

О ВЛИЯНИИ НЕЛИНЕЙНОСТИ ФОТОМАТЕРИАЛА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ АМПЛИТУДНЫХ ГОЛОГРАММ

Ю. Н. Денисюк, Г. В. Семенов и Н. А. Савостьяненко

Получены выражения, позволяющие определить величины потоков излучения в первом и втором порядках спектра амплитудных голограмм с учетом нелинейного характера записи на фотоматериале. Показано, что влияние нелинейности на распределение света между различными порядками спектра может быть учтено с помощью коэффициентов нелинейности, зависящих от контраста p интерференционной картины, регистрируемой на голограмме, а также от коэффициента контрастности фотоматериала γ . Получены аналитические выражения, с помощью которых можно определить величины коэффициентов нелинейности для первого и второго порядков спектра, и построены графики их зависимости от p для нескольких значений γ . Приведены результаты экспериментальной проверки теории.

В ряде практических применений голографии необходимо знать точное значение так называемой дифракционной эффективности — отношения величины потока излучения, образующего реконструированное голограммой изображение, к величине потока, падающего на голограмму при реконструкции. Особый практический интерес представляют двухмерные голограммы с амплитудной записью. В существующей литературе дифракционная эффективность таких голограмм исследована в основном для случая линейной записи. Исключение составляет работа Вьянта и Гивенса [1], в которой было исследовано влияние коэффициента контрастности фотоматериала на соотношение освещенностей в изображении многих точек, записанных на одной голограмме по методу последовательной регистрации. Полученные авторами выражения позволяют определить дифракционную эффективность голограмм с учетом нелинейности фотоматериала, однако требуют громоздких расчетов.

В данной статье проведен анализ дифракционной эффективности голограмм, зарегистрированных на нелинейном фотоматериале, в результате которого получены графические зависимости, позволяющие в значительной степени сократить объем вычислений. Особенность этого анализа состоит в том, что дифракционная эффективность представлена в виде произведения двух сомножителей. Один из сомножителей представляет собой линейную составляющую дифракционной эффективности, которая может быть вычислена с помощью простого выражения по известным значениям средней амплитудной прозрачности голограммы τ_0 , коэффициенту контраста интерференционной картины, регистрируемой на голограмме p и коэффициенту контрастности фотоматериала γ , а другой сомножитель, названный нами коэффициентом нелинейности, учитывает влияние нелинейности фотоматериала на дифракционную эффективность голограммы. Значения этого коэффициента представлены в статье в виде графиков зависимости от p для нескольких значений γ .

В данной статье приведены также выражения и графики для расчета величины светового потока, который дифрагирует во второй порядок спектра, образованного голограммой.

Рассмотрим дифракционную эффективность амплитудных двухмерных голограмм для случая произвольных величин p и γ .

Пусть волновые функции объектного и референтного излучения определяются в некоторой плоскости XOY следующими выражениями:

$$\Psi_0(x, y) = A_0(x, y) e^{j\varphi_0(x, y)}, \quad (1)$$

$$\Psi_r(x, y) = A_r(x, y) e^{j\varphi_r(x, y)}, \quad (2)$$

где $A(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ — значения амплитуды и фазы излучения в некоторой точке с координатами X и Y в плоскости голограммы.

Распределение интенсивности в плоскости голограммы можно записать тогда следующим образом:

$$I(x, y) = A_0^2(x, y) + A_r^2(x, y) + 2A_0(x, y) A_r(x, y) \cos[\varphi_0(x, y) - \varphi_r(x, y)]. \quad (3)$$

Глубина модуляции интерференционной картины распределения интенсивности характеризуется коэффициентом контраста

$$p = \frac{I_{\max}(x, y) - I_{\min}(x, y)}{I_{\max}(x, y) + I_{\min}(x, y)}, \quad (4)$$

