруппе Фиттинга $F(G)$ группы G.

Гашюц [68] установил справедливость следующего утверждения: *если H/K – главный фактор наибольшего порядка разрешимой группы G, то подгруппа H содержится в $F(G)$*. Отсюда не следует, что каждый главный фактор порядка $p^{r(G)}$, p – простое число, является фиттинговым. Примером служит любая сверхразрешимая ненильпотентная группа.

Поэтому вполне естественно возникает вопрос о существовании в разрешимых группах фиттинговых главных факторов порядка $p^{r(G)}$, p – простое число. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

***Теорема* 3.13** (В.С. Монахов [66, теорема 2]). *В каждой разрешимой неединичной группе G существует нильпотентная нормальная подгруппа K такая, что $\Phi(G) \le K$, $K/\Phi(G)$ – главный фактор группы G и $|K/\Phi(G)| = p^{r(G/\Phi(G))}$ для некоторого простого числа p.*

Следствие ([42, теорема 13], [4, теорема V.9.9]). *Пусть G – разрешимая группа. Если существует нормальный ряд*

$$\Phi(G) = N_0 \lhd N_1 \lhd \ldots \lhd N_{m-1} \lhd N_m = F(G),$$

такой, что $N_i \lhd G$ и фактор-группы N_i/N_{i-1} имеют простые порядки, $i = 1,2,\ldots,m$, то группа G сверхразрешима.

В силу теоремы 3.12 в определениях функций $m_p(G)$ и $m(G)$, см. формулу (3.1), можно ограничиться только максимальными подгруппами, не содержащими подгруппу Фиттинга. Значения этих функций будет прежним в силу п. 2 теоремы 3.12. Поэтому многие предыдущие теоремы останутся справедливыми, если в них рассматривать только максимальные подгруппы, не содержащие подгруппу Фиттинга. В частности, справедливо

Следствие.

1. *Тогда и только тогда разрешимая группа сверхразрешима, когда каждая ее максимальная подгруппа, не содержащая подгруппу Фиттинга, имеет простой индекс.*

2. *Если индекс каждой максимальной подгруппы группы G, не содержащей подгруппу Фиттинга, есть простое число, либо квадрат простого числа, то $n(G) \le 4$, $d((G/\Phi(G)) \le 5$, а $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$ и $l_p(G) \le 1$ для любого простого $p > 3$.*

3. *Если индекс каждой максимальной подгруппы разрешимой группы G, не содержащей подгруппу Фиттинга, есть простое число, либо квадрат простого числа,*

либо куб простого числа, то $n(G) \le 5$, $d(G/\Phi(G)) \le 6$, *а* $l_p(G) \le 2$ *для любого* p.

Другие исследования разрешимых групп с ограничениями на индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, проведены в работах В.С. Монахова [69], Д.А. Ходановича [63], М.А. Грибовской [70]–[75], см. также [76].

***Теорема* 3.14** ([69]). *Пусть* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Если в разрешимой группе* G *индекс каждой неметанильпотентной максимальной подгруппы, не содержащей подгруппу Фиттинга, не делится на* p^{k+1} *для всех* $p \in \pi(G)$, *то* $n(G) \le max\{3, 1+\rho(k)\}$.

Используя значения функции $\rho(k)$ для конкретных k, можно из теоремы 3.14 вывести верхние оценки для $n(G)$, как это делалось, например, в следствии теоремы 3.9.

Замечание. Если G – разрешимая ненильпотентная группа, то существуют максимальные подгруппы, содержащие подгруппу Фиттинга. Ясно, что пересечение $\Phi_F(G)$ максимальных подгрупп группы G, содержащих $F(G)$, тоже содержит $F(G)$ и $\Phi_F(G)/F(G) = \Phi(G/F(G))$. В частности, в разрешимой ненильпотентной группе G всегда подгруппа $\Phi_F(G)$ метанильпотентна.

***Пример* 13.** В неразрешимой группе $SL(2,5)$ центр, подгруппа Фраттини и подгруппа Фиттинга совпадают и имеют порядок 2. Поэтому в группе $SL(2,5)$ нет максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга. Следовательно, оба утверждения теоремы 3.12 в неразрешимых группах нарушаются.

В [77] Гашюц установил, что *пересечение* $\Delta(G)$ *максимальных ненормальных подгрупп ненильпотентной конечной группы* G *нильпотентно и* $\Delta(G)/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$, см. также [4, с. 276]. Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X, а $Z(X)$ – центр группы X. Развитием этого результата Гашюца и теоремы 3.12 является следующая

***Теорема* 3.15** ([78]). *Пусть* G *– разрешимая ненильпотентная группа. Тогда подгруппа* $\Delta(G)$ *совпадает с пересечением максимальных ненормальных подгрупп группы* G, *не содержащих подгруппу Фиттинга.*

Напомним, что секцией группы G называется фактор-группа H/K, где H – подгруппа группы G и K – нормальная подгруппа в H. Z_n – циклическая группа порядка n. E_{p^n} – элементарная абелева группа порядка p^n. A_n, S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n.

Приведем интересные наблюдения В.С. Монахова, связанные с отсутствием в группе максимальных подгрупп фиксированных индексов.

***Теорема* 3.16** ([79]).

1. *В группе* G *нечетного порядка нет максимальных подгрупп индекса* p^2, *где* p *– наименьший простой делитель порядка группы* G.

2. *Если у группы* G *нет эпиморфных образов, изоморфных* A_4 *и* S_4, *то в* G *нет максимальных подгрупп индекса* 4.

