

УДК 517.958:537.8

РАССЕЯНИЕ ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ НА ТОНКОЙ НЕЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ И БИИЗОТРОПНОМ ШАРЕ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Г.Ч. Шушкевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

SCATTERING OF THE FIELD OF THE ELECTRICAL DIPOLE ON THIN UNCLOSED SPHERICAL SHELL AND BI-ISOTROPIC BALL. ANALYTICAL APPROACH

G.Ch. Shushkevich

Y. Kupala Grodno State University

Построено аналитическое решение осесимметричной граничной задачи, описывающей процесс рассеяния электромагнитного поля электрического диполя на биизотропном шаре. Диполь расположен внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки. Получена формула для вычисления диаграммы направленности электрического поля. Построены графики диаграммы направленности для некоторых параметров задачи.

Ключевые слова: электрический диполь, уравнения Максвелла, векторные сферические волновые функции, парные сумматорные уравнения, диаграмма направленности электрического поля.

The analytical solution of axially symmetric boundary problem of process scattering of electromagnetic field of electric dipole on bi-isotropic ball is constructed. The dipole is located inside thin unclosed spherical shell. The formula for calculating directive pattern of electric field is received. The graphics of directive pattern for some parameters of the problem are constructed.

Keywords: electric dipole, Maxwell's equations, vector spherical wave functions, dual series equations, directive pattern of the electric field.

Введение

В последние годы значительно возрос интерес исследователей к изучению электродинамических свойств композитных материалов. Примером таких материалов могут быть киральные материалы и метаматериалы, подробная классификация которых приводится в работах [1]–[4]. Биизотропные среды являются обобщением киральных сред. Кроме киральности, данные среды обладают также свойством невзаимности, что делает их перспективными в прикладном отношении [5]–[7].

Биизотропные среды обладают способностью как усиливать, так поглощать электромагнитные поля. Свойство усиления может быть использовано в проектировании различных эффективных антенных систем, свойство поглощения – при создании малоотражающих покрытий и электромагнитных экранов [8]–[11].

Рассмотрим некоторые научные работы, относящиеся к данной теме. В монографии [12] излагается теория дифракции электромагнитных волн, возбуждаемых элементарными источниками электрического или магнитного типов на киральных телах вращения с цилиндрической и сферической симметрией. Излучение системы источников в киральной среде рассматривается в [13]–[14]. Аналитическое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на

биизотропном шаре представлено в работах [15]–[16]. В [17] построено аналитическое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на плоском слое из композитного материала. Проникновение электромагнитных полей электрического и магнитного диполей через плоский биизотропный слой рассматривается в [18]. В работах [19]–[20] исследуется отражение электромагнитных волн от плоских киральных структур. Методом частичных областей в [21] решена задача рассеяния плоской электромагнитной волны на металлическом цилиндре, покрытом киральным слоем. Численное исследование рассеяния поля электрического диполя на биизотропном шаре проведено в [22].

В данной работе построено аналитическое решение осесимметричной задачи рассеяния поля электрического диполя на биизотропном шаре. Источник электромагнитного поля расположен внутри идеальной проводящей тонкой незамкнутой сферической оболочки.

1 Постановка и представление решения задачи

Пусть пространство R^3 разделено сферой S радиуса a_1 с центром в точке O_1 на две области D_0 ($r_1 > a_1$), D_1 ($0 \leq r_1 < a_1$) (рисунок 1.1). В области D_0 находится идеально проводящая

бесконечно тонкая незамкнутая сферическая оболочка Γ_1 , расположенная на сфере Γ радиуса a с центром в точке O . Область пространства, ограниченную сферой Γ , обозначим через $D_0^{(0)}$ ($0 \leq r < a$), тогда $D_0^{(1)} = D_0 \setminus (D_0^{(0)} \cup \Gamma)$. Расстояние между точками O и O_1 обозначим через h .

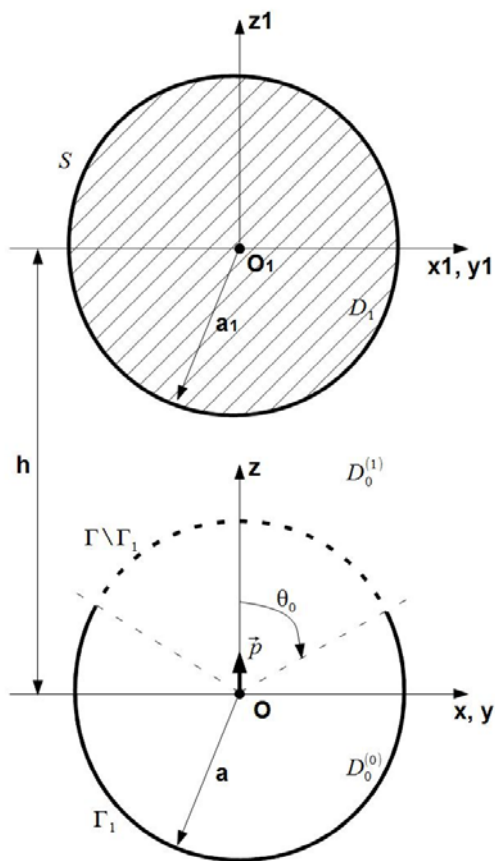


Рисунок 1.1 – Геометрия задачи

Область D_0 заполнена средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 и магнитной проницаемостью μ_0 , область D_1 – однородной биизотропной средой, материал которой характеризуется параметрами ϵ, μ, G, Z .

