УДК 521.1; 524.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ ДЛЯ ТРОЙНЫХ СИСТЕМ С НЬЮТОНОВСКИМ ГРАВИТАЦИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Г.Ю. Тюменков[1], А.Ю. Песенко[2], Д.А. Богданович[3]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*
[3]*Гомельский городской лицей* №1

SIMULATION OF PERIODIC ORBITS FOR THREE-BODY SYSTEMS WITH NEWTONIAN GRAVITATIONAL INTERACTION

G.Yu. Tyumenkov[1], A.Yu. Pesenko[2], D.A. Bogdanovich[3]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics*
[3]*Gomel City Lyceum* №1

В рамках общей задачи трёх тел небесной механики решаются динамические уравнения для нерелятивистской тройной системы с ньютоновским потенциалом и моделируются новые периодические орбиты. Используются принцип наименьшего действия, Фурье-анализ и возможности компьютерной симуляции пакета Mathematica.

Ключевые слова: *система трех тел*, *гравитационное взаимодействие*, *функционал действия*, *периодическая орбита*, *ряд Фурье*, *компьютерное моделирование*.

In the framework of the general three-body problem of celestial mechanics dynamic equations for non-relativistic three-body system with Newtonian potential are solved and new periodic orbits are simulated. Principle of least action, Fourier analysis and Mathematica's possibilities of computer simulation were used.

Keywords: *three-body system*, *gravitational interaction*, *action functional*, *periodic orbit*, *Fourier series*, *computer simulation*.

Введение

Со времени формулировки гравитационной задачи n тел Ньютоном в 1687 году специалисты в области небесной механики занимаются поиском и исследованием точных решений этой фундаментальной задачи. Но до настоящего времени даже общая задача трёх тел не имеет точных аналитических решений, поэтому часто изучаются её частные случаи, например, ограниченная задача трех тел, первые решения которой были найдены еще Эйлером в 1767 году и Лагранжем в 1772 году.

Особый интерес в рамках данной деятельности представляет поиск периодических орбит, то есть совокупностей замкнутых траекторий, по которым перемещаются компоненты системы при условии равенства периодов обращения каждой. Успехи в изучении такого рода орбит связаны уже с работами Пуанкаре, который предложил ряд общих подходов в исследовании, например, применение принципа наименьшего действия для поиска экстремальных (в том числе периодических) решений, как в неподвижной, так и вращающейся системах координат. Тем самым он заложил основы всех современных исследований периодических решений.

С середины же прошлого века поиск периодических решений в задаче n тел проводится с использованием численного интегрирования уравнений движения на компьютерах [1]–[3], что стало особо продуктивно со стремительным развитием вычислительных технологий в начале XXI века [4]–[6].

Идея Пуанкаре об использовании принципа наименьшего действия в дальнейшем была продуктивно развита Муром [1], который подробно рассмотрел обобщенный потенциал взаимодействия полиномиального вида $V \infty r^{\alpha}$, при $\alpha = -1$ соответствующий гравитационному потенциалу Ньютона. Было показано, что периодические орбиты действительно соответствуют минимуму функционала действия

$$S = \int_0^T (K + V) d\tau, \qquad (0.1)$$

где K – кинетическая энергия и V – потенциальная энергия системы в системе отсчета, связанной с центром масс, T – общий период обращения компонентов, переменная интегрирования $\tau \in (0, T)$. Для упрощения анализа в функционале (0.1) часто используют угловую переменную $t = (2\pi / T)\tau$, изменяющуюся в пределах: $t \in (0, 2\pi)$. Это удобно, например, при использовании элементов Фурье-анализа, что характерно для данной работы, и что без потери качества приводит к переопределению вида функционала действия (0.1).

1 Минимизация функционала действия

Для нахождения минимумов функционала действия будем использовать встроенный в среду Mathematica инструмент *Findminimum*, который находит локальные минимумы в зависимости от начальных значений параметров, которые задает генератор случайных чисел. Стандартной точности вычисления для нашего случая было недостаточно, поэтому параметр *MaxIterations* был увеличен до значения 100. Этот уровень точности потребовал учёта семи слагаемых в рядах Фурье, используемых в данной методике, что довело число параметров до 90. Дальнейшее же увеличение точности приводит к резкому росту расхода оперативной памяти компьютера. После нахождения локального минимума мы имеем массив данных, который записывается в файл для дальнейшего использования при построении орбит.