Следствие.

1. *Пусть группа G имеет нечетный порядок и p – наименьший простой делитель порядка группы G. Тогда каждая подгруппа индекса* p^2 *субнормальна.*

2. *Если у группы G нет эпиморфных образов, изоморфных* A_4 *и* S_4, *то в группе G каждая подгруппа индекса* 4 *субнормальна.*

3. *Пусть в группе G нет секций, изоморфных* A_4, *и p – наименьший простой делитель порядка G. Если силовская p-подгруппа группы G имеет порядок p или* p^2, *то G p-нильпотентна.*

4. *Пусть в группе G нет секций, изоморфных* A_4, *и p – наименьший простой делитель порядка G. Если силовская p-подгруппа группы G имеет порядок p или* p^2, *то G p-сверхразрешима.*

***Пример* 14.** В диэдральной группе

$$D_{24} = \langle a, b \mid a^2 = b^{12} = 1, aba = b^{11} \rangle$$

порядка 24 подгруппа $H = \langle a \rangle \times \langle b^4 \rangle$ порядка 6 и индекса 4 субнормальна, но не нормальна.

***Теорема* 3.17** ([79]).

1. *Пусть G – группа нечетного порядка и p – наименьший простой делитель порядка группы G. Тогда группа G не имеет главных факторов порядка* p^2.

2. *Пусть в группе G нет секций, изоморфных* A_4. *Тогда группа G не имеет главных факторов порядка* 4.

В связи с теоремами 3.16 и 3.17 приведем с доказательством следующее утверждение Я.Г. Берковича [80, с. 86].

***Теорема* 3.18.** *В разрешимой группе подгруппа наименьшего индекса нормальна.*

*Доказательство***.** Пусть G – разрешимая группа и K – подгруппа наименьшего индекса. По индукции $K_G = 1$, поэтому группа G примитивна: $G = [N]K$, где N – минимальная нормальная подгруппа в G. Пусть $x \in G \setminus K$. Тогда $KK^x \ne G$,

$$|KK^x| = \frac{|K||K^x|}{|K \cap K^x|} < |G| = |K||N|,$$

$$\frac{|K|}{|K \cap K^x|} < |N|.$$

Теперь подгруппа $N(K \cap K^x)$ имеет индекс в группе G, меньший, чем индекс подгруппы K:

$$|G : N(K \cap K^x)| = \frac{|G|}{|N||K \cap K^x|} =$$

$$= \frac{|G : N|}{|K \cap K^x|} = \frac{|K|}{|K \cap K^x|} < |N|.$$

Получили противоречие. Поэтому допущение неверно и K нормальна в группе G.

Следствие. *В разрешимой группе подгруппа наибольшего порядка нормальна.*

Следуя М.В. Селькину [50, с. 134], через $\Phi_k(G)$ обозначим пересечение максимальных подгрупп группы G, индексы которых не равны p^i для любого простого p и всех $i = 1, 2, \ldots, k$. М.В. Селькин установил, что *в любой группе G подгруппа $\Phi_1(G)$ сверхразрешима, а подгруппа $\Phi_2(G)$ разрешима* [50, теорема 3.4.2]. Теоремы 3.4, 3.6 позволяют получить новую информацию о инвариантах подгрупп $\Phi_2(G)$, $\Phi_3(G)$.

***Теорема* 3.19** ([53, следствия 2.5, 2.6]).

1. *В любой группе G подгруппа $\Phi_2(G)$ обладает следующими свойствами:*

1.1) $n(\Phi_2(G)) \le 4$, *а* $l_2(\Phi_2(G)) \le 2$, $l_3(\Phi_2(G)) \le 2$ *и* $l_p(\Phi_2(G)) \le 1$ *для любого простого* $p > 3$;

1.2) $d(\Phi_2(G)/\Phi(\Phi_2(G))) \le 5$.

2. *Если в группе G подгруппа $\Phi_3(G)$ разрешима, то:*

2.1) $n(\Phi_3(G)) \le 5$ *и* $l_p(\Phi_3(G)) \le 2$ *для любого простого* p;

2.2) $d(\Phi_3(G)/\Phi(\Phi_3(G))) \le 6$.

В работах В.М. Левчука, А.Г. Лихарева [81] и В.Н. Тютянова [82] установлено, что простая группа с дополняемыми максимальными подгруппами изоморфна $PSL(2,7)$, $PSL(2,11)$ или $PSL(5,2)$. В этих группах максимальные подгруппы являются холловыми подгруппами. Поэтому вполне естественно возникла задача изучения групп, в которых каждая максимальная подгруппа холлова. В этом направлении В.С. Монахов доказал следующую теорему.

***Теорема* 3.20** ([83]). *Для π-разрешимой группы G следующие утверждения эквивалентны:*

1) *главные π-факторы группы G изоморфны силовским подгруппам;*

2) *каждая максимальная подгруппа, индекс которой – π-число, является холловой подгруппой;*

3) *множество максимальных подгрупп группы G, индекс которых – π-число, совпадает с множеством p-дополнений для всех $p \in \pi$;*

4) *π-холлова подгруппа каждой нормальной πd-подгруппы группы G является π-холловой подгруппой группы G.*

При $\pi = \pi(G)$ непосредственно из теоремы вытекает

***Следствие* 3.20.1.** *Для разрешимой группы G следующие утверждения эквивалентны:*

1) *главные факторы группы G изоморфны силовским подгруппам;*

2) *каждая максимальная подгруппа является холловой подгруппой;*

3) *множество максимальных подгрупп группы G совпадает с множеством p-дополнений для всех $p \in \pi$;*