В точке O расположен ориентированный вдоль оси Oz электрический диполь Герца, колеблющийся с круговой частотой ω . Будем полагать, что на поверхности S отсутствуют поверхностные токи и заряды.

Для решения задачи свяжем с точками O и O_1 сферические координаты. Тонкая незамкнутая сферическая оболочка Γ_1 и сферическая оболочка S описываются следующим образом:

$$\Gamma_1 = \{r = a, \theta_0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$S = \{r_1 = a_1, 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Обозначим через \vec{E}_e, \vec{H}_e вектора напряженности электрического и магнитного поля диполя соответственно.

В результате взаимодействия электромагнитного поля \vec{E}_e, \vec{H}_e диполя с биизотропным шаром и незамкнутой сферической оболочкой Γ_1 образуются вторичные поля. Пусть \vec{E}_0^0, \vec{H}_0^0 – вторичное поле, отраженное от границы Γ_1 в области $D_0^{(0)}$, \vec{E}_1^0, \vec{H}_1^0 – вторичное поле в области D_1 , $\vec{E}_0 = \vec{E}_1^0 + \vec{E}_1^1, \vec{H}_0 = \vec{H}_1^0 + \vec{H}_1^1$ – суммарное вторичное поле в области $D_0^{(1)}$, \vec{E}_0^1, \vec{H}_0^1 – вторичное поле, отраженное от границы Γ_1 в области $D_0^{(1)}$, \vec{E}_1^1, \vec{H}_1^1 – вторичное поле, отраженное от границы S в области $D_0^{(1)}$.

Реальное электромагнитное поле определяется с помощью формул:

$$\vec{E}_j^k = \text{Re}(\vec{E}_j^k e^{-i\omega t}),$$

$$\vec{H}_j^k = \text{Re}(\vec{H}_j^k e^{-i\omega t}),$$

$$j = 0, 1; k = 0, 1; i - \text{мнимая единица.}$$

Постановка задачи. Требуется определить вторичные электромагнитные поля

$$\vec{E}_0^0, \vec{H}_0^0 \in C^1(D_0^{(0)}) \cap C(\bar{D}_0^{(0)}),$$

$$\vec{E}_0^1, \vec{H}_0^1 \in C^1(D_0^{(1)}) \cap C(\bar{D}_0^{(1)}),$$

$$\vec{E}_1^1, \vec{H}_1^1 \in C^1(D_1) \cap C(\bar{D}_1),$$

которые удовлетворяют:

– уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \vec{E}_0^0 = i\omega\mu_0 \vec{H}_0^0, \quad \text{rot } \vec{H}_0^0 = -i\omega\epsilon_0 \vec{E}_0^0 \quad \text{в } D_0^{(0)}, \quad (1.1)$$

$$\text{rot } \vec{E}_0^1 = i\omega\mu_0 \vec{H}_0^1, \quad \text{rot } \vec{H}_0^1 = -i\omega\epsilon_0 \vec{E}_0^1 \quad \text{в } D_0^{(1)}, \quad (1.2)$$

$$\text{rot } \vec{E}_1^1 = i\omega(\mu \vec{H}_1^1 + Z \vec{E}_1^1),$$

$$\text{rot } \vec{H}_1^1 = -i\omega(\epsilon \vec{E}_1^1 + G \vec{H}_1^1) \quad \text{в } D_1, \quad (1.3)$$

где $G = (\tau + i\kappa)\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, $Z = (\tau - i\kappa)\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, κ – параметр киральности, τ – параметр Теллгена;

– граничному условию на поверхности идеально проводящей незамкнутой сферической оболочки Γ_1

$$[\vec{n}, \vec{E}_0^0] \Big|_{\Gamma_1} = [\vec{n}, \vec{E}_e + \vec{E}_0^0] \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad (1.4)$$

где \vec{n} – единичная нормаль к поверхности Γ_1 ,

– граничным условиям на поверхности S

$$[\vec{n}, \vec{E}_0^1] \Big|_S = [\vec{n}, \vec{E}_1^0] \Big|_S,$$

$$[\vec{n}, \vec{H}_0^1] \Big|_S = [\vec{n}, \vec{H}_1^0] \Big|_S, \quad (1.5)$$

где \vec{n} – единичная нормаль к поверхности S , и условию излучения на бесконечности [23]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \vec{E}_0^0}{\partial r} - ik_0 \vec{E}_0^0 \right) = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \vec{H}_0^0}{\partial r} - ik_0 \vec{H}_0^0 \right) = 0, \quad (1.6)$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ – волновое число.