где $I_{\max}(x, y)$ и $I_{\min}(x, y)$ — максимальное и минимальное значения интенсивности интерференционной картины. Подставляя в (4) значения I_{\max} и I_{\min} , полученные с помощью (3), найдем

$$p(x, y) = \frac{2A_0(x, y) A_r(x, y)}{A_0^2(x, y) + A_r^2(x, y)}. \quad (5)$$

Используя (5), выразим распределение интенсивности в плоскости голограммы через коэффициент контраста

$$I(x, y) = [A_0^2(x, y) + A_r^2(x, y)] \{1 + p(x, y) \cos[\varphi_0(x, y) - \varphi_r(x, y)]\}. \quad (6)$$

Параметр p , входящий в формулу (6), зависит в общем случае от координат, т. е. контраст интерференционной картины различен для различных областей голограммы. Ограничим дальнейшее рассмотрение случаем, когда объект и референтный источник удалены от голограммы на расстояние, много большее ее размеров. Тогда можно считать, что A_0 и A_r , а следовательно, и p не зависят от координат.

Предположим, что распределение интенсивности (6) зарегистрировано на фотоматериале. В общем случае амплитудная прозрачность полученной голограммы является комплексной функцией координат X и Y

$$t(x, y) = \tau(x, y) e^{j\theta(x, y)}, \quad (7)$$

где $\tau(x, y)$ характеризует изменение амплитуды волны, а $\theta(x, y)$ — изменение ее фазы при прохождении через голограмму. В дальнейшем мы будем считать, что голограмма имеет одинаковую толщину, т. е. θ не зависит от координат X и Y . Практически это имеет место, если поместить голограмму в иммерсионную среду. При этом предположении амплитудная прозрачность обработанной голограммы связана с прозрачностью по интенсивности $T(x, y)$ следующим простым соотношением:

$$\tau(x, y) = [T(x, y)]^{1/2}. \quad (8)$$

Для линейного участка характеристической кривой фотоматериала прозрачность по интенсивности T и экспозиция H связаны, как известно, следующим образом:

$$T = \left(\frac{H}{H_0}\right)^{-\gamma}, \quad (9)$$

где γ — коэффициент контрастности фотоматериала, численно равный тангенсу угла наклона кривой, а H_0 — точка инерции фотоматериала. Экспозиция H пропорциональна интенсивности излучения I

$$H = cI. \quad (10)$$

Используя формулы (8), (9), (10) и (6), можно записать следующее выражение для амплитудной прозрачности голограммы:

$$\tau(x, y) = K(p, \gamma) \{1 + p \cos [\varphi_0(x, y) - \varphi_r(x, y)]\}^{-\frac{\gamma}{2}}. \quad (11)$$

Здесь

$$K(p, \gamma) = \left[\frac{c(A_0^2 + A_r^2)}{H_0} \right]^{-\frac{\gamma}{2}}. \quad (12)$$

Значение волновой функции $\Psi(x, y)$ излучения, восстановленного голограммой в плоскости самой голограммы, найдем, умножая волновую функцию излучения восстанавливающего источника (2) на амплитудную прозрачность голограммы (11)

$$\Psi(x, y) = A_r K(p, \gamma) \{1 + p \cos [\varphi_0(x, y) - \varphi_r(x, y)]\}^{-\gamma/2} e^{j\varphi_r(x, y)}. \quad (13)$$

Функция $\Psi(x, y)$ представляет собой граничное условие, из которого можно найти распределение поля во всем пространстве за голограммой. Это поле особенно легко найти в так называемом случае линейной записи, когда каждой пространственной гармонике распределения интенсивности при записи соответствует при реконструкции единственная гармоника того же периода.

Как известно, этот случай может быть реализован для любого значения γ фотоматериала, если голограмму записать с очень малым контрастом p . В частном случае, когда $\gamma = -2$, линейность записи сохраняется при любом значении p .

Отметим попутно, что в рассматриваемом нами случае идеализированной кривой $\tau = f(H)$, описываемой уравнениями (8) и (9) при $\gamma = -2$, положение рабочей точки на этой кривой не влияет на линейность записи, поскольку зависимость $\tau = f(H)$ при $\gamma = -2$ и при любом $H_0 \neq 0$ соответствует прямой линии, проходящей через начало координат.