4) *каждая нормальная подгруппа группы G является холловой.*

***Следствие* 3.20.2.** *Пусть в разрешимой группе G каждая максимальная подгруппа является холловой подгруппой. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *группа G дисперсивна и каждая силовская подгруппа элементарная абелева;*

2) *подгруппа Фраттини группы G единична, а подгруппа Фиттинга является холловой подгруппой, и все силовские подгруппы из подгруппы Фиттинга являются минимальными нормальными подгруппами группы G;*

3) *если* $|F(G)| = p_1^{a_1} \ldots p_t^{a_t}$, $p_1, \ldots, p_t$ – *различные простые числа, то производная длина группы G не превышает числа*

$$\min\{|\pi(G)|, \max\{1 + a_i \mid i = 1, \ldots, t\}\}.$$

***Следствие* 3.20.3.** *Тогда и только тогда в сверхразрешимой группе каждая максимальная подгруппа является холловой подгруппой, когда каждая силовская подгруппа имеет простой порядок. В частности, сверхразрешимая группа с холловыми максимальными подгруппами метациклична.*

Остается открытым следующий вопрос, сформулированный в работе [83].

***Вопрос* 4.** *Каковы неабелевы композиционные факторы конечной неразрешимой группы с холловыми максимальными подгруппами?*

4 Нильпотентная π-длина π-разрешимых групп

Для группы G рассмотрим ряд

$$1 = P_0 \subseteq N_0 \subseteq P_1 \subseteq N_1 \subseteq P_2 \subseteq N_2 \subseteq \ldots,$$

$$N_i/P_i = O_{\pi'}(G/P_i), P_{i+1}/N_i = O_\pi(G/N_i), i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Здесь $O_{\pi'}(X)$ и $O_\pi(X)$ – наибольшие нормальные π'- и π-подгруппы группы X

соответственно. Если группа G π-разрешима, то $N_k = G$ для некоторого натурального k. Наименьшее натуральное k с этим свойством называют *π-длиной π-разрешимой группы G* и обозначают через $l_\pi(G)$. При $\pi = \{p\}$ определение π-длины π-разрешимой группы превращается в определение p-длины.

С понятием π-длины π-разрешимой груп-пы связана следующая задача Л.А. Шеметкова [12, вопрос 11.119].

***Вопрос* 5.** *Верно ли, что для любого непустого множества π простых чисел π-длина π-разрешимой группы ограничена сверху производной длиной $d(G_\pi)$ ее π-холловой подгруппы?*

Н.С. Черников и А.П. Петравчук [84] показали, что $l_\pi(G) \le 2d(G_\pi)$, а Л.С. Казарин [85] дал положительный ответ в случае, когда $2 \notin \pi$. Таким образом, вопрос остается открытым.

Картер, Фишер и Хоукс [86] ввели понятие нильпотентной π-длины разрешимой группы как обобщение нильпотентной длины и p-длины одновременно. Для π-разрешимой группы G нильпотентная π-длина определяется следующим образом. Пусть

$$P_0^n = 1,\ N_i^n/P_i^n = O_{\pi'}(G/P_i^n),$$

$$P_{i+1}^n/N_i^n = F(G/N_i^n),\ i = 0,1,2,\ldots.$$

У π-разрешимой группы G существует номер k такой, что $N_k^n = G$. Наименьшее k, для которого $N_k^n = G$, называется *нильпотентной π-длиной группы G* и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Поскольку P_{i+1}^n/N_i^n – нильпотентная π-группа, а N_i^n/P_i^n – π'-группа, то $l_\pi(G) \le l_\pi^n(G)$. Если $\pi = \{p\}$, то $l_\pi^n(G) = l_\pi(G) = l_p(G)$. Ясно также, что равенство $l_\pi(G) = l_\pi^n(G)$ сохраняется для π-разрешимой группы с нильпотентной π-холловой подгруппой.

Если $\pi(G) \subseteq \pi$, то π-разрешимая группа G становится разрешимой, а значение нильпотентной π-длины группы G совпадает со значением нильпотентной длины. Если группа G разрешима и $\pi \subseteq \pi(G)$, $\pi \ne \pi(G)$, то понятия нильпотентной π-длины и π-длины представляют самостоятельный интерес. Одной из первых работ по нильпотентной π-длине π-разрешимой группы была статья Нумата [87]. В ней установлены следующие три факта.

***Теорема* 4.1.**

1. *Если G – π-разрешимая группа, то $l_\pi^n(G) \le 1 + c_\pi^m(G)$, где $c_\pi^m(G)$ – число классов сопряженных ненормальных максимальных подгрупп группы G, чьи индексы принадлежат π.*

2. *Если G – разрешимая группа, то $n(G) \le 1 + c^m(G)$, где $c^m(G)$ – число классов сопряженных ненормальных максимальных подгрупп группы G.*

3. *Для любого n существует разрешимая группа G такая, что нильпотентная длина группы G равна n, а число сопряженных классов сопряженных ненормальных максимальных подгрупп равно $n-1$.*

Ввиду п. 3 от единицы в качестве слагаемого в п. 1 и 2 теоремы 4.1 избавиться нельзя. Но если рассматривать все максимальные подгруппы, то это, очевидно, сделать можно. Это наблюдение приводит к следующей теореме.