Потребуем также выполнение условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля на открытой части сферы $\Gamma \setminus \Gamma_1$

$$\left[\vec{n}, \vec{H}_e + \vec{H}_0^0 \right] \Big|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = \left[\vec{n}, \vec{H}_0 \right] \Big|_{\Gamma \setminus \Gamma_1}, \quad (1.7)$$

где \vec{n} – единичная нормаль к поверхности $\Gamma \setminus \Gamma_1$, и условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на поверхности Γ [24]–[26]

$$\left[\vec{n}, \vec{E}_e + \vec{E}_0^0 \right] \Big|_{\Gamma} = \left[\vec{n}, \vec{E}_0 \right] \Big|_{\Gamma}, \quad (1.8)$$

где \vec{n} – единичная нормаль к поверхности Γ .

Первичное поле электрического диполя Герца представим через векторные сферические волновые функции [22], [27], [28]

$$\vec{E}_e = E_0 \vec{n}_{01}(r, \theta, k_0), \quad \vec{H}_e = H_0 \vec{m}_{01}(r, \theta, k_0), \quad (1.9)$$

где

$$E_0 = \frac{ik_0^3}{4\pi\epsilon_0} p, \quad H_0 = \frac{E_0 k_0}{i\omega\mu_0},$$

$\vec{p} = p\vec{e}_z$ – электрический момент диполя,

$$\vec{n}_{0n}(r, \theta, k) = \frac{n(n+1)}{kr} h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta) \vec{e}_r + g_n^{(1)}(kr) P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_\theta,$$

$$\vec{m}_{0n}(r, \theta, k) = -h_n^{(1)}(kr) P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_\phi,$$

$$g_n^{(1)}(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x h_n^{(1)}(x)) =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \left((n+1) h_{n-1}^{(1)}(x) - n h_{n+1}^{(1)}(x) \right), \quad n=1, 2, \dots,$$

$P_n(x)$ – полиномы Лежандра, $P_n^1(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра первого рода, $h_n^{(1)}(x)$ – сферические функции Ханкеля первого рода [29].

Вторичные электромагнитные поля в области D_0 представим в виде суперпозиции векторных сферических волновых функций [27], [28], которые удовлетворяют уравнениям (1.1), (1.2) и условию на бесконечности (1.6),

$$\vec{E}_0^0 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(0)} \vec{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + d_n^{(0)} \vec{m}_{0n}(r, \theta, k_0) \right), \quad (1.10)$$

$$\vec{H}_0^0 = H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(0)} \vec{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + c_n^{(0)} \vec{m}_{0n}(r, \theta, k_0) \right) \text{ в } D_0^{(0)}, \quad (1.11)$$

$$\vec{E}_0^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(1)} \vec{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + d_n^{(1)} \vec{m}_{0n}(r, \theta, k_0) \right), \quad (1.12)$$

$$\vec{H}_0^1 = H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(1)} \vec{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + c_n^{(1)} \vec{m}_{0n}(r, \theta, k_0) \right) \text{ в } D_0^{(1)}, \quad (1.13)$$

$$\vec{E}_1^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(2)} \vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) + b_n^{(2)} \vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) \right), \quad (1.14)$$

$$\vec{H}_1^1 = H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n^{(2)} \vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) + a_n^{(2)} \vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) \right) \text{ в } D_0^{(1)}, \quad (1.15)$$

где

$$\vec{n}_{0n}(r, \theta, k) = \frac{n(n+1)}{kr} j_n(kr) P_n(\cos\theta) \vec{e}_r + g_n(kr) P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_\theta,$$

$$\vec{m}_{0n}(r, \theta, k) = -j_n(kr) P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_\phi,$$

$$g_n(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x j_n(x)) =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \left((n+1) j_{n-1}(x) - n j_{n+1}(x) \right), \quad n=1, 2, \dots,$$

$j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя первого рода [29].

Вторичное электромагнитное поле в области D_1 представим в виде суперпозиции векторных сферических волновых функций в композитных средах [28], которые удовлетворяют уравнениям (1.3),

$$\vec{E}_1^0 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(1)} \vec{K}_{0n}^{(1)}(r_1, \theta_1, k_1) + b_n^{(1)} \vec{K}_{0n}^{(2)}(r_1, \theta_1, k_2) \right), \quad (1.16)$$

$$\vec{H}_1^0 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(1)} p_1 \vec{K}_{0n}^{(1)}(r_1, \theta_1, k_1) + b_n^{(1)} p_2 \vec{K}_{0n}^{(2)}(r_1, \theta_1, k_2) \right), \quad (1.17)$$

где

$$\vec{K}_{0n}^{(j)}(r, \theta, k_j) = \vec{n}_{0n}(r, \theta, k_j) - q_j \vec{m}_{0n}(r, \theta, k_j),$$

$$k_j = \sqrt{g + 0.5 a^2 + a f_j}, \quad 0 \leq \arg k_j < \pi,$$

$$g = \omega^2 (\epsilon\mu - ZG), \quad f_j = (-1)^j f_0,$$

$$f_0 = \sqrt{\omega^2 \epsilon\mu - b^2}, \quad 0 \leq \arg f_0 < \pi,$$

$$b = 0, 5\omega(G+Z), \quad a = i\omega(G-Z),$$

$$q_j = g / k_j g_j, \quad g_j = f_j - 0.5a,$$

$$p_j = (i g / (\omega g_j) - Z) / \mu.$$

Неизвестные коэффициенты $a_n^{(j)}, b_n^{(j)}, j=1, 2, c_n^{(p)}, d_n^{(p)}, p=0, 1,$ подлежат определению из граничных условий.

