Проблемы физики, математики и техники, № 3 (12), 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 512.544

ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ AFN-ГРУППЫ

О.Ю. Дашкова

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Днепропетровск, Украина

LOCALLY SOLUBLE AFN-GROUPS

O.Yu. Dashkova

O. Honchar Dnepropetrovsk National University, Dnepropetrovsk, Ukraine

В работе изучается $\mathbf{R}G$-модуль A, такой, что $\mathbf{R}$ – коммутативное нетерово кольцо с единицей, G – локально разрешимая группа, $C_G(A)=1$ и любая собственная подгруппа H группы G, для которой фактор-модуль $A/C_A(H)$ не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, конечно порождена. Доказано, что локально разрешимая группа G, удовлетворяющая заданным условиям, гиперабелева. Описана структура рассматриваемой группы G в случае, когда G – конечно порожденная разрешимая группа и фактор-модуль $A/C_A(G)$ не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем.

Ключевые слова: *групповое кольцо, локально разрешимая группа, нетеров* $\mathbf{R}$*-модуль.*

Let A be an $\mathbf{R}G$-module, where $\mathbf{R}$ is a commutative noetherian ring with the unit, G is a locally soluble group, $C_G(A)=1$, and each proper subgroup H of a group G for which $A/C_A(H)$ is not a noetherian $\mathbf{R}$-module, is finitely generated. It is proved that a locally soluble group G with these conditions is hyperabelian. It is described the structure of a group G under consideration if G is a finitely generated soluble group and the quotient module $A/C_A(G)$ is not a noetherian $\mathbf{R}$-module.

Keywords: *group ring, locally soluble group, noetherian* $\mathbf{R}$*-module.*

Введение

Пусть A – векторное пространство над полем F. Подгруппы группы $GL(F,A)$ всех автоморфизмов пространства A называются линейными группами. Если A имеет конечную размерность над полем F, $GL(F,A)$ можно рассматривать как группу невырожденных $(n\times n)$-матриц, где $n=dim_F A$. Конечномерные линейные группы изучались многими авторами. В случае, когда пространство A имеет бесконечную размерность над полем F, ситуация кардинально меняется. Бесконечномерные линейные группы исследовались мало. Изучение этого класса групп требует дополнительных ограничений. К таким ограничениям относятся различные условия конечности. Одним из условий конечности, которое достойно особого внимания, является финитарность линейной группы. Группа G называется финитарной, если для каждого ее элемента g подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в A (см., например, [1], [2]). Финитарные линейные группы изучались многими алгебраистами, и в этом направлении был получен ряд интересных результатов [2].

В [3] авторы ввели в рассмотрение антифинитарные линейные группы. Пусть $G\le GL(F,A)$, $A(wFG)$ – фундаментальный идеал группового кольца FG. Авторы полагают $augdim_F(G)=dim_F(A(wFG))$. Линейная группа G называется антифинитарной, если каждая собственная подгруппа H группы G, для которой размерность $augdim_F(H)$ бесконечна, конечно порождена. В [3] исследовались антифинитарные локально разрешимые линейные группы.

Если $G\le GL(F,A)$, то A можно рассматривать как FG-модуль. Естественным обобщением этого случая является рассмотрение $\mathbf{R}G$-модуля A, где $\mathbf{R}$ – кольцо. Б.А.Ф. Верфриц ввел в рассмотрение артиново-финитарные группы автоморфизмов модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ и нетерово-финитарные группы автоморфизмов модуля M над кольцом $\mathbf{R}$, являющиеся аналогами финитарных линейных групп [4]–[6]. Группа автоморфизмов $F_1Aut_{\mathbf{R}}M$ модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ называется артиново-финитарной, если $A(g-1)$ является артиновым $\mathbf{R}$-модулем для любого элемента $g\in F_1Aut_{\mathbf{R}}M$. Группа автоморфизмов $FAut_{\mathbf{R}}M$ модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ называется нетерово-финитарной, если $A(g-1)$ является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем для любого элемента $g\in FAut_{\mathbf{R}}M$. Б.А.Ф. Верфриц исследовал связь между группами $F_1Aut_{\mathbf{R}}M$ и $FAut_{\mathbf{R}}M$ [6].

При изучении модулей над групповыми кольцами с различными условиями конечности важную роль играет понятие коцентрализатора подгруппы H в модуле A, введенное в [7].

Определение [7]. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ – кольцо, G – группа. Если $H \le G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A.*

В настоящей работе рассматривается аналог антифинитарных линейных групп в теории модулей над групповыми кольцами. Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, $\mathbf{R}$ – кольцо, G – группа. Будем говорить, что группа G является AFN-группой, если любая собственная подгруппа H группы G, коцентрализатор которой в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, конечно порождена.