***Теорема* 4.2** ([88]).

1. *Если G – π-разрешимая группа, то $l_\pi^n(G)$ не превышает числа классов сопряженных максимальных подгрупп ее π-холловой подгруппы.*

2. *Пусть G – π-разрешимая группа. Зафиксируем максимальную подгруппу H, индекс которой есть π-число. Пусть K – пересечение всех тех несопряженных с H максимальных подгрупп группы G, индекс которых есть π-число. Тогда $l_\pi^n(K) \le 2$.*

3. *Нильпотентная длина разрешимой группы не превышает числа классов сопряженных максимальных подгрупп.*

В связи с п. 3 теоремы 4.1 и 4.2 вполне естественно возникает следующий вопрос.

***Вопрос* 6.** *Как связана производная длина разрешимой группы с числом классов сопряженных (ненормальных) максимальных подгрупп?*

Оценкам нильпотентной π-длины π-разрешимой группы посвящена работа Н.С. Черникова и А.П. Петравчука [84].

***Теорема* 4.3** ([84], теорема 1). *Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда $l_\pi^n(G) \le d(G_\pi)$, если выполняется хотя бы одно из следующих условий: G_2 абелева; $2 \in \pi$ и G_π – 2-разложима; $2 \notin \pi$ и G_π – 3-разложима; $2 \notin \pi$ и подгруппа G_3 абелева.*

В.С. Монахов и О.А. Шпырко доказали следующую теорему.

***Теорема* 4.4** ([89]). *Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^n(G) \le d(G_\pi)$,*

2) $l_\pi^n(G) \le 2d(G_\pi)$.

Поскольку $l_\pi(G) \le l_\pi^n(G)$ для каждой π-разрешимой группы G, то эта теорема обобщает приведенные выше результаты Л.С. Казарина [85], Н.С. Черникова и А.П. Петравчука [84], в которых аналогичные оценки получены для $l_\pi(G)$. В связи с теоремой 4.4 вполне естественно возникает следующий вопрос.

***Вопрос* 7.** *Верно ли, что для любого непустого множества π простых чисел нильпотентная π-длина π-разрешимой группы G ограничена сверху производной длиной $d(G_\pi)$ ее π-холловой подгруппы?*

Понятно, что положительное решение этого вопроса приведет к решению сформулированной выше задачи Л.А. Шеметкова.

С понятием нильпотентной π-длины также связана следующая гипотеза, предложенная В.С. Монаховым [12, вопрос 15.61].

***Вопрос* 8.** *Верно ли, что*

$$l_\pi^n(G) \le n(G_\pi) - 1 + \max_{p\in\pi} l_p(G)$$

для любой π-разрешимой группы?

Здесь $n(G_\pi)$ – нильпотентная длина π-холловой подгруппы G_π группы G.

В случае, когда π-холлова подгруппа нильпотентна, гипотеза справедлива ([84, лемма 4]). Она также справедлива, когда π-холлова подгруппа сверхразрешима либо является минимальной несверхразрешимой группой. Это вытекает из следующей теоремы.

***Теорема* 4.5** ([89], [90]).

1. *Пусть G – π-разрешимая группа, у которой коммутант π-холловой подгруппы нильпотентен. Тогда $l_\pi^n(G) \le 1 + \max_{p\in\pi} l_p(G)$.*

2. *Пусть G – π-разрешимая группа у которой все собственные подгруппы ее π-холловой подгруппы сверхразрешимы. Тогда*

$$l_\pi^n(G) \le n(G_\pi) - 1 + \max_{p\in\pi} l_p(G) \le 2 + \max_{p\in\pi} l_p(G).$$

Из этой теоремы вытекает ряд следствий, дающих новые оценки нильпотентной π-длины π-разрешимой группы в зависимости от строения ее π-холловой подгруппы либо от типов силовских p-подгрупп для $p \in \pi$.

Следствие.

1. *Если в π-разрешимой группе G силовские p-подгруппы циклические для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^n(G) \le 2$.*

2. *Пусть G – π-разрешимая группа с метабелевой π-холловой подгруппой. Тогда $l_\pi^n(G) \le 3$, а в случае, когда $2 \notin \pi$, $l_\pi^n(G) \le 2$.*

3. *Если G – π-разрешимая группа с вполне факторизуемой π-холловой подгруппой, то $l_\pi^n(G) \le 1 + \max_{p\in\pi} l_p(G) \le 2$.*

4. *Если G – π-разрешимая группа, π-холлова подгруппа которой является группой Шмидта, то $l_\pi^n(G) \le 2$.*

Напомним, что группа G называется вполне факторизуемой, если в ней существуют дополнения к каждой подгруппе. Группа Шмидта – это ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Пусть $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп и k – натуральное число. Тогда $\mathfrak{N}^k$ – класс всех разрешимых групп нильпотентной длины $\le k$. Известно, что класс $\mathfrak{N}^k$ является насыщенной формацией и классом Фиттинга, см. например [3, теорема 5.39]. Поэтому в каждой разрешимой группе существуют $\mathfrak{N}^k$-проекторы и $\mathfrak{N}^k$-инъекторы [3, теоремы 5.15, 5.45].

К. Дёрк [91] доказал следующие утверждения.

***Теорема* 4.6.** ([91], [3, теоремы 4.30, 5.54])

1. *Если M – максимальная подгруппа разрешимой группы G, то $n(M) = n(G) - i$, $i \in \{0,1,2\}$.*

2. *Если в разрешимой группе G существует подгруппа, которая является одновременно $\mathfrak{N}^k$-проектором и $\mathfrak{N}^k$-инъектором, и $k \ge 2$, то $G \in \mathfrak{N}^k$.*

***Пример* 15.** Все три значения $i \in \{0,1,2\}$ в п. 1 теоремы 4.6 возможны. В неединичной нильпотентной группе для любой максимальной подгруппы $i = 0$. В симметрической группе S_3 для любой максимальной подгруппы $i = 1$. В симметрической группе S_4 для максимальной подгруппы, совпадающей с силовской 2-подгруппой, $i = 2$.