2 Выполнение граничных условий

Для выполнения граничных условий (1.4), (1.7), (1.8) представим функции \vec{E}_1^1, \vec{H}_1^1 через векторные сферические волновые функции в системе координат с началом в точке O , используя формулы [27], [28],

$$\vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^n(k_0 h, \pi) \vec{n}_{0s}(r, \theta, k_0), \quad 0 \leq r < h,$$

$$\vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^n(k_0 h, \pi) \vec{m}_{0s}(r, \theta, k_0), \quad 0 \leq r < h,$$

где

$$A_s^n(k_0 h, \alpha) = k_0 h \cos \alpha \left[\frac{1}{(2s+3)} C_{s+1}^n + \frac{1}{(2s-1)} C_{s-1}^n \right] + C_s^n,$$

$$C_s^n = (2s+1) \sum_{\sigma=|s-n|}^{s+n} i^{\sigma+s-n} b_\sigma^{(n0s0)} h_\sigma^{(1)}(k_0 h) P_\sigma(\cos \alpha),$$

$b_\sigma^{(n0q0)} = (nq00 | \sigma 0)^2$, $(nq00 | \sigma 0)$ – коэффициенты Клебша – Гордона [23].

Тогда

$$\bar{E}_1^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^{(2)} \bar{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + A_n^{(2)} \bar{m}_{0n}(r, \theta, k_0)), \quad (2.1)$$

$$\bar{H}_1^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(2)} \bar{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + B_n^{(2)} \bar{m}_{0n}(r, \theta, k_0)), \quad (2.2)$$

где

$$A_n^{(2)} = \sum_{s=1}^{\infty} a_s^{(2)} A_n^s(k_0 h, \pi),$$

$$B_n^{(2)} = \sum_{s=1}^{\infty} b_s^{(2)} A_n^s(k_0 h, \pi). \quad (2.3)$$

Согласно представлениям (1.9), (1.10), (1.12), (2.1), условие непрерывности (1.8), с учетом условия ортогональности присоединенных функций Лежандра на отрезке $[0; \pi]$, примет вид:

$$g_n^{(1)}(\xi_0) \delta_{1n} + g_n(\xi_0) c_n^{(0)} = g_n^{(1)}(\xi_0) c_n^{(1)} + g_n(\xi_0) B_n^{(2)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

$$j_n(\xi_0) d_n^{(0)} = h_n^{(1)}(\xi_0) d_n^{(1)} + j_n(\xi_0) A_n^{(2)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

где δ_{1n} – символ Кронекера, $\xi_0 = k_0 a$.

Выполнив граничное условие (1.4) на поверхности сферической оболочки Γ_1 и условие непрерывности (1.7), получим два парных сумматорных уравнения вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (h_n^{(1)}(\xi_0) \delta_{1n} + j_n(\xi_0) c_n^{(0)} - h_n^{(1)}(\xi_0) c_n^{(1)} - j_n(\xi_0) B_n^{(2)}) \times \\ \times P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (g_n^{(1)}(\xi_0) c_n^{(1)} + g_n(\xi_0) B_n^{(2)}) \times \\ \times P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(\xi_0) d_n^{(0)} - g_n^{(1)}(\xi_0) d_n^{(1)} - g_n(\xi_0) A_n^{(2)}) P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (h_n^{(1)}(\xi_0) d_n^{(1)} + j_n(\xi_0) A_n^{(2)}) \times \\ \times P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Преобразуем парные уравнения (2.6). Для этого исключим коэффициенты $c_n^{(0)}$ с помощью

представления (2.4), учитывая значение вронскиана [29]

$$W[xj_n(x), xh_n^{(1)}(x)] = i.$$

Затем введем в рассмотрение новые коэффициенты X_n по формуле

$$c_n^{(1)} = X_n \frac{d}{d\xi_0} (\xi_0 j_n(\xi_0)) + \delta_{1n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

и малый параметр $q_n^{(1)}$ – по формуле

$$q_n^{(1)} = 1 + \frac{4i\xi_0}{2n+1} \frac{d}{d\xi_0} (\xi_0 j_n(\xi_0)) \frac{d}{d\xi_0} (\xi_0 h_n^{(1)}(\xi_0)),$$

$$q_n^{(1)} = O(n^{-2}) \text{ при } n \gg \xi_0.$$

В результате парные сумматорные уравнения (2.6) примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} X_n P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(1-q_n^{(1)}) X_n P_n^1(\cos \theta) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) f_n^{(1)} P_n^1(\cos \theta), \quad \theta_0 < \theta \leq \pi, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

где

$$f_n^{(1)} = 4i\xi_0^2 \frac{g_n^{(1)}(\xi_0) \delta_{1n} + g_n(\xi_0) B_n^{(2)}}{2n+1}. \quad (2.10)$$

Парные сумматорные уравнения (2.9) преобразуются к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго рода [24]–[26]:

$$X_s (1 - q_s^{(1)}) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{(1)} Q_{sn}^{(1)}(\theta_0) X_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(1)} (\delta_{ns} - Q_{sn}^{(1)}(\theta_0)), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