В работе изучаются локально разрешимые AFN-группы. Всюду рассматривается $\mathbf{R}G$-модуль A, такой, что $\mathbf{R}$ – ассоциативное кольцо, $C_G(A) = 1$. Основные результаты работы – теоремы 2.1 и 2.2 – доказаны в случае, когда $\mathbf{R}$ является коммутативным нетеровым кольцом с единицей. В теореме 2.1 установлена гиперабелевость локально разрешимой AFN-группы, а в теореме 2.2 описана структура конечно порожденной разрешимой AFN-группы G, в случае, когда коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем.

1 Предварительные результаты

В настоящей главе мы сформулируем некоторые элементарные результаты, которые будут использоваться при доказательстве основных теорем.

***Лемма* 1.1**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль.*

(1) *Если $L \le H \le G$ и коцентрализатор подгруппы H в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, то и коцентрализатор подгруппы L в модуле A – нетеров $\mathbf{R}$-модуль.*

(2) *Если $L, H \le G$ и коцентрализаторы подгрупп L и H в модуле A являются нетеровыми $\mathbf{R}$-модулями, то коцентрализатор подгруппы $\langle L, H \rangle$ в модуле A – нетеров $\mathbf{R}$-модуль.*

***Следствие* 1.1**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль. Множество $ND(G)$ всех элементов $x \in G$, таких, что коцентрализатор группы $\langle x \rangle$ в модуле A – нетеров $\mathbf{R}$-модуль, является нормальной подгруппой группы G.*

Доказательство. Из леммы 1.1 вытекает, что $ND(G)$ является подгруппой группы G. Так как $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех $x, g \in G$, то подгруппа $ND(G)$ нормальна в G. Следствие доказано.

***Следствие* 1.2**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFN-*группой. Если группа G содержит две собственные бесконечно порожденные подгруппы K и L, то коцентрализатор подгруппы $\langle K, L \rangle$ в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем.*

***Лемма* 1.2**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFN-*группой. Пусть $H \le G$, K – нормальная подгруппа H, такая, что $H/K = Dr_{\lambda \in \Lambda}(H_\lambda/K)$, $H_\lambda \ne K$ для каждого $\lambda \in \Lambda$, и множество индексов Λ бесконечно. Тогда коцентрализатор подгруппы H в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем.*

Доказательство. Фактор-группу H/K можно представить в виде прямого произведения $H/K = H_1/K \times H_2/K$, такого, что фактор-группы H_1/K и H_2/K бесконечно порождены. Так как G – AFN-группа, то коцентрализаторы подгрупп H_1 и H_2 в модуле A являются нетеровыми $\mathbf{R}$-модулями. Поскольку $H = \langle H_1, H_2 \rangle$, по лемме 1.1 коцентрализатор подгруппы H в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Лемма доказана.

***Следствие* 1.3**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFN-*группой. Пусть $H \le G$, K – нормальная подгруппа H, такая, что $H/K = Dr_{\lambda \in \Lambda}(H_\lambda/K)$, $H_\lambda \ne K$ для каждого $\lambda \in \Lambda$, и множество индексов Λ бесконечно. Если g – элемент группы G, такой, что подгруппа H_λ $\langle g \rangle$-инвариантна для каждого $\lambda \in \Lambda$, то $g \in ND(G)$.*

Доказательство. Отметим, что подгруппа K $\langle g \rangle$-инвариантна. Поскольку множество индексов Λ бесконечно,

$$Dr_{\lambda \in \Lambda}(H_\lambda/K)\langle gK \rangle = (H_1/K)((H_2/K)\langle gK \rangle),$$

где фактор-группы H_1/K и $(H_2/K)\langle gK \rangle$ – собственные и бесконечно порождены. Следовательно, коцентрализатор подгруппы $\langle H, g \rangle$ в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. По лемме 1.1 коцентрализатор подгруппы $\langle g \rangle$ в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Следствие доказано.

***Следствие* 1.4**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFN-*группой. Пусть $H \le G$, K – нормальная подгруппа H, такая, что $H/K = Dr_{\lambda \in \Lambda}(H_\lambda/K)$, $H_\lambda \ne K$ для каждого $\lambda \in \Lambda$, и множество индексов Λ бесконечно. Если H_λ – G-инвариантная подгруппа для каждого $\lambda \in \Lambda$, то $G = ND(G)$.*

***Следствие* 1.5**. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFN-*группой. Пусть $H \le G$, и K – нормальная подгруппа H, такая, что H/K – бесконечная элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p. Если g – элемент группы G, такой, что подгруппы H и K*

$\langle g\rangle$*-инвариантны и* $g^k \in C_G(H/K)$ *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$, *то* $g \in ND(G)$.