При $k = 1$ второе утверждение нарушается. Примером служит симметрическая группа S_4 степени 4, в которой силовская 2-подгруппа является одновременно $\mathfrak{N}$-проектором и $\mathfrak{N}$-инъектором.

А. Баллестер-Болинше и М. Перец-Рамос [92] перенесли первое утверждение на $\mathfrak{F}$-длину. Если $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то $\mathfrak{F}$-длину разрешимой группы G можно определить как нильпотентную длину ее $\mathfrak{F}$-корадикала, [92], [93, V.5.2]. Другими словами, $\mathfrak{F}$-длина разрешимой группы G есть наименьшее натуральное число $n = n_{\mathfrak{F}}(G)$ такое, что $G \in \mathfrak{N}^n\mathfrak{F}$. Ясно, что при $\mathfrak{F} = (1)$ получаем определение нильпотентной длины.

***Теорема* 4.7** ([92, теорема 1]). *Если $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и M – максимальная подгруппа разрешимой группы G, то $n_{\mathfrak{F}}(M) = n_{\mathfrak{F}}(G) - i$, $i \in \{0,1,2\}$.*

В.С. Монахов и О.А. Шпырко перенесли теорему Дёрка на π-разрешимые группы. Вначале определим для каждого натурального числа k следующие классы:

$\mathfrak{L}_\pi(k)$ – класс всех разрешимых групп π-длины $\le k$,

$\mathfrak{L}_\pi^n(k)$ – класс всех разрешимых групп нильпотентной π-длины $\le k$.

Оба класса являются насыщенными формациями и классами Фиттинга [3, теорема 5.39]. Поэтому каждая разрешимая группа обладает $\mathfrak{L}_\pi(k)$- и $\mathfrak{L}_\pi^n(k)$-проекторами, $\mathfrak{L}_\pi(k)$- и $\mathfrak{L}_\pi^n(k)$-инъекторами [3, теоремы 5.15, 5.45].

Ясно, что в случае, когда π – множество всех простых чисел, имеем равенство $\mathfrak{L}_\pi^n(k) = \mathfrak{N}^k$.

***Теорема* 4.8** (В.С. Монахов, О.А. Шпырко [94]).

1. *Если G – π-разрешимая группа и M – ее максимальная подгруппа, то*

$$l_\pi^n(M) = l_\pi^n(G) - i,\ i \in \{0,1,2\}.$$

2. *Если в разрешимой группе G некоторый $\mathfrak{L}_\pi^n(k)$-проектор является $\mathfrak{L}_\pi^n(k)$-инъектором и $k \geq 2$, то $G \in \mathfrak{L}_\pi^n(k)$.*

***Теорема* 4.9** (В.С. Монахов, О.А. Шпырко [94]).

1. *Если G – π-разрешимая группа и M – ее максимальная подгруппа, то*

$$l_\pi(M) = l_\pi(G) - i,\ i \in \{0,1\}.$$

2. *Если в разрешимой группе G некоторый $\mathfrak{L}_\pi(k)$-проектор является $\mathfrak{L}_\pi(k)$-инъектором, то $G \in \mathfrak{L}_\pi(k)$.*

При $\pi = \{p\}$ получаем

Следствие.

1. *Пусть p – простое число и G – p-разрешимая группа. Если M – максимальная подгруппа, то $l_p(M) = l_p(G) - i$, $i \in \{0,1\}$.*

2. *Если в разрешимой группе G некоторый $\mathfrak{L}_p(k)$-проектор является $\mathfrak{L}_p(k)$-инъектором, то $G \in \mathfrak{L}_p(k)$.*

Результаты Дёрка являются частными случаями теоремы 4.8 при $\pi = \pi(G)$. В случае, когда $\pi \subseteq \pi(G)$, $\pi \neq \pi(G)$, все утверждения теорем 4.8, 4.9 и следствия 4.9.1 являются новыми для любой конечной разрешимой группы G.

Другие результаты, связанные с π-длиной и нильпотентной π-длиной, содержатся в работах [95]–[99].

В связи с теоремами 4.6–4.9 вполне естественно возникает следующая задача.

***Вопрос* 9.** *Найти наименьшее натуральное число k, если оно существует, при котором $d(G) - d(M) \leq k$ для любой конечной разрешимой группы G и любой ее максимальной подгруппы M.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чунихин, С.А.* Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск : Наука и техника, 1964. – 158 с.

2. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978. – 272 с.

3. *Монахов, В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

4. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.

5. *Hall, P.* The *p*-length of a *p*-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.

6. *Huppert, B.* Endliche Gruppen II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1982.

7. *Анищенко, А.Г.* Центральные пересечения и *p*-длина *p*-разрешимых групп / А.Г. Анищенко, В.С. Монахов // Доклады АН БССР. – 1977. – Т. 21, № 11. – С. 968–971.

8. *Мазуров, В.Д.* О *p*-длине разрешимых групп / В.Д. Мазуров // VI Всесоюзный симпозиум по теории групп : сб. науч.ст. – Киев, 1980. – С. 50–60.