где

$$Q_{sn}^{(1)}(\theta_0) = Q_{sn}(\theta_0) - \frac{Q_{s0}(\theta_0) \cos((n+0.5)\theta_0)}{\cos(0.5\theta_0)},$$

$$Q_{sn}(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(s-n)\theta_0}{s-n} + \frac{\sin(s+n+1)\theta_0}{s+n+1} \right],$$

$$\left. \frac{\sin(s-n)\theta_0}{s-n} \right|_{s=n} = \theta_0.$$

Теперь преобразуем парные уравнения (2.7). Для этого исключим коэффициенты $d_n^{(0)}$, используя представление (2.5), введем в рассмотрение новые коэффициенты Y_n по формуле

$$d_n^{(1)} = (2n+1) j_n(\xi_0) Y_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.12)$$

малый параметр $q_n^{(2)}$ – по формуле

$$q_n^{(2)} = 1 - (2n+1) i \xi_0 j_n(\xi_0) h_n^{(1)}(\xi_0),$$

$$q_n^{(2)} = O(n^{-2}) \text{ при } n \gg \xi_0,$$

и получим

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) Y_n P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (1 - q_n^{(2)}) Y_n P_n^1(\cos \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(2)} P_n^1(\cos \theta), \\ \theta_0 < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (2.13)$$

где $f_n^{(2)} = -i \xi_0 j_n(\xi_0) A_n^{(2)}$. (2.14)

Парные сумматорные уравнения (2.13) преобразуем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида [24]–[26]:

$$\begin{aligned} (-1)^s Y_s - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q_n^{(2)} Q_{sn}^{(1)}(\pi - \theta_0) Y_n = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n^{(2)} Q_{sn}^{(1)}(\pi - \theta_0), \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Теперь выполним граничные условия (1.5). Для этого представим функции \vec{E}_0^1 , \vec{H}_0^1 через векторные сферические волновые функции в системе координат с началом в точке O_1 . На основании формул [27], [28]

$$\vec{n}_{0n}(r, \theta, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^n(k_0 h, 0) \vec{n}_{0s}(r_1, \theta_1, k_0), \quad 0 \leq r_1 < h,$$

$$\vec{m}_{0n}(r, \theta, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^n(k_0 h, 0) \vec{m}_{0s}(r_1, \theta_1, k_0), \quad 0 \leq r_1 < h,$$

имеем

$$\vec{E}_0^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{(1)} \vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) + D_n^{(1)} \vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0)), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_0^1 = H_0 \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^{(1)} \vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) + \\ + C_n^{(1)} \vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0)), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $C_n^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(1)} A_n^s(k_0 h, 0)$,

$$D_n^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} d_s^{(1)} A_n^s(k_0 h, 0). \quad (2.18)$$

Принимая во внимание представления (1.14)–(1.17), (2.16), (2.17), выполняя граничные условия (1.5) и учитывая ортогональность присоединённых функций Лежандра на отрезке $[0, \pi]$, получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$V(n) = M(n)^{-1} F(n), \quad (2.19)$$

где

$$M(n) = \begin{pmatrix} m_{11}(n) & m_{12}(n) & m_{13}(n) & m_{14}(n) \\ m_{21}(n) & m_{22}(n) & m_{23}(n) & m_{24}(n) \\ m_{31}(n) & m_{32}(n) & m_{33}(n) & m_{34}(n) \\ m_{41}(n) & m_{42}(n) & m_{43}(n) & m_{44}(n) \end{pmatrix},$$

$$V(n) = \begin{pmatrix} a_n^{(1)} \\ a_n^{(2)} \\ b_n^{(1)} \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}, \quad F(n) = \begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ f_3(n) \\ f_4(n) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} m_{11}(n) &= g_n(\gamma_1), & m_{12}(n) &= 0, \\ m_{13}(n) &= g_n(\gamma_2), & m_{14} &= -g_n^{(1)}(\gamma_0), \\ m_{21}(n) &= q_1 j_n(\gamma_1), & m_{22}(n) &= h_n^{(1)}(\gamma_0), \\ m_{23}(n) &= q_2 j_n(\gamma_2), & m_{24}(n) &= 0, \\ m_{31}(n) &= \bar{p}_1 g_n(\gamma_1), & m_{32}(n) &= -g_n^{(1)}(\gamma_0), \\ m_{33}(n) &= \bar{p}_2 g_n(\gamma_2), & m_{34}(n) &= 0, \\ m_{41}(n) &= q_1 \bar{p}_1 j_n(\gamma_1), & m_{42}(n) &= 0, \\ m_{43}(n) &= q_2 \bar{p}_2 j_n(\gamma_2), & m_{44}(n) &= h_n^{(1)}(\gamma_0), \\ f_1(n) &= C_n^{(1)} g_n(\xi_0), & f_2(n) &= -D_n^{(1)} j_n(\xi_0), \\ f_3(n) &= D_n^{(1)} g_n(\xi_0), & f_4(n) &= -C_n^{(1)} j_n(\xi_0), \\ \bar{p}_j &= i \omega \mu_0 p_j / k_0, \quad j = 1, 2, \\ \gamma_0 &= k_0 a_1, & \gamma_1 &= k_1 a_1, & \gamma_2 &= k_2 a_1. \end{aligned}$$