В общем случае для системы n тел с массами m_j обозначим z_j координаты положения j-го тела в момент времени τ с соответствующим значением аргумента t. Тогда для n тел с траекториями $z_1(t), z_2(t),\ldots, z_n(t)$ функционал действия запишется в виде [2], [3]:

$$S=\int_0^{2\pi}\left(\sum_j \frac{m_j}{2}\left|\dot z_j\right|^2-\sum_{j,k;k<j}\frac{m_j m_k}{\left|z_j-z_k\right|}\right)dt. \qquad (1.1)$$

Далее используем разложение траекторий в ряды Фурье

$$z_j(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{ikt},\ \ y_k\in X. \qquad (1.2)$$

При этом задачу трёх тел рационально полагать плоской, тогда траектории для такой задачи будут двухкомпонентными $z_j(t)=\{x_j(t), y_j(t)\}$ с коэффициентами $\gamma_k=\{\alpha_k,\beta_k\}$, задаваемыми, следуя (1.2), в виде рядов

$$\begin{aligned} x(t)&=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^c\cos(kt)+a_k^s\sin(kt)) \\ y(t)&=b_0+\sum_{k=1}^{\infty}(b_k^c\cos(kt)+b_k^s\sin(kt)), \end{aligned} \qquad (1.3)$$

где

$$a_0=\alpha_0,\ \ a_k^c=\alpha_k+\alpha_{-k},\ \ a_k^s=\beta_{-k}-\beta_k,$$
$$b_0=\beta_0,\ \ b_k^c=\beta_k+\beta_{-k},\ \ b_k^s=\alpha_k-\alpha_{-k}.$$

Вначале рассмотрим плоское движение трёх тел равной массы. Так как функционал действия

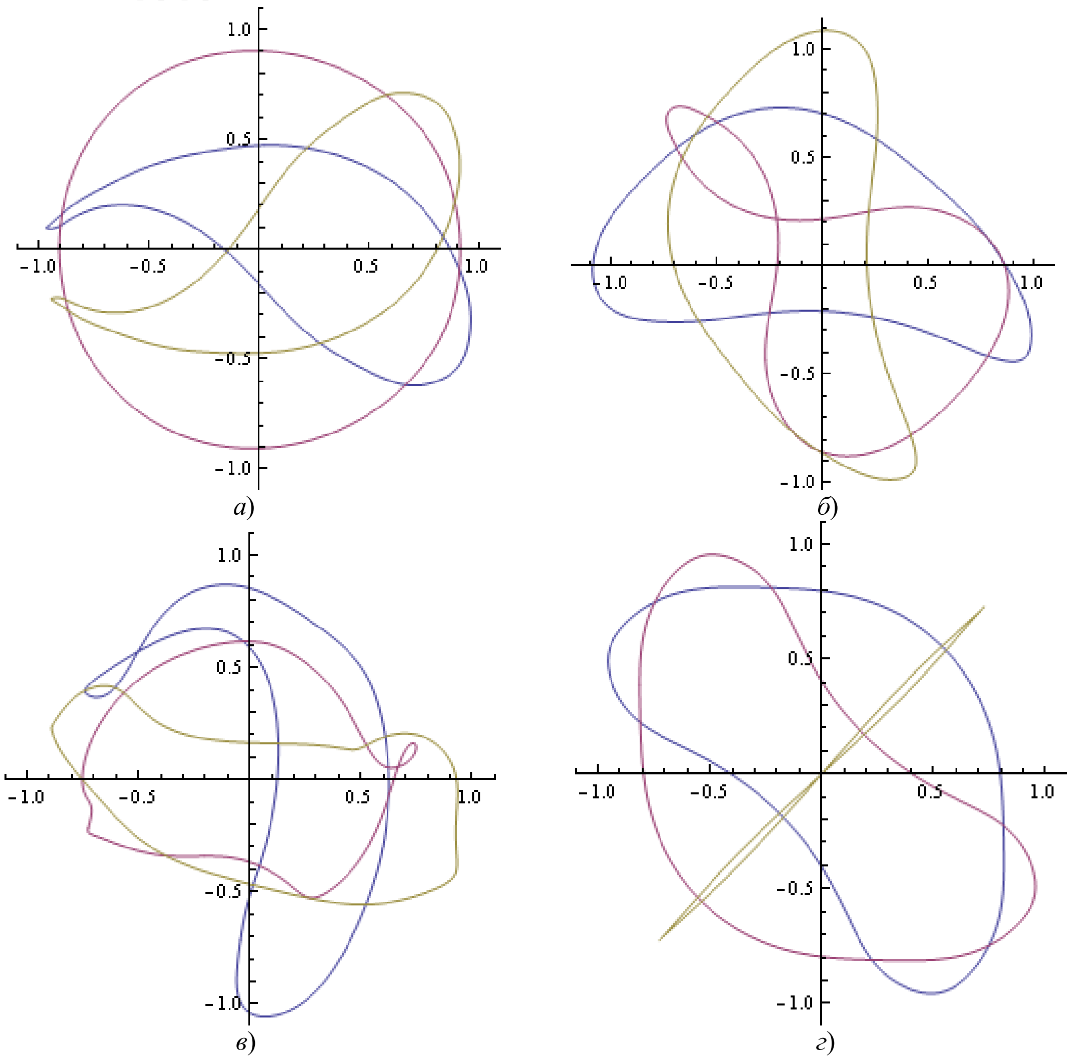

Рисунок 1.1 – Модельные орбиты, удовлетворяющие принципу наименьшего действия (*а* – *г*)