9. *Шеметков, Л.А.* О частично разрешимых конечных группах / Л.А. Шеметков // Математический сборник. – 1967. – Т. 72, № 1. – С. 97–107.

10. *Чунихин, С.А.* Конечные группы / С.А. Чунихин, Л.А. Шеметков // Алгебра. Топология. Геометрия: сб. науч.ст. / ВИНИТИ АН СССР. – Москва, 1971. – С. 7–70.

11. *Шеметков, Л.А.* О *p*-длине произвольных конечных групп / Л.А. Шеметков // Доклады АН БССР. – 1969. – Т. 13, № 5. – С. 394–395.

12. *Коуровская тетрадь* (нерешенные вопросы теории групп). Издание 16. – Новосибирск : Институт математики им. С.Л. Соболева, 2006.

13. *Мазуров, В.Д.* О конечных группах с метациклическими силовскими 2-подгруппами / В.Д. Мазуров // Сиб. матем. ж. – 1967. – Т. 8, № 5. – С. 966–982.

14. *Camina, A.R.* Groups with metacyclic Sylow 2-subgroups / A.R. Camina, T.M. Gagen // Canad. J. Math. – 1969. – Vol. 21. – P. 1234–1237.

15. *Chillag, D.* Sylow-metacyclic groups and *Q*-admissibility / D. Chillag, J. Sonn // Isr. J.Math. – 1981. – T. 40, № 3–4. – P. 307–323.

16. *Huppert, B.* Uber das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1953. – Vol. 58. – P. 243–264.

17. *Ito, N.* Uber das Produkt von zwei zyklischen 2-gruppen / N. Ito // Pub. Math. – 1956. – Vol. 4. – P. 517–520.

18. *Ito, N.* Sur les Groupes Factorisables par Deux 2-Groupes Cycliques I, II / N. Ito, A. Oxara // Pros. Japan Acad. Tokyo. – 1956. – Vol. 32. – P. 736–740, P. 741–743.

19. *Blackburn, N.* Uber das Produkt von zwei zyklischen 2-gruppen / N. Blackburn // Math. Zeitschr. – 1958. – Vol. 68. – P. 422–427.

20. *Douglas, J.* On the supersolvability of bicyclic groups / J. Douglas // Proc. Nat. Acad. Sei. – 1961. – Vol. 49. – P. 1493–1495 .

21. *Коновалов, А.Б.* Система компьютерной алгебры GAP 4.4.12 [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа: http://www.gap-system.org /ukrgap/gapbook/manual.pdf.

22. *Монахов, В.С.* О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

23. *Монахов, В.С.* Конечные разрешимые группы, силовские p-подгруппы которых либо бициклические, либо имеют p^3 / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 121–131.

24. *Huppert, B.* Endliche Gruppen III / B. Huppert, N. Blackburn; Berlin-Heidelberg-New York: Springer. – 1982.

25. *Беркович, Я.Г.* О разрешимых группах конечного порядка / Я.Г. Беркович // Матем. сб. – 1967. – Т. 74 (116), № 1. – С. 75–92.

26. *Maier, R.* Faktorisierte p-auflösbare Gruppen / R. Maier // Arch. Math. – 1975. – Vol. 27. – P. 576–583.

27. *Мазуров, В.Д.* Замечания о конечных группах / В.Д. Мазуров – Новосибирск : Редколлегия Сиб. мат. ж., 1974. – 7 с.

28. *Мазуров, В.Д.* // XII Всесоюзн. алгебр. колл. : тез. сообщ. Тетрадь 1. – Свердловск, 1973.

29. *Монахов, В.С.* О частичной сверхразрешимости конечной факторизуемой группы / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 3. – С. 32–36.

30 *Camina, A.R.* Some non-solvable factorizable groups / A.R. Camina, T.M. Gagen // J. Math. – 1970. – Vol. 14, № 1. – P. 91–98.

31. *Монахов, В.С.* О произведении двух групп, одна из которых содержит циклическую подгруппу индекса 2 / В.С. Монахов // Математические заметки. – 1974. – Т. 16, № 2. – С. 285–295.

32. *Монахов, В.С.* О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.

33. *Монахов, В.С.* Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.

34. *Монахов, В.С.* Конечные группы, силовские подгруппы которых либо циклические, либо порядка p^2 / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2008. – Т. 47, № 2. – С. 139–145.

35. *Трофимук, А.А.* О производной длине конечных групп с заданными свойствами силовских подгрупп / А.А. Трофимук // Мальцевские чтения : материалы международной алгебраической конференции, Новосибирск, 24-28 августа 2009 г. / Институт математики им. С.Л. Соболева. – Новосибирск, 2009. – С. 92.

36. *Zassenhaus, H.* Beweis eines Zatzes uber diskrete Gruppen / H. Zassenhaus // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1938. – Bd. 12. – S. 289–312.

37. *Dixon, J.D.* The solvable length of a solvable linear groups / J.D.Dixon // Math. Z. – 1968. – Bd. 12. – S. 151–158.

38. *Berkovich, Y.* Solvable permutation groups of maximal derived length / Y. Berkovich // Algebra Colloquium. – 1997. – Vol. 4, № 2. – P. 175–186.

39. *Newman, M.F.* The solvable length of a solvable linear groups / M.F. Newman // Math. Z. – 1972. – Bd. 126. – P. 59–70.

40. *Palfy, P.P.* Bounds for linear groups of odd order / P.P. Palfy // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. – 1990. – Vol. 39, № 23. – P. 253–263.