В случае, когда $H_0 = 0$, величина $\tau(H)$ становится неопределенной в точке, где $H = 0$, и принимает бесконечно большие значения при всех остальных значениях H . Однако аналогичное ограничение распространяется и на характеристическую кривую фотоматериала, поскольку при $H_0 = 0$ величина $\lg H_0$ равна $-\infty$. Для реальной характеристики область линейной зависимости $\tau = f(H)$ ограничена даже для случая $\gamma = -2$, а потому выбор рабочей точки в этом случае оказывает существенное влияние на линейность записи. Однако в дальнейшем вопрос выбора рабочей точки в данной статье не обсуждается.

Запишем выражение для волновой функции восстановленного голограммой излучения в случае линейной записи, когда величина параметра p значительно меньше единицы. Раскладывая выражение в фигурных скобках в формуле (13) в биномиальный ряд и пренебрегая членами этого ряда, содержащими параметр p в степенях выше первой, получим

$$\Psi(x, y) \approx A_r K(p, \gamma) \left\{ e^{j\varphi_r(x, y)} - \frac{\gamma}{4} p e^{j\varphi_0(x, y)} - \frac{\gamma}{4} p e^{-j[\varphi_0(x, y) - 2\varphi_r(x, y)]} \right\}. \quad (14)$$

Нетрудно заметить, что первый и второй члены этого выражения с точностью до постоянных множителей совпадают с волновыми функциями объектного и референтного пучков (1) и (2). В силу однозначности связи граничных условий с волновой функцией именно эти волновые поля и будут восстановлены в пространстве, расположенном за голограммой. Можно показать, что третий член выражения (14) также удовлетворяет волновому уравнению, и соответствующее ему излучение образует так называемое ложное изображение.

При нелинейной записи задача нахождения волновой функции, которая, подчиняясь волновому уравнению, удовлетворяет на поверхности

голограммы граничному условию (13), существенно усложняется. Для нахождения такой функции воспользуемся тем обстоятельством, что в рассматриваемом случае, когда p не зависит от координат, член в квадратных скобках выражения (13) остается четной периодической функцией разности фаз $[\varphi_0(x, y) - \varphi_r(x, y)]$ при любом значении γ . Очевидно, что в этом случае функция $\Psi(x, y)$ может быть представлена в виде ряда Фурье по косинусам $[\varphi_0(x, y) - \varphi_r(x, y)]^1$

$$\Psi(x, y) = A_r K(p, \gamma) \left\{ \frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos n [\varphi_0(x, y) - \varphi_r(x, y)] \right\} e^{j\varphi_r(x, y)}, \quad (15)$$

где

$$F_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + p \cos(\varphi_0 - \varphi_r)]^{-\frac{\gamma}{2}} \cos n(\varphi_0 - \varphi_r) d(\varphi_0 - \varphi_r). \quad (16)$$

Можно показать, что при достаточно малых углах между объектным и референтным лучами по крайней мере несколько первых членов (15) соответствуют обычным бегущим волнам, распространяющимся в пространстве за голограммой. При этом, как видно из (15) и (16), первым двум членам ряда соответствуют недифрагированное излучение, а также истинное и ложное изображения, аналогичные случаю линейной записи. Члены более высокого порядка описывают пространственно разделенные пучки, которые, однако, не образуют какого-либо изображения. И, наконец, начиная с некоторого значения n , членам ряда (15) соответствуют волны, затухающие в непосредственной близости от голограммы.

Для определения дифракционной эффективности голограмм необходимо знать поток Φ_n излучения, дифрагированного в искомое изображение. Амплитуда излучения, образующего этот поток, определяется коэффициентом при втором члене разложения (15). В соответствие с этим выражение для потока Φ_n можно записать в следующем виде:

$$\Phi_n = \frac{1}{4} A_r^2 K^2(p, \gamma) F_1^2 S_r, \quad (17)$$

где S_r — площадь голограммы.