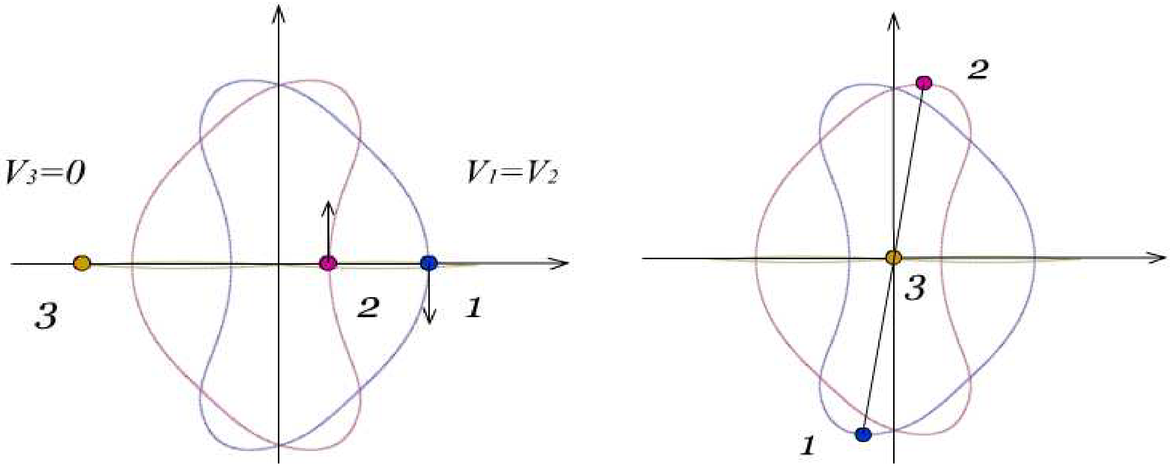

Рисунок 2.1 – Орбита «Новая I» и положения тел на орбите при $\tau = 0$ и $\tau = T / 4$

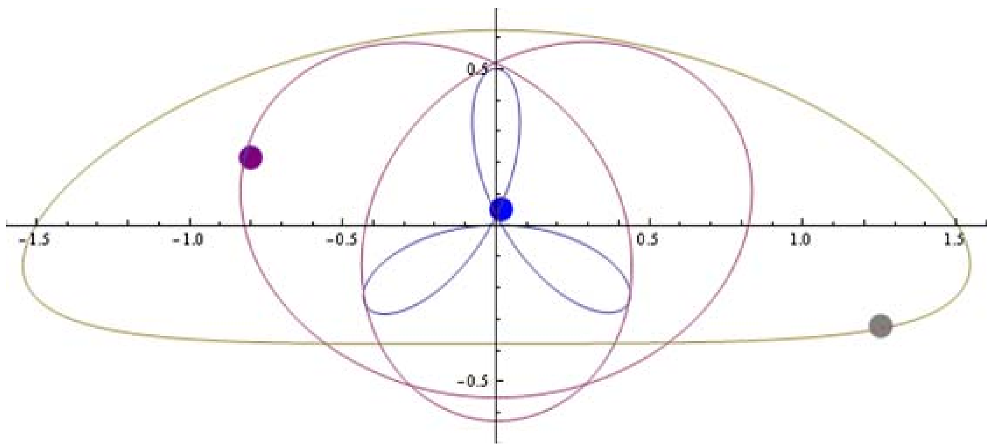

Рисунок 2.2 – Орбита «Новая II» для частного случая неравных масс

в пространстве параметров a_0, a_k^c, a_k^s, b_0, b_k^c, b_k^s имеет множество локальных минимумов, то должно существовать множество периодических орбит, среди которых присутствуют как известные, так и новые.

Итогом компьютерной симуляции являются орбиты тел тройной системы, число которых в настоящее время приближается к 1300. Но не все полученные орбиты являются физическими, то есть удовлетворяющими динамическим уравнениям. На рисунке 1.1 представлены некоторые новые орбиты, которые претендуют стать периодическими.