41. *Monakhov, V.S.* On a finite group having a normal series with restriction on its factors / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Ukrainian Mathematical Congress : Abstracts of talks of 7th Int. Algebraic Conference in Ukraine, Kharkov, 18–23 August 2009 / Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Taras Shevchenko Kiev National University, V.N. Karazin Kharkov National University; Ed. B.: G.N. Zholtkevich. – Kiev, 2009. – P. 98–99.

42. *Huppert, B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B.Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Bd. 60. – S. 409–434.

43. *Холл, М.* Теория групп / М. Холл. – М.: ИЛ, 1962. – 468 с.

44. *Поляков, Л.Я.* О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы / Л.Я. Поляков // Конечные группы : Сб. – Минск, 1966. – С. 89–97.

45. *Шеметков, Л.А.* О конечных разрешимых группах / Л.А. Шеметков // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т. 32, № 3. – С. 533–559.

46. *Монахов, В.С.* О разрешимости нормальных подгрупп конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин // Матем. заметки. – 1992. – Т. 51, № 3. – С. 85–90.

47. *Монахов, В.С.* О строении нормальных подгрупп конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин // Вопросы алгебры. – 1993. – Вып. 6. – С. 96–100.

48. *Каморников, С.Ф.* О разрешимых подгруппах конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин // Весці Акад. навук Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. – 1994. – № 2. – С. 53–57.

49. *Каморников, С.Ф.* О влиянии максимальных подгрупп примарного индекса на строение конечной группы / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин // Изв. высш. учеб. завед. Математика. – 1995. – № 6. – С. 24–28.

50. *Селькин, М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

51. *Ходанович, Д.А.* О разрешимости конечной группы с ограниченными индексами ненильпотентных максимальных подгрупп / Д.А. Ходанович // Вестник ПГУ. Серия С. Фундаментальные науки. – 2005. – № 4. – С. 18–22.

52. *Каморников, С.Ф.* К теореме Ф. Холла / С.Ф.Каморников // Вопросы алгебры. – 1990. – Вып. 5. – С. 45–52.

53. *Монахов, В.С.* О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.

54 *Köhler, J.* Finite groups with all maximal subgroups of prime or prime square index / J. Köhler // Canad. J. Math. – 1964. – Vol. 16, № 3. – P. 435–442.

55. *Guralnick, R.* Subgroups of prime power index in a simple group / R. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 81, № 2. – P. 304–311.

56. *Казарин, Л.С.* О группах, представимых в виде произведения двух разрешимых подгрупп / Л.С. Казарин // Commun. Algebra. – 1986. – Vol. 14, № 6. – P. 1001–1066.

57. *Грибовская, Е.Е.* Конечные разрешимые группы с индексами максимальных подгрупп, равными p, p^2 или 8 / Е.Е. Грибовская // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 4. – С. 11–14.

58. *Грибовская, Е.Е.* О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп с индексами максимальных подгрупп p, p^2 или 8 / Е.Е. Грибовская // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 2001. – Т. 21, № 3. – С. 98–103.

59. *Трофимук, А.А.* О p-длине конечных разрешимых групп с ограничениями на индексы максимальных подгрупп / А.А. Трофимук // Ломоносовские чтения : материалы международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых / Филиал МГУ в г. Севастополе; редкол.: В.А. Трифонова [и др.]. – Севастополь, 2009. – С. 54–55.

60. *Грибовская, Е.Е.* Индексы максимальных подгрупп в теории классов составных конечных групп : дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук : 01.01.06 / Е.Е. Грибовская. – Гомель, 2002. – 65 л.

61. *Грибовская, Е.Е.* Конечные группы с индексами максимальных подгрупп, не делящимися на p^4 / Е.Е. Грибовская, В.С. Монахов. – Гомель, 2000. – 13 с. – (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины ; № 91).

62. *Монахов, В.С.* О конечных группах с ограниченными индексами максимальных подгрупп / В.С. Монахов, Д.А. Ходанович // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 3. – С. 20–24.

63. *Ходанович, Д.А.* Конечные группы с ограниченными индексами неформационных максимальных подгрупп : дис. на соискание уче-ной степени канд. физ.-мат. наук : 01.01.06 / Д.А. Ходанович. – Гомель, 2008. – 66 л.

64. *Berkovich, Y.* Indices of elements and normal structure of finite groups / Y. Berkovich, L. Kazarin // J. Algebra. – 2005. – Vol. 283. – P. 564–583.

65. *Монахов, В.С.* О конечных группах с некоторыми подгруппами простых индексов / В.С. Монахов, В.Н. Тютянов // Сиб. матем. журнал. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 833–836.

66. *Монахов, В.С.* К теореме Хупперта-Шеметкова / В.С. Монахов // Труды института математики. – 2008. – Т. 16, № 1. – С. 64–66.

67. *Монахов, В.С.* Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.

68. *Gashütz, W.* Existenz und Konjugiertsein von Untergruppen, die in endlichen auflosbaren Gruppen durch gewisse Indexschranken definiert sind / W. Gashütz // J. Algebra. – 1978. – Vol. 53, № 2. – P. 389–394.

69. *Монахов В.С.* О влиянии индексов максимальных подгрупп на нильпотентную длину конечной разрешимой группы / В.С. Монахов, Д.А. Ходанович // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 4. – С. 23–28.

70. *Грибовская, М.А.* Группы нечетного порядка с ограниченными индексами максимальных подгрупп / М.А. Грибовская // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2002. – Т. 14, № 5. – С. 80–84.