Доказательство. Пусть

$$1 \neq h_1K \in H/K, \quad H_1/K = \langle h_1K\rangle^{\langle gK\rangle}.$$

Поскольку элемент g индуцирует на фактор-группе H/K автоморфизм конечного порядка, фактор-группа H_1/K конечна. Так как фактор-группа H/K элементарная абелева, справедливо равенство $H/K = H_1/K \times C_1/K$. Отметим, что множество $\{C_1^y \mid y \in \langle g\rangle\}$ конечно. Пусть

$$\{C_1^y \mid y \in \langle g\rangle\} = \{U_1, \cdots, U_m\}.$$

Тогда $\langle g\rangle$-инвариантная подгруппа

$$D_1 = U_1 \cap \cdots \cap U_m = Core_{\langle g\rangle}(C_1)$$

имеет конечный индекс в подгруппе H. Поскольку подгруппа K $\langle g\rangle$-инвариантна, $K \leq D_1$. Пусть $1 \neq h_2K \in D_1/K$, $H_2/K = \langle h_2K\rangle^{\langle gK\rangle}$. Тогда

$$\langle H_1/K, H_2/K\rangle = H_1/K \times H_2/K.$$

Следовательно, $H/K = (H_1/K \times H_2/K) \times C_2/K$ для некоторой подгруппы C_2. Продолжив рассуждения аналогичным образом, мы построим бесконечное семейство $\{H_n/K \mid n \in \mathbb{N}\}$ неединичных $\langle g\rangle$-инвариантных подгрупп, такое, что

$$\langle H_n/K \mid n \in \mathbb{N}\rangle = Dr_{n\in\mathbb{N}} H_n/K.$$

По следствию 1.3 $g \in ND(G)$. Следствие доказано.

2 Локально разрешимые AFN-группы

Напомним, что группа G имеет конечный 0-ранг $r_0(G) = r$, если G обладает конечным субнормальным рядом с r бесконечными циклическими факторами, все остальные факторы которого периодические. 0-ранг группы не зависит от выбора ряда и является числовым инвариантом.

Лемма* 2.1.** *Пусть* A *–* **RG-модуль,* G *является* AFN*-группой. Если группа* G *содержит нормальную подгруппу* K, *такую, что фактор-группа* G/K *абелева и имеет бесконечный* 0*-ранг, то коцентрализатор группы* G *в модуле* A *является нетеровым* **R-***модулем.*

Доказательство. Пусть B/K – свободная абелева подгруппа фактор-группы G/K, такая, что фактор-группа G/B периодическая. Если $\pi(G/B)$ бесконечно, то по лемме 1.2 коцентрализатор группы G в модуле A является нетеровым **R**-модулем. Предположим, что множество $\pi(G/B)$ конечно. Выберем такое простое число q, что $q \notin \pi(G/B)$. Пусть $C/K = (B/K)^q$. Тогда B/C – силовская q-подгруппа фактор-группы G/C. Если P/C – силовская q'-подгруппа G/C, то G/P является бесконечной элементарной абелевой q-группой, и по лемме 1.2 коцентрализатор группы G в модуле A является нетеровым **R-**модулем. Лемма доказана.

Следствие* 2.1.** *Пусть* A *–* **RG-модуль,* G *является* AFN*-группой. Предположим, что группа* G *содержит нормальную подгруппу* K, *такую, что фактор-группа* G/K *почти абелева и имеет бесконечный* 0*-ранг. Тогда коцентрализатор группы* G *в модуле* A *является нетеровым* **R-***модулем.*

Доказательство. Пусть L/K – нормальная абелева подгруппа фактор-группы G/K, такая, что G/L конечна. Тогда ранг $r_0(L/K)$ бесконечен. Выберем элемент $g \in G \setminus L$. Пусть B/K – свободная абелева подгруппа фактор-группы L/K, такая, что фактор-группа L/B периодическая. Ранг $r_0(B/K)$ бесконечен. Выберем элемент $a_1 \in B \setminus K$. Пусть $A_1/K = (\langle a_1\rangle K/K)^{\langle gK\rangle}$. Поскольку фактор-группа G/L конечна, A_1/K – конечно порожденная абелева группа. Следовательно, подгруппа $A_1/K \cap B/K$ конечно порождена. Выберем максимальную подгруппу C_1/K фактор–группы B/K, удовлетворяющую условию $(A_1/K \cap B/K) \cap C_1/K = \langle 1\rangle$. Тогда фактор-группа L/C_1 имеет конечный 0-ранг. Так как фактор-группа G/L конечна, множество