2 Численное решение уравнений и новые периодические орбиты

Является ли модельная орбита реальной периодической, то есть физической орбитой, определяется путем численного решения системы дифференциальных уравнений для трёх связанных тел [3]–[5]

$$m_j \ddot{z}_j^\alpha = \sum_{k:k\neq j} m_j m_k \frac{z_j^\alpha - z_k^\alpha}{\left|z_j - z_k\right|^3}; \quad j = 1,2,3, \ \alpha = 1,2;$$

с использованием массивов полученных орбитальных данных.

Во всех случаях при моделировании за единицу измерения массы тела была принята масса Солнца, обе шкалы на графиках орбит были масштабированы астрономическими единицами, а единице измерения времени, то есть секунде, соответствует земной сидерический год.

В рамках используемой методики нами была получена новая периодическая орбита (далее «Новая I») для трёх тел равной массы, представленная на рисунке 2.1 (вариант *г* рисунка 1.1). Два тела двигаются по симметричным замкнутым кривым, а третье тело совершает движение вдоль вытянутой восьмерки очень близкой к горизонтальной оси. В начальный момент времени все три тела расположены на одной прямой, причем скорость третьего тела равна нулю, а второе и первое тело имеют одинаковые по модулю, но противоположные по направлению скорости, перпендикулярные этой прямой. Через промежуток времени $\tau = T / 4$ тела снова выстраиваются в линию, причем третье тело в этот момент времени проходит центр масс системы.

Далее был рассмотрен интересный частный случай системы, состоящей из трёх тел с различными массами, отношение между которыми определяется так называемым «золотым сечением». Последнее было сделано из эстетических соображений. В этом случае массы определяются следующим образом:

$$m_1 \approx 1{,}851\ m;$$
$$m_2 \approx 0{,}710\ m;$$
$$m_3 \approx 0{,}439\ m.$$

Введение различных масс тел приводит к появлению двух дополнительных параметров задачи, что существенно ее усложняет и значительно увеличивает время моделирования, но зато и повышает ее теоретическую привлекательность. Эта проблема была успешно преодолена, и нами была получена соответствующая периодическая орбита, названная «Новая II» и представленная на рисунке 2.2, где также отмечены начальные положения тел. Первому телу соответствует синяя метка в центре, второму – красная слева и третьему – коричневая справа. С помощью пакета Mathematica периодические орбиты «Новая I» и «Новая II» анимируются, что позволяет детально увидеть движение тел в системе.

Следует заметить, что среди множества орбит, следующих из минимизации функционала действия (1.1), новые физические периодические орбиты составляют порядка 1%, причем часть из них являются неустойчивыми и по этой причине нами сепарируются.

Заключение

Таким образом, в работе описан метод моделирования периодических орбит для систем, состоящих из трёх небесных тел, которые связаны между собой ньютоновским гравитационным взаимодействием. Данный метод опирается на использование базовых принципов и динамических уравнений нерелятивистской небесной механики и на симуляционные возможности системы компьютерной алгебры *Mathematica* разработчика *Wolfram Research*. В рамках общей задачи трёх тел небесной механики в двумерном приближении получены две новые периодические орбиты для случаев одинаковых и различных масс компонентов. Активное развитие компьютерных технологий уже дало результаты [7] и в трехмерном моделировании периодических орбит, что делает данное научное направление весьма перспективной областью исследований в глобальном мире изучения космических объектов и явлений.

Предложенный метод и результаты работы могут быть использованы также в учебном процессе в классических университетах в рамках курсов «Общая астрономия» и «Астрофизика».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moore*, C. Braids in classical dynamics / C. Moore // Phys. Rev. Lett. – 1993. – Vol. 70. – P. 3675–3683.

2. *Vanderbei*, R.J. New orbits for the *n*-body problem / R.J. Vanderbei // Annals of the New York Academy of Sciences. – 2004. – Vol. 1017. – P. 422–430.

3. *Montgomery*, *R*. A new solution to the three – body problem / R. Montgomery // Notices Amer. Math. Soc. – 2001. – Vol. 48, № 5. – P. 471–481.

4. *Рой*, *А*. Движение по орбитам / А. Рой. – М.: Мир, 1981. – 545 с.

5. *Орлов*, *В.В*. Периодические орбиты в задаче *N* тел / В.В. Орлов, А.В. Рубинов, А.И. Мартынов // Физика Космоса. – Екатеринбург: УГУ, – 2010. – С. 108–121.

6. *Мартынова*, *А.И*. Периодические орбиты в общей задаче трёх тел / А.И. Мартынова, В.В. Орлов // Астрономический вестник. – 2013. – Т. 47, № 5. – С. 395–407.

7. *Титов*, *В.Б*. Периодические орбиты общей задачи трёх тел с нулевым кинетическим моментом / В.Б. Титов // Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8, № 2. – С. 377–389.

Поступила в редакцию 20.10.16.