Элементы обратной матрицы $M(n)^{-1}$ обозначим через $\bar{m}_{kp}(n)$, тогда из (2.19) следует связь между коэффициентами $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$:

$$\begin{aligned} a_n^{(2)} &= \alpha_n^{(a)} C_n^{(1)} + \beta_n^{(a)} D_n^{(1)}, \\ b_n^{(2)} &= \alpha_n^{(b)} C_n^{(1)} + \beta_n^{(b)} D_n^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(a)} &= \bar{m}_{21}(n) g_n(\gamma_0) - \bar{m}_{24}(n) j_n(\gamma_0), \\ \beta_n^{(a)} &= \bar{m}_{23}(n) g_n(\gamma_0) - \bar{m}_{22}(n) j_n(\gamma_0), \\ \alpha_n^{(b)} &= \bar{m}_{41}(n) g_n(\gamma_0) - \bar{m}_{44}(n) j_n(\gamma_0), \\ \beta_n^{(b)} &= \bar{m}_{43}(n) g_n(\gamma_0) - \bar{m}_{42}(n) j_n(\gamma_0). \end{aligned}$$

В (2.3) исключим коэффициенты $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$, принимая во внимание представления (2.20), (2.18), (2.8), (2.12), и получим, что

$$A_n^{(2)} = \sum_{p=1}^{\infty} X_p U_{np}^{(a)} + \sum_{p=1}^{\infty} Y_p V_{np}^{(a)} + W_n^{(a)}, \quad (2.21)$$

$$B_n^{(2)} = \sum_{p=1}^{\infty} X_p U_{np}^{(b)} + \sum_{p=1}^{\infty} Y_p V_{np}^{(b)} + W_n^{(b)}, \quad (2.22)$$

где

$$U_{np}^{(\delta)} = \frac{d}{d\xi_0} (\xi_0 j_p(\xi_0)) \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s^{(\delta)} A_s^p(k_0 h, 0) A_n^s(k_0 h, \pi),$$

$$V_{np}^{(\delta)} = (2p+1) j_p(\xi_0) \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s^{(\delta)} A_s^p(k_0 h, 0) A_n^s(k_0 h, \pi),$$

$$W_n^{(\delta)} = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s^{(\delta)} A_s^1(k_0 h, 0) A_n^s(k_0 h, \pi), \quad \delta = \{a, b\}.$$

Теперь преобразуем правые части систем (2.11), (2.15), исключив коэффициенты $A_n^{(2)}$, $B_n^{(2)}$ на основании представлений (2.21), (2.22). В результате получим связанную бесконечную СЛАУ второго рода

$$\begin{aligned} X_s (1 - q_s^{(1)}) + \sum_{n=1}^{\infty} (q_n^{(1)} Q_{sn}^{(1)}(\theta_0) - \tilde{\alpha}_{ns}) X_n - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{ns} Y_n = \tilde{f}_s, \quad s = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$(-1)^s Y_s + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_{ns} - (-1)^n q_n^{(2)} Q_{sn}^{(1)}(\pi - \theta_0)) Y_n + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{ns} X_n = \tilde{f}_s, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (2.23)$$

где

$$\tilde{\alpha}_{ns} = 4i\xi_0^2 \sum_{p=1}^{\infty} g_p(\xi_0) U_{pn}^{(b)}(\delta_{ps} - Q_{ps}^{(1)}(\theta_0)) / (2p+1),$$

$$\tilde{\beta}_{ns} = 4i\xi_0^2 \sum_{p=1}^{\infty} g_p(\xi_0) V_{pn}^{(b)}(\delta_{ps} - Q_{ps}^{(1)}(\theta_0)) / (2p+1),$$

$$\tilde{\alpha}_{ns} = i\xi_0 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p j_p(\xi_0) Q_{ps}^{(1)}(\pi - \theta_0) U_{pn}^{(a)},$$

$$\tilde{\beta}_{ns} = i\xi_0 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p j_p(\xi_0) Q_{ps}^{(1)}(\pi - \theta_0) V_{pn}^{(a)},$$

$$f_s = 4i\xi_0^2 \sum_{p=1}^{\infty} g_p(\xi_0) W_p^{(b)}(\delta_{ps} - Q_{ps}^{(1)}(\theta_0)) / (2p+1) + 4i\xi_0^2 g_1^{(1)}(\xi_0) (\delta_{1s} - Q_{1s}^{(1)}(\theta_0)) / 3,$$

$$\tilde{f}_s = -i\xi_0 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p j_p(\xi_0) Q_{ps}^{(1)}(\pi - \theta_0) W_p^{(a)}.$$

3 Диаграмма направленности электромагнитного поля

Представим функцию \vec{E}_1^1 через векторные сферические волновые функции в системе координат с началом в точке O . Используя формулы [28]

$$\tilde{n}_{0n}(r, \theta, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \tilde{n}_{0s}(r, \theta, k_0), \quad r > h,$$

$$\tilde{m}_{0n}(r, \theta, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \tilde{m}_{0s}(r, \theta, k_0), \quad r > h,$$