$$\{(C_1/K)^{yK} \mid y \in \langle g\rangle\}$$

конечно. Пусть

$$\{(C_1/K)^{yK} \mid y \in \langle g\rangle\} = \{D_1/K, \cdots, D_n/K\},$$

и пусть

$$E/K = D_1/K \cap \cdots \cap D_n/K.$$

Тогда фактор-группа $E/K \leq B/K$, E/K $\langle g\rangle$-инвариантна, и по теореме Ремака L/E имеет конечный 0-ранг. В частности, E/K имеет бесконечный 0-ранг. Выберем элемент $a_2 \in E \setminus K$. Пусть $A_2/K = (\langle a_2\rangle K/K)^{\langle gK\rangle}$. Тогда $A_2/K \leq E/K$, $(A_1/K) \cap (A_2/K) = 1$. Продолжив рассуждения аналогичным образом, построим семейство $\{A_n/K \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\langle g\rangle$-инвариантных подгрупп, такое, что

$$\langle A_n/K \mid n \in \mathbb{N}\rangle = Dr_{n\in\mathbb{N}}(A_n/K).$$

Согласно следствию 1.3, $g \in ND(G)$. Можно выбрать конечно порожденную подгруппу $F \leq G$, такую, что $G/K = (FK/K)(L/K)$, и для каждого элемента g подгруппы F $g \in ND(G)$. Поскольку подгруппа F конечно порождена, $F \leq ND(G)$. По лемме 2.1 коцентрализатор подгруппы L в модуле A является нетеровым

R-модулем. Поскольку $G = FL$, по лемме 1.1 централизатор группы G в модуле A является нетеровым **R**-модулем. Следствие доказано.

Лемма 2.2. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFN*-группой. Предположим, что группа G содержит подгруппы $L \le K \le H$, такие, что L и K – нормальные подгруппы H, K/L – делимая черниковская группа, H/K – почти полициклическая группа. Если коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является нетеровым* **R***-модулем, то $H = G$. Более того, либо $G = K$, и тогда фактор-группа G/L – квазициклическая p-группа для некоторого простого числа p, либо G/K – циклическая q-группа для некоторого простого числа q.*

Доказательство. Предположим сначала, что фактор-группа H/L конечно порождена. По теореме Ф. Холла [8, теорема 5.34] H/L удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп. В частности, K/L удовлетворяет условию $max - H$. Противоречие с тем, что K/L – делимая черниковская группа. Следовательно, фактор-группа H/L бесконечно порождена, и поэтому подгруппа H бесконечно порождена. Поскольку коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является нетеровым **R**-модулем, то $H = G$.

Пусть $G \ne K$. Тогда $G = \langle K, M \rangle$ для некоторого конечного множества M. Поскольку множество M конечно, можно выбрать подмножество S множества M, такое, что $G = \langle K, S \rangle$ и $G \ne \langle K, X \rangle$ для любого собственного подмножества X множества S. Пусть

$$S = \{x_1, \cdots, x_m\}.$$

Если $m > 1$, то $\langle K, x_1, \cdots, x_{m-1} \rangle$ и $\langle K, x_m \rangle$ – собственные бесконечно порожденные подгруппы группы G. Так как G является AFN-группой, коцентрализаторы подгрупп $\langle K, x_1, \cdots, x_{m-1} \rangle$ и $\langle K, x_m \rangle$ в модуле A являются нетеровыми **R**-модулями. Поскольку

$$G = \langle \langle K, x_1, \cdots, x_{m-1} \rangle, \langle K, x_m \rangle \rangle,$$

то по лемме 1.1 коцентрализатор группы G в модуле A является нетеровым **R**-модулем. Противоречие. Следовательно, $m = 1$, и поэтому $G/K = \langle xK \rangle$ – циклическая фактор-группа. Если G/K бесконечна, то группу G можно представить в виде произведения двух собственных бесконечно порожденных подгрупп. Противоречие с леммой 1.1. Если фактор-группа G/K конечна, но $|\pi(G/K)| > 1$, вновь получаем противоречие с леммой 1.1. Следовательно, G/K – циклическая q-группа для некоторого простого числа q. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFN*-группой. Пусть H – нормальная подгруппа группы G, такая, что G/H – бесконечная почти абелева периодическая фактор-группа. Если коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым* **R***-модулем, то либо G/H – квазициклическая p-группа для некоторого простого числа p, либо группа G содержит нормальную подгруппу K, такую, что G/K – циклическая q-группа для некоторого простого числа q, $H \le K$ и K/H – делимая черниковская p-группа для некоторого простого числа p.*