Дифракционную эффективность голограммы D найдем, отнеся (17) к величине потока, падающего на нее при реконструкции

$$D = \frac{1}{4} K^2(p, \gamma) F_1^2(p, \gamma). \quad (18)$$

Коэффициент $K(p, \gamma)$ удобнее выразить через постоянную составляющую амплитудной прозрачности экспонированной голограммы τ_0 , которую легко измерить экспериментально. Учитывая, что τ_0 соответствует первый член разложения (15), получим

$$\tau_0 = \frac{1}{2} K(p, \gamma) F_0(p, \gamma). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18) и проведя некоторые преобразования, найдем

$$D = D_x \cdot K_n, \quad (20)$$

где

$$D_x = \frac{\tau_0^2 p^2 \gamma^2}{16}, \quad (21)$$

¹ Разложение типа (15) для амплитудной прозрачности голограммы в ряд Фурье по $(\varphi_0 - \varphi_r)$ было впервые предложено Токарски [2].

а

$$K_n = \left(\frac{1}{p} \frac{2F_1}{F_0} \frac{2}{\gamma} \right)^2. \quad (22)$$

Таким образом, выражение для дифракционной эффективности может быть представлено в виде двух сомножителей D_1 и K_n . Можно показать, что один из этих сомножителей — D_1 в точности соответствует дифракционной эффективности голограммы для случая линейной записи. В этом нетрудно убедиться, если получить выражение для дифракционной эффективности, взяв в качестве исходного выражения формулу (14).

Из сказанного следует, что влияние нелинейности фотоматериала на дифракционную эффективность в рассматриваемом случае полностью учитывается коэффициентом K_n (22). Зависимость этого коэффициента от параметров p и γ можно найти следующим образом. Разложим выражение в квадратных скобках (16) в биномиальный ряд и, выполнив интегрирование, получим выражение для коэффициентов F_0 и F_1 .

Подставляя полученные выражения в (22), найдем

$$K_n = \left[\frac{1 + L_2 k_2 p^2 + \dots + L_m k_m p^{(2m-2)} + \dots}{1 + \Gamma_2 k_1 p^2 + \dots + \Gamma_m k_{m-1} p^{(2m-2)} + \dots} \right]^2, \quad (23)$$

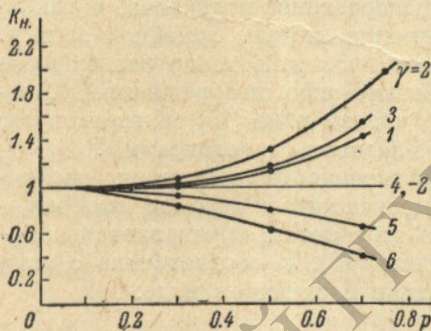


Рис. 1. Зависимость коэффициента нелинейности K_n от глубины модуляции интерференционной картины p для нескольких значений коэффициента контрастности фотоматериала γ .

рационную эффективность голограмм для широкого диапазона значений p и γ .

На рис. 1 приведены вычисленные таким образом зависимости коэффициента K_n от p для нескольких значений γ . Как видно из рис. 1, эффекты нелинейности начинают заметно влиять на дифракционную эффективность начиная со значений $p \approx 0.3$. Как и следовало ожидать, при $\gamma = -2$ эффекты нелинейности отсутствуют при любых значениях p . Несколько неожиданно оказалось то, что эффекты нелинейности не влияют на дифракционную эффективность голограммы и при $\gamma = 4$. Однако этот случай все же не эквивалентен линейной записи, поскольку изображения высших порядков при этом не исчезают.