где

$$\tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) = -k_0 h_0 \left[\frac{1}{(2s+3)} \tilde{C}_{s+1}^n + \frac{1}{(2s-1)} \tilde{C}_{s-1}^n \right] + \tilde{C}_s^n,$$

$$\tilde{C}_s^n = (2s+1) \sum_{\sigma=|s-n|}^{s+n} i^{\sigma+s-n} b_{\sigma}^{(n0s0)} j_{\sigma}(k_0 h) P_{\sigma}(\cos \pi),$$

получим

$$\vec{E}_1^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{s=1}^{\infty} b_s^{(2)} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \right) \tilde{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + \left(\sum_{s=1}^{\infty} a_s^{(2)} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \right) \tilde{m}_{0n}(r, \theta, k_0) \right].$$

Подставим асимптотические формулы

$$\tilde{n}_{0n}(r, \theta, k) \approx (-i)^n \frac{e^{ikr}}{kr} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_0,$$

$$\tilde{m}_{0n}(r, \theta, k) \approx (-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{kr} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_{\varphi}$$

при $r \rightarrow \infty$,

в представления (1.12), (3.1) для векторов \vec{E}_0^1 , \vec{E}_1^1 и получим представление для вектора \vec{E}_0

$$\vec{E}_0 \approx E_0 \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} (\Psi_1(\theta) \vec{e}_0 + \Psi_2(\theta) \vec{e}_{\varphi}), \quad r \rightarrow \infty,$$

где

$$\Psi_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \left(c_n^{(1)} + \sum_{s=1}^{\infty} b_s^{(2)} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \right) P_n^1(\cos \theta),$$

$$\Psi_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} i(-i)^n \left(d_n^{(1)} + \sum_{s=1}^{\infty} a_s^{(2)} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \right) P_n^1(\cos \theta).$$

Из представлений (2.18), (2.20) следует связь между коэффициентами $a_n^{(2)}, b_n^{(2)}, c_n^{(1)}, d_n^{(1)}$

$$a_n^{(2)} = \alpha_n^{(a)} \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(1)} A_s^n(k_0 h, 0) + \beta_n^{(a)} \sum_{s=1}^{\infty} d_s^{(1)} A_s^n(k_0 h, 0),$$

$$b_n^{(2)} = \alpha_n^{(b)} \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(1)} A_s^n(k_0 h, 0) + \beta_n^{(b)} \sum_{s=1}^{\infty} d_s^{(1)} A_s^n(k_0 h, 0).$$

Коэффициенты $c_n^{(1)}, d_n^{(1)}$ связаны с решением системы (2.23) по формулам (2.8), (2.12) соответственно.

Величина $D(\theta) = |\Psi_1(\theta)|^2 + |\Psi_2(\theta)|^2$ называется диаграммой направленности электрического поля \vec{E}_0 , которая характеризует величину электромагнитной энергии в направлении θ [22], [28].

На рисунке 3.1 изображены диаграммы направленности $D(\theta)$ электрического поля \vec{E}_0 для некоторых значений угла раствора θ_0 (значения указаны в правом углу рисунка в градусах) при заданных значениях: параметр киральности $k = 0,5$, параметр Телленга $\tau = 0,5$, радиусы $a = a_1 = 0,2$ м, расстояние $h = 0,8$ м, частота исходного поля $f = 10^9$ Гц. Область D_1 заполнена материалом с относительной магнитной проницаемостью $\mu_r = 1,01$ и относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = 2,1$. Бесконечная СЛАУ (2.23) решена методом усечения при порядке усечения 25. Все сходящиеся бесконечные суммы вычислены с точностью 10^{-5} .

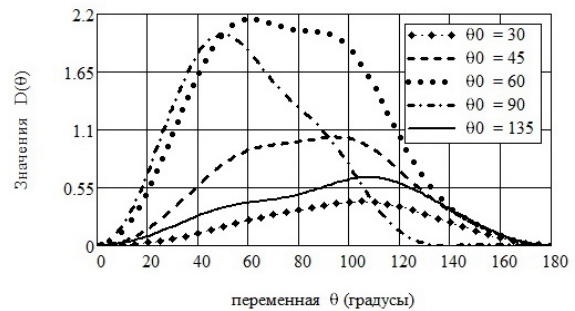


Рисунок 3.1 – Диаграммы направленности $D(\theta)$ для некоторых значений угла раствора θ_0

Заключение

Используя теоремы сложения для векторных сферических волновых функций, решение поставленной граничной задачи сведено к решению

парных сумматорных уравнений по присоединённым функциям Лежандра первого рода. Парные уравнения преобразованы к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором.

Выведена формула для построения диаграммы направленности электрического поля. Приведены графики диаграммы направленности электрического поля при некоторых геометрических параметрах задачи, электрофизических свойствах материала шара, частоты поля диполя.