Доказательство. Пусть L/H – нормальная абелева подгруппа фактор-группы G/H, такая, что фактор-группа G/L конечна. Если множество $\pi(L/H)$ бесконечно, то по лемме 1.2 коцентрализатор подгруппы L в модуле A является нетеровым **R**-модулем. По следствию 1.4 $G = ND(G)$. Поскольку фактор-группа G/L конечна, то с учетом леммы 1.1 коцентрализатор группы G в модуле A является нетеровым **R**-модулем. Противоречие. Следовательно, множество $\pi(L/H)$ конечно. Тогда существует простое число p, такое, что силовская p-подгруппа P/H фактор-группы L/H бесконечна. Пусть F/H – силовская p'-подгруппа L/H. Существует конечная фактор-группа S/H, такая, что $G/H = (L/H)(S/H)$. Если фактор-группа F/H бесконечна, то фактор-группы $(P/H)(S/H)$ и $(F/H)(S/H)$ бесконечно порождены, и поэтому коцентрализаторы подгрупп PS и FS в модуле A являются нетеровыми **R**-модулями. По лемме 1.1 коцентрализатор группы G в модуле A является нетеровым **R**-модулем. Противоречие. Следовательно, фактор-группа F/H конечна. Пусть $B/H = (P/H)^p$. Если фактор-группа P/B бесконечна, то P/B бесконечно порождена, и коцентрализатор подгруппы P в модуле A является нетеровым **R**-модулем. По следствию 1.5 $G = ND(G)$. Поскольку фактор-группа G/P конечна, по лемме 1.1 коцентрализатор группы G в модуле A является нетеровым **R**-модулем. Снова получаем противоречие. Следовательно, фактор-группа $(P/H)/(B/H)$ конечна. По лемме 3 [9] $P/H = (V/H) \times (D/H)$, где D/H – делимая подгруппа, а V/H конечна. Подгруппа D является G-инвариантной. Положим $K = D$. Так как фактор-группа G/D конечна, применим лемму 2.2. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G является* AFN*-группой. Предположим, что группа G содержит нормальные подгруппы $K \le H$,* *такие, что фактор-группа* G/H *конечна, а* H/K *– абелева группа без кручения. Если коцентрализатор группы* G *в модуле* A *не является нетеровым* **R**-*модулем, то* H/K *конечно порождена.*

Доказательство. По следствию 2.1 фактор-группа H/K имеет конечный 0-ранг. Пусть B/K – свободная абелева подгруппа фактор-группы H/K, такая, что фактор-группа H/B периодическая. Ввиду конечности ранга $r_0(H/K)$, B/K конечно порождена. Предположим, что фактор-группа H/K бесконечно порождена. Так как G/H конечна, фактор-группа $C/K=(B/K)^{G/K}$ конечно порождена. По лемме 2.3 $|\pi(G/C)|\le 2$. Выберем два различных простых числа r,s, такие, что $r,s\notin\pi(G/C)$. Пусть $D/K=(C/K)^{rs}$. Тогда G/D – бесконечно порожденная периодическая почти абелева группа. По построению $|\pi(G/D)|\ge 3$. Противоречие с леммой 2.3. Следовательно, фактор-группа H/K конечно порождена. Лемма доказана.

***Лемма* 2.5.** *Пусть* A *–* **R**G-*модуль,* G *является* AFN-*группой. Предположим, что группа* G *содержит нормальные подгруппы* $K\le H$, *такие, что фактор-группа* G/H *конечна, а* H/K *абелева и бесконечно порождена. Если коцентрализатор группы* G *в модуле* A *не является нетеровым* **R**-*модулем, то* H/K *черниковская.*

Доказательство. По следствию 2.1 фактор-группа H/K имеет конечный 0-ранг. Пусть T/K – периодическая часть фактор-группы H/K. По лемме 2.4 H/T конечно порождена. Тогда H/K имеет конечно порожденную подгруппу B/K, такую, что фактор-группа H/B периодическая. Поскольку G/H конечна, фактор-группа $C/K=(B/K)^{G/K}$ конечно порождена. По лемме 2.3 G/C черниковская. Отсюда вытекает, что фактор-группа T/K также черниковская. Пусть D/K – делимая часть фактор-группы T/K. Тогда G/D – конечно порожденная почти абелева группа. Применим лемму 2.2. Лемма доказана.