71. *Грибовская, М.А.* О нильпотентности субнормальной подгруппы конечной группы / М.А. Грибовская // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2002. – Т. 15, № 6. – С. 158–160.

72. *Грибовская, М.А.* Нормальные подгруппы конечной группы и индексы не содержащих её максимальных подгрупп / М.А. Грибовская // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 2002. – Т. 26, № 4. – С. 82–86.

73. *Грибовская, М.А.* О группах нечетного порядка с небольшими индексами максимальных подгрупп / М.А. Грибовская // Алгебра и линейная оптимизация: труды международного семинара, посвященного 90-летию со дня рождения С.Н. Черникова / УрО РАН. – Екатеринбург, 2002. – С. 92–98.

74. *Грибовская, М.А.* Подгруппа Фиттинга и сверхразрешимость конечной разрешимой группы / М.А. Грибовская // Творчество молодых: сб. науч. работ студ. и аспир. / ГГУ им. Ф.Скорины. – Гомель, 2002. – С. 82–84.

75. *Грибовская, М.А.* Наибольший простой делитель порядка группы и индексы максимальных подгрупп / М.А. Грибовская, В.С. Монахов.

– Гомель, 2000. – 16 с. – (Препринт / ГГУ им. Ф. Скорины ; № 38).

76. *Грибовская, М.А.* Конечные группы с ограниченными индексами отдельных максимальных подгрупп : дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук : 01.01.06 / М.А. Грибовская. – Гомель, 2003.

77. *Gaschütz, W.* Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen / W.Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Vol. 58. – P. 160–170.

78. *Монахов, В.С.* Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2004. – Т. 27, № 6. – С. 81.

79. *Монахов, В.С.* О максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2008. – Т. 47, №2. – С. 146–148.

80. *Isaacs, M.* Finite group theory / M. Isaacs. – Providence-Rhode Island : American Mathematical Society, 2008.

81. *Левчук, В.М.* Конечные простые группы с дополняемыми максимальными подгруппами / В.М. Левчук, А.Г. Лихарев // Сиб. мат. ж-ал. – 2006. – Т. 47, № 4. – С. 798–810.

82. *Тютянов, В.Н.* Конечные группы с дополняемыми подгруппами / В.Н. Тютянов // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2006. – Т. 36, № 6. – С. 178–183.

83. *Монахов, В.С.* Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2008. – Т. 84, Вып. 3. – С. 390–394.

84. *Черников, Н.С.* О π-длине конечных π-разрешимых групп / Н.С. Черников, А.П. Петравчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: Тр. Института математики АН Украины. – 1993.– С. 393–405.

85. *Kazarin, L.S.* Soluble product of groups / L.S. Kazarin // Infinite groups 94. – 1995. – P. 111–123.

86. *Carter, R.* Extreme Classes of finite soluble groups / R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes // J. Algebra. – 1968. – Vol. 9, № 3. – P. 285–313.

87. *Numata, M.* On the π-nilpotent length of π-solvable groups / M. Numata // Osaka J. Math. – 1971. – Vol. 8. – P. 447–451.

88. *Монахов, В.С.* О конечных разрешимых группах / В.С. Монахов // Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и приложения : тезисы докладов VI Международной конференции, посвященной 100-летию Н.Г. Чудакова, Саратов, 13-17 сентября 2004 г. – Саратов, 2004. – С. 83.

89. *Монахов, В.С.* О нильпотетной π-длине конечной π-разрешимой группы / В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, Вып. 3. – С. 145–152.

90. *Шпырко, О.А.* Холловы подгруппы и нильпотентная π-длина π-разрешимой группы / О.А.Шпырко // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 2. – С. 48–50.

91. *Doerk, K.* Über die nilpotente Länge maximaler Untergruppen bei endlichen auflösbaren Gruppen / K. Doerk // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1994. – Vol. 91. – P. 19–21.

92. *Ballester-Bolinches, A.* A note on the $\mathfrak{F}$-lengh of maximal subgroups in finite soluble groups / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // Math. Nachr. – 1994. – V. 166. – P. 67–70.

93. *Doerk, K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 899 p.

94. *Monakhov, V.S.* The nilpotent π-length of maximum subgroups in finite π-soluble groups / V.S. Monakhov, O.A. Shpyrko // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2009. – Vol. 64, № 6. – P. 229–234.

95. *Шпырко, О.А.* О конечных π-разрешимых группах с заданными силовскими подгруппами / О.А. Шпырко // Известия Гомельского госуниверситета им.Ф.Скорины. – 1999. – Т. 1, №1 (15). – С. 127–134.

96. *Шпырко, О.А.* О пересечениях холловых подгрупп и π-длине π-разрешимой группы / О.А. Шпырко // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 2000. – Т. 18, № 4. – С. 82–89.

97. *Монахов, В.С.* Нильпотентная π-длина конечных π-разрешимых групп / В.С. Монахов, О.А. Шпырко. – Гомель, 2000. – 12 с. – (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины ; № 92).

98. *Шпырко, О.А.* Нильпотентная π-длина конечных π-разрешимых группа : дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук : 01.01.06 / О.А.Шпырко. – Гомель, 2001. – 81 л.

99. *Шпырко, О.А.* О нильпотентной π-длине конечных π-разрешимых групп с ограничениями на подгруппы / О.А.Шпырко // Вестник Московского госуниверситета им. М. В. Ломоносова. Математика. Механика. – 2008. – Т. 63, № 1. – С. 21–25.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор Ф 08Р–230)

Поступила в редакцию 15.02.10.