Использованный нами метод рассмотрения влияния нелинейности фотоматериала на дифракционную эффективность голограмм позволяет также определить количество света, дифрагированного в любой из высших порядков. Так, например, отношение потока излучения, дифрагированного в один из вторых порядков, к потоку излучения, падающему на голограмму при реконструкции, можно вычислить с помощью формулы, аналогичной формуле (20)

$$D_2 = D_1 \cdot K_{n_2}. \quad (26)$$

где

$$L_m = \frac{\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right) \left(\frac{\gamma}{2} + 2\right) \dots \left[\frac{\gamma}{2} + (2m-2)\right]}{(2m-1)!}, \quad m = 2, 3, \dots, n, \quad (24)$$

$$\Gamma_m = \frac{\frac{\gamma}{2} \left(\frac{\gamma}{2} + 1\right) \dots \left[\frac{\gamma}{2} + (2m-3)\right]}{(2m-2)!}, \quad m = 2, 3, \dots, n. \quad (25)$$

Входящие в (23) значения k_m для первых 16 членов рядов приведены в табл. 1. Используя формулы (23) ÷ (25) и значения k_m из табл. 1, можно подсчитать коэффициенты нелинейности, а следовательно, и диф-

Таблица 1

Значения коэффициентов k_m выражения (23)

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
1	0.75	0.63	0.55	0.49	0.45	0.42	0.39
k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}
0.37	0.35	0.33	0.32	0.30	0.28	0.26	0.25

При этом D_1 определяется с помощью выражения (21), а K_{H_2} можно выразить через названные выше параметры p и γ следующим образом:

$$K_{H_2} = \left[\frac{M_1 l_1 p + M_2 l_2 p^3 + \dots + M_m l_m p^{(2m-1)} + \dots}{1 + \Gamma_2 k_1 p^2 + \dots + \Gamma_m k_{m-1} p^{(2m-2)} + \dots} \right]^2 \quad (27)$$

где

$$M_m = \frac{\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)\left(\frac{\gamma}{2} + 2\right) \dots \left[\frac{\gamma}{2} + (2m - 1)\right]}{(2m)!}, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (28)$$

а Γ_m определяется с помощью выражения (25). Входящие в (27) значения l_m для первых 16 членов ряда приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения коэффициентов l_m выражения (27)

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8
0.5	0.5	0.47	0.44	0.41	0.39	0.37	0.35
l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}	l_{13}	l_{14}	l_{15}	l_{16}
0.33	0.32	0.3	0.27	0.26	0.24	0.23	0.22

На рис. 2 изображены, вычисленные с помощью формул (27), (28) и (25) графики зависимости коэффициента K_{H_2} от p для нескольких значений γ . Как видно из этого рисунка, величина K_{H_2} обращается в нуль при $\gamma = -2$, для любой величины контраста p , а также стремится к нулю для любого γ при уменьшении p . Оба эти случая соответствуют линейной записи и характеризуются отсутствием дифрагированного света в высших порядках дифракции (выше первого). Однако по мере увеличения контраста величина K_{H_2} начинает заметно расти, что соответствует увеличению интенсивности света во втором порядке дифракции. Из рис. 2 также следует, что увеличение коэффициента контрастности фотоматериала γ при одном и том же значении p приводит к увеличению K_{H_2} .

Для проверки основных положений теории были измерены дифракционные эффективности D и D_2 нескольких голограмм с различными p , γ и τ_0^2 .

На голограммах записывалась картина интерференции двух плоских волн, распространяющихся под углом 30 мин. друг к другу. При этом регистрация осуществлялась на фотоматериале с разрешающей способностью порядка 100 лин./мм (фотопленка изопанхром тип 17). Коэффициент контраста этой картины p рассчитывался, исходя из соотношения интенсивностей интерферирующих волн, которое измерялось с помощью ФЭУ. Для измерения γ рядом с голограммой на фотопленке регистрировались сенситограмма, с помощью которой строилась соответствующая характеристическая кривая фотослоя.