***Лемма* 2.6.** *Пусть* A *–* **R**G-*модуль,* G *– разрешимая* AFN-*группа, не являющаяся квазициклической* p-*группой для некоторого простого числа* p. *Тогда фактор-группа* $G/ND(G)$ *является полициклической.*

Доказательство. Пусть $D=ND(G)$. Если коцентрализатор группы G в модуле A является нетеровым **R**-модулем, то $G=ND(G)$.

Предположим, что $G\ne ND(G)$. Пусть

$$D=D_0\le D_1\le\cdots\le D_n=G$$

– субнормальный ряд группы G с абелевыми факторами. Рассмотрим фактор D_j/D_{j-1}, $j<n$. Если этот фактор бесконечно порожден, то подгруппа D_j также бесконечно порождена, и поэтому коцентрализатор подгруппы D_j в модуле A является нетеровым **R**-модулем. В частности, $D_j\le ND(G)$. Отсюда вытекает, что фактор D_j/D_{j-1} конечно порожден для каждого $j=1,\cdots,n-1$. Пусть $K=D_{n-1}$. Если фактор-группа G/K конечно порождена, то G/D – полициклическая. Предположим, что фактор-группа G/K бесконечно порождена. По лемме 2.5 G/K – черниковская группа. Пусть P/K – делимая часть G/K. Если $P/K\ne G/K$, то P – собственная бесконечно порожденная подгруппа группы G. Следовательно, коцентрализатор подгруппы P в модуле A является нетеровым **R**-модулем. Поэтому $P\le ND(G)$ и фактор-группа G/P конечна. Противоречие. Следовательно, $G/K=P/K$, и тогда G/K – квазициклическая p-группа для некоторого простого числа p. Пусть $g\in G\setminus K$. Так как $g\notin ND(G)$, подгруппа $\langle g,K\rangle$ конечно порождена. Из конечности фактор-группы $\langle g\rangle K/K$ вытекает, что подгруппа K конечно порождена [8, теорема 1.41]. Так как группа G не является квазициклической p-группой, $K\ne 1$. Следовательно, K содержит собственную G-инвариантную подгруппу L конечного индекса, такую, что фактор-группа G/L черниковская и не является делимой. Ранее было доказано, что в этом случае фактор-группа $G/ND(G)$ конечна. Лемма доказана.

***Определение* 2.1** [10, глава 13]. *Группа* G *называется квазилинейной, если она изоморфна подгруппе прямого произведения конечного множества конечномерных линейных групп.*

***Лемма* 2.7.** *Пусть* A *–* **R**G-*модуль,* G *– локально разрешимая группа,* **R** *– коммутативное нетерово кольцо с единицей. Если коцентрализатор группы* G *в модуле* A *является нетеровым* **R**-*модулем, то группа* G *разрешима.*

Доказательство. Отметим, что $A/C_A(G)$ – нетеров **R**-модуль. Пусть $C=C_A(G)$. A имеет конечный ряд **R**G-подмодулей $0\le C\le A$, такой, что фактор A/C – конечно порожденный **R**-модуль.

По теореме 13.3 [10] фактор-группа $G_1=G/C_G(A/C)$ содержит нормальную нильпотентную подгруппу U, такую, что G_1/U – квазилинейная группа. Следовательно,

$$G_1/U\hookrightarrow M_1\times M_2\times\cdots\times M_k,$$

где $M_i, i=1,2,\cdots,k,$ – конечномерные линейные группы. Пусть $L_i, i=1,2,\cdots,k,$ – проекция G_1/U на $M_i, i=1,2,\cdots,k$. По следствию 3.8 [10] подгруппа L_i разрешима для любого $i=1,2,\cdots,k$. По теореме А.И. Мальцева (теорема 3.6 [10]) $L_i, i=1,2,\cdots,k$, является расширением нильпотентной подгруппы при помощи почти абелевой. Следовательно, фактор-группа G_1/U является расширением нильпотентной подгруппы при помощи почти абелевой. Отсюда вытекает, что G_1/U разрешима, и поэтому разрешима фактор-группа $G/C_G(A/C)$. Из выбора подмодуля C вытекает, что фактор-группа $G/C_G(C)$ тривиальна.

Пусть

$$H=C_G(C)\cap C_G(A/C).$$

Подгруппа H действует тривиально в каждом факторе ряда $0\le C\le A$. Следовательно, подгруппа H абелева. По теореме Ремака

$$G/H \hookrightarrow G/C_G(C)\times G/C_G(A/C).$$

Отсюда вытекает, что фактор-группа G/H разрешима. Поскольку подгруппа H абелева, группа G разрешима. Лемма доказана.