Полученные результаты могут быть использованы в задачах радиолокации, защиты электронных устройств и биологических объектов от воздействия внешних полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каценеленбаум, Б.З. Киральные электродинамические объекты / Б.З. Каценеленбаум [и др.] // Успехи физических наук. – 1997. – Т. 167, № 11. – С. 1201–1212.
2. Неганов, В.А. Электродинамика отражающих и волноведущих структур с искусственными киральными слоями / В.А. Неганов, О.В. Осипов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2005. – № 8. – С. 20–45.
3. Cui, Tie Jun. Metamaterials. Theory, Design and Applications / Tie Jun Cui, D.R. Smith, R. Lui. – Springer, 2009. – 367 p.
4. Вендик, И.Б. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот (Обзор) / И.Б. Вендик, О.Г. Вендик // Журнал технической физики. – 2013. – Т. 83, вып. 1. – С. 3–28.
5. Костин, М.В. К теории киральной среды на основе сферических спирально проводящих частиц / М.В. Костин, В.В. Шевченко // Радиотехника и электроника – 1998. – Т. 43, № 8. – С. 921–926.
6. Санников, Д.Г. Кроссполаризация света на границе раздела «диэлектрик – биизотропная среда» / Д.Г. Санников // Письма в ЖТФ. – 2009. – Т. 35, вып. 8. – С. 14–21.
7. Фисанов, В.В. Проявления невзаимности в биизотропной среде Теллегена / В.В. Фисанов // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2012. – № 2–1 (26). – С. 96–99.
8. Неганов, В.А. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами / В.А. Неганов, О.В. Осипов. – М.: Радио и связь, 2006. – 280 с.
9. Иванов, О.В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах / О.В. Иванов. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 262.
10. Проникновение электромагнитных волн через композитные экраны, содержащие идеально проводящие спирали / В.Т. Ерофеев [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 4. – С. 740–746.

11. Манахова, М. Излучающие свойства антенн в композитных средах. Метаматериалы и киральные среды / М. Манахова, Е. Шорохова. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 68 с.

12. Шорохова, Е. Дифракция электромагнитных волн на киральных телах вращения. Аналитический подход / Е. Шорохова. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 92 с.

13. Фисанов, В.В. Об излучении источников в изотропной киральной среде / В. В. Фисанов // Изв. вузов. Физика. – 2006. – № 9. – С. 87–90.

14. Демидчик, В.И. Излучение произвольной системы источников в киральной среде / В.И. Демидчик // Вестник БГУ. Сер. 1 – 2013. – № 2. – С. 44–47.

15. Капшай, В.Н. Рассеяние электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3. – С. 7–21.

16. Беличенко, В.И. Рассеяние электромагнитных волн биизотропной сферой / В.И. Беличенко, В.В. Фисанов // Изв. вузов. Физика. – 1994. – № 10. – С. 108–112.

17. Ерофеев, В.Т. Дифракция плоской электромагнитной волны на плоском слое из биизотропного материала / В.Т. Ерофеев, С.В. Малый // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2010. – № 2. – С. 11–16.

18. Ерофеев, В.Т. Численное исследование взаимодействия электромагнитных полей электрического и магнитного диполей с композитным экраном / В.Т. Ерофеев, В.Ф. Бондаренко // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-тех. н. – 2013. – № 4. – С. 113–120.

19. Неганов, В.А. Отражение электромагнитных волн от плоских киральных структур / В.А. Неганов, О.В. Осипов // Изв. ВУЗов. Радиотехника. – 1999. – Т. 42, № 9. – С. 870–878.

20. Неганов, В.А. Особенности отражения электромагнитных волн от плоских киральных структур / В.А. Неганов, О.В. Осипов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 1999. – Т. 2, № 1. – С. 5–11.

21. Неганов, В.А. Рассеяние плоских электромагнитных волн на кирально-металлическом цилиндре / В.А. Неганов, О.В. Осипов // Письма в ЖТФ. – 2000. – Т. 26, вып. 1. – С. 77–83.

22. Куц, А.И. Численное исследование рассеяния поля электрического диполя на биизотропном шаре / А.И. Куц, Г.Ч. Шушкевич // Информатика. – 2015. – № 2. – С. 46–54.

23. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е.А. Иванов. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.

24. Виноградов, С.С. Дифракция поля вертикального диполя на сферическом сегменте / С.С. Виноградов, А.М. Радин, В.П. Шестопалов

// Докл. АН УССР. Сер.А. – 1976. – № 8. – С. 741–745.

25. Свищёв, Ю.В. Поле вертикального магнитного диполя при наличии сферы с круговым отверстием / Ю.В. Свищёв // Изв. вуз. Радиофизика. – 2000. – Т. XLIII, № 9. – С. 773–781.

26. Erofeenko, V.T. Screening of lowfrequency magnetic fields by an open thin-wall spherical shell / V.T. Erofeenko, I.S. Kozlovskaya, G.Ch. Shushkevich // Technical Physics. – 2010. – Vol. 55, № 9. – P. 1240–1247.

27. Козлов, И.П. Дифракция электромагнитных волн на двух сферах / И.П. Козлов // Изв.

высш. уч. зав. Радиофизика. – 1975. – Т. XVIII, № 7. – С. 998–1008.

28. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко. – М.: КД Либроком, 2014. – 304 с.

29. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

Поступила в редакцию 10.03.16.