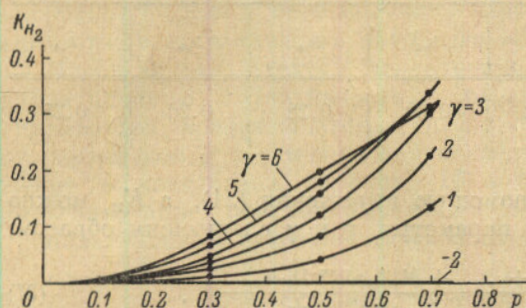


Рис. 2. Зависимость коэффициента нелинейности K_{H_2} от глубины модуляции интерференционной картины p для нескольких значений коэффициента контрастности фотоматериала γ .

Для устранения фазовой модуляции, голограммы помещались при измерениях в иммерсионную среду. В качестве иммерсии нами были использованы бензин и дистиллированная вода. Показатель преломления бензина $n_6 = 1.5$ был близок к показателю преломления сухого эмульсионного слоя ($n_0 = 1.52$). Показатель преломления дистиллированной воды ($n_n = 1.33$) был близок к показателю преломления размоченного слоя.

В процессе реконструкции голограмм с помощью ФЭУ были измерены величины потоков, дифрагированных в первый и второй порядки, а также потока излучения, прошедшего через неэкспонированную проявленную и отфиксированную часть фотопленки той же площади, что и голограмма. Дифракционные эффективности голограмм D и D_2 вычислялись как отношение первой или второй из этих величин к третьей. Величина τ_0^2 измерялась аналогичным образом через отношение недифрагированной части излучения к излучению, прошедшему через неэкспонированный проявленный и отфиксированный фотослой.

Полученные таким образом значения D и D_2 приведены в табл. 3. В этой же таблице представлены теоретические значения эффективно-

Таблица 3

Экспериментальные и теоретические значения дифракционной эффективности амплитудных голограмм

Иммерсия — дистиллированная вода						
p	γ	τ_0^2	D	D_1	D_2	D_{t_2}
0.71	1.5	0.037	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$3.16 \cdot 10^{-4}$	4.8 · 10
0.45	1.7	0.085	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$8.5 \cdot 10^{-5}$	$15 \cdot 10^{-5}$
0.68	1	0.205	$8.9 \cdot 10^{-3}$	$8.3 \cdot 10^{-3}$	$2.29 \cdot 10^{-4}$	$7.25 \cdot 10^{-4}$
0.55	1	0.215	$5.1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$8.8 \cdot 10^{-5}$	$25 \cdot 10^{-5}$
Иммерсия — бензин						
0.71	1.5	0.026	$4 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$
0.45	1.7	0.063	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$
0.68	1	0.19	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$7.7 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$6.7 \cdot 10^{-4}$
0.55	1	0.185	$7.7 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$

стей D_T и D_{T2} , вычисленные с помощью формул (20), (21), (26) и графиков, изображенных на рис. 1 и рис. 2.

Из табл. 3 видно, что в первом порядке дифракции при использовании в качестве иммерсии воды отличие экспериментальных значений D от теоретических не превышает 10%, что является достаточно хорошим совпадением. Однако при использовании в качестве иммерсии бензина в тех же порядках дифракции наблюдается заметное превышение измеренных значений D над теоретическими. Это можно объяснить тем, что бензин устраняет только ту часть фазовой модуляции, которая обусловлена наличием регулярного рельефа на поверхности голограммы. По-видимому, существует еще заметная модуляция показателя преломления в обработанном фотослое. В разбухшем в воде слое эта часть модуляции исчезает и голограмма становится чисто амплитудной.

Во вторых порядках дифракции наблюдаются заметные расхождения экспериментальных и теоретических значений эффективностей. Причем во всех случаях, когда в качестве иммерсии использован бензин, эти расхождения заметно меньше, чем при использовании воды. Можно предположить, что при разбухании эмульсии в воде происходят небольшие искажения рисунка голограммы, к которым вторые порядки дифракции обладают значительно более высокой чувствительностью, чем первые.

Литература

- [1] I. C. Wyant, M. P. Givens. J. Opt. Soc. Am., 58, 357, 1968.
[2] I. M. J. Tokarski. Appl. Opt., 7, 989, 1968.

Поступило в Редакцию 8 декабря 1969 г.