***Теорема* 2.1.** *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G – локально разрешимая* AFN-*группа,* $\mathbf{R}$ *– коммутативное нетерово кольцо с единицей. Тогда группа G гиперабелева.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда группа G не является разрешимой. Тогда G не является простой группой (следствие 1 к теореме 5.27 [8]). Следовательно, G содержит собственную нормальную нетривиальную подгруппу H_1. Если подгруппа H_1 конечно порождена, то она разрешима. Если H_1 бесконечно порождена, то централизатор подгруппы H_1 в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, и по лемме 2.7 H_1 разрешима. Пусть d_1 – ступень разрешимости подгруппы H_1 и пусть W_1 – максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G ступени разрешимости d_1. Так как группа G не является разрешимой, то фактор-группа G/W_1 также не является разрешимой. Как и ранее, G/W_1 содержит собственную нормальную нетривиальную подгруппу H_2/W_1. Тогда H_2 – разрешимая подгруппа ступени разрешимости d_2, причем $d_2>d_1$. Пусть W_2 – максимальная нормальная разрешимая подгруппа ступени разрешимости d_2, содержащая подгруппу W_1. Продолжив рассуждения аналогичным образом, построим возрастающий ряд нормальных подгрупп группы G

$$\langle 1\rangle = W_0\le W_1\le\cdots\le W_n\le W_{n+1}\le\cdots, \qquad (2.1)$$

такой, что

1) для каждого $n\in\mathbb{N}$ W_n – разрешимая подгруппа ступени разрешимости d_n;

2) $d_n<d_{n+1}$ для каждого $n\in\mathbb{N}$.

Пусть $W=\cup_{n\in\mathbb{N}}W_n$. Рассмотрим сначала случай, когда $G=W$. Тогда можно построить ряд нормальных подгрупп группы G

$$\langle 1\rangle = L_0\le L_1\le\cdots\le L_n\le L_{n+1}\le\cdots,$$

являющийся уплотнением ряда (2.1), такой, что $G=\cup_{n\in\mathbb{N}}L_n$ и каждый фактор L_{i+1}/L_i, $i=0,1,2,\cdots,n,\cdots$ абелев. Следовательно, группа G гиперабелева. Пусть теперь $G\ne W$. По построению подгруппа W не является разрешимой. Следовательно, W бесконечно порождена. Поэтому централизатор подгруппы W в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. По лемме 2.7 подгруппа W разрешима. Противоречие. Теорема доказана.

***Лемма* 2.8.** *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G – конечно порожденная разрешимая* AFN-*группа. Тогда централизатор подгруппы $ND(G)$ в модуле A является нетеровым* $\mathbf{R}$-*модулем.*

Доказательство. Пусть $D=ND(G)$ и пусть

$$\langle 1\rangle = D_0\le D_1\le\cdots\le D_n = D$$

– производный ряд подгруппы D. Если каждый фактор $D_{j+1}/D_j, j=0,1,\cdots,n-1$, конечно порожден, то подгруппа D полициклическая, и поэтому D конечно порождена. По лемме 1.1 централизатор подгруппы D в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Пусть теперь для некоторого $j=0,1,\cdots,n-1$ фактор D_{j+1}/D_j бесконечно порожден, и пусть t – такое число, что D_t/D_{t-1} бесконечно порожден, а факторы D_{j+1}/D_j конечно порождены для каждого $j\ge t$. Отсюда вытекает, что фактор-группа D/D_t – полициклическая. Поскольку группа G конечно порождена, бесконечно порожденная подгруппа D_t является собственной подгруппой G, и поэтому централизатор D_t в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Так как фактор-группа D/D_t полициклическая, то $D=KD_t$ для некоторой конечно порожденной подгруппы K. Из включения $K\le ND(G)$ следует, что централизатор подгруппы K в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. По лемме 1.1 централизатор подгруппы $ND(G)$ в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Лемма доказана.

***Теорема* 2.2.** *Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G – конечно порожденная разрешимая* AFN-*группа,* $\mathbf{R}$ *– коммутативное нетерово кольцо с единицей. Если централизатор группы G в модуле A не является нетеровым* $\mathbf{R}$-*модулем, справедливы следующие утверждения:*

(1) *централизатор подгруппы $ND(G)$ в модуле A является нетеровым* $\mathbf{R}$-*модулем;*

(2) *группа* G *обладает рядом нормальных подгрупп* $H \le U \le N \le G$, *таким, что подгруппа* H *– абелева, фактор-группы* U/H *и* N/U *– нильпотентны, а фактор-группа* G/N *– полициклическая.*

Доказательство. Справедливость утверждения (1) следует из леммы 2.8. Докажем утверждение (2). Пусть $C = C_A(ND(G))$. Так как фактор-модуль A/C является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, A имеет конечный ряд $\mathbf{R}G$-подмодулей

$$0 \le C \le A,$$

такой, что фактор A/C – конечно порожденный $\mathbf{R}$-модуль.

По теореме 13.3 [10] фактор-группа $G_1 = G/C_G(A/C)$ содержит нормальную нильпотентную подгруппу U_1, такую, что G_1/U_1 – квазилинейная группа. Следовательно,

$$G_1/U_1 \hookrightarrow M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k,$$

где $M_i, i = 1,2,\cdots,k$ – конечномерные линейные группы. Пусть $L_i, i = 1,2,\cdots,k$ – проекция G_1/U_1 на $M_i, i = 1,2,\cdots,k.$ По теореме А.И. Мальцева (теорема 3.6 [10]) $L_i, i = 1,2,\cdots,k$ является расширением нильпотентной подгруппы при помощи почти абелевой. Поскольку группа G конечно порождена, проекция $L_i, i = 1,2,\cdots,k$ является расширением нильпотентной группы при помощи полициклической. Следовательно, фактор-группа $G_1 = G/C_G(A/C)$ обладает рядом нормальных подгрупп $U_1 \le N_1 \le G$ таким, что фактор-группа N_1/U_1 и подгруппа U_1 – нильпотентны, а фактор-группа G/N_1 – полициклическая. Из выбора подмодуля C вытекает, что $C_G(C) \ge ND(G)$. По лемме 2.6 фактор-группа $G/C_G(C)$ является полициклической.

Пусть

$$H = C_G(C) \cap C_G(A/C).$$

Подгруппа H действует тривиально в каждом факторе ряда $0 \le C \le A$. Следовательно, подгруппа H абелева. По теореме Ремака

$$G/H \hookrightarrow G/C_G(C) \times G/C_G(A/C).$$

Отсюда вытекает, что группа G обладает рядом нормальных подгрупп $H \le U \le N \le G$, таким, что подгруппа H – абелева, фактор-группы U/H и N/U – нильпотентны, а фактор-группа G/N – полициклическая. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Phillips, R.E.* The structure of groups of finitary transformations / R.E. Phillips // J. Algebra. – 1988. – Vol. 119, № 2. – P. 400–448.

2. *Phillips, R.E.* Finitary linear groups: a survey. “Finite and locally finite groups” / R.E. Phillips // NATO ASI ser. C Math. Phys. Sci., Kluver Acad. Publ., Dordreht. – 1995. – Vol. 471. – P. 111–146.

3. *Kurdachenko, L.A.* Antifinitary linear groups / L.A. Kurdachenko, J.M. Muñoz-Escolano, J. Otal // Forum Math. – 2008. – Vol. 20, № 1. – P. 7–44.

4. *Wehrfritz, B.A.F.* Artinian-finitary groups over commutative rings / B.A.F. Wehrfritz // Illinois J. Math. – 2003. – Vol. 47, № 1–2. – P. 551–565.

5. *Wehrfritz, B.A.F.* Artinian-finitary groups over commutative rings and non-commutative rings / B.A.F. Wehrfritz // J. Lond. Math. Soc. (2). – 2004. – Vol. 70, № 2. – P. 325–340.

6. *Wehrfritz, B.A.F.* Artinian-finitary groups are locally normal-finitary / B.A.F. Wehrfritz // J. Algebra. – 2005. – Vol. 287, № 2. – P. 417–431.

7. *Курдаченко, Л.А.* О группах с минимаксными классами сопряженных элементов / Л.А. Курдаченко // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры : науч. тр. / Академия наук Украины, под ред. Черникова Н.С. – Киев, 1993. – С. 160–177.

8. *Robinson, D.J.S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups / D.J.S. Robinson // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972. – Vols. 1, 2. – 464 p.

9. *Курдаченко, Л.А.* Непериодические FC–группы и связанные классы локально нормальных групп и абелевых групп без кручения / Л.А. Курдаченко // Сиб. мат. журн. – 1986. – Т. 287, № 2. – С. 227–236.

10. *Wehrfritz, B.A.F.* Infinite linear groups / B.A.F. Wehrfritz // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973. – 229 p.

Поступила в редакцию 09.02.12.