

## ФЛУКТУАЦИИ АНИЗОТРОПИИ И РАССЕЯНИЕ СВЕТА В ЖИДКОСТЯХ

В. П. Романов и В. А. Соловьев

Теория флуктуаций анизотропии Леонтовича обобщена на случай произвольного числа тензорных и скалярных параметров. С помощью флуктуационно-диссипационной теоремы вычислены спектральные интенсивности флуктуаций параметров анизотропии, которые связываются с интенсивностью деполаризованного рассеяния света. Детально исследован случай двух параметров анизотропии.

### Введение

Феноменологическая теория рассеяния света на флуктуациях анизотропии в жидкостях была разработана Леонтовичем [1]. Он, однако, предположил, что вся сдвиговая вязкость жидкости связана с релаксацией одного тензорного параметра, который определяет также и всю анизотропию жидкости.

Из акустических исследований вязких жидкостей известно [2, 3], что со сдвиговой деформацией связан, вообще говоря, широкий релаксационный спектр. Форма полосы анизотропного рассеяния также не всегда объясняется одним временем релаксации [4], так что и с оптической анизотропией может быть связано несколько релаксационных механизмов.

В связи с этим представляет интерес построить общую феноменологическую схему расчета спектра деполаризованного рассеяния, пригодную для сколь угодно сложных систем. В этом расчете мы будем в основном следовать работе Леонтовича [1], но при вычислении спектра флуктуаций будем пользоваться флуктуационно-диссипационной теоремой (ФДТ) [5]. К сожалению, при таком расчете нельзя просто воспользоваться полученным Рытовым [5] результатом, поскольку, как показано в [6], в общем случае недостаточно учесть дисперсию термодинамических коэффициентов — необходимо ввести все релаксирующие параметры в явном виде.

### Система гидродинамических уравнений

Будем считать, что мгновенное состояние жидкости характеризуется температурой  $T$ , тензором сдвиговой деформации  $e'_{ik} = e_{ik} - \frac{1}{3} e \delta_{ik}$ , объемной деформацией  $e = e_{ii}^1$  и набором тензорных параметров  $\xi_{ik}^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ). Мы с самого начала примем, что параметры  $\xi_{ik}^\alpha$  выбраны как нормальные координаты [7, 3], приводящие квадратичный член в свободной энергии к сумме квадратов и диагонализующие матрицу кинетических коэффициентов. Тогда свободная энергия единицы объема может быть записана в виде

$$F = F_0 + \frac{1}{2} \lambda_\infty e^2 + \mu_\infty e_{ik}^2 - p_{T\infty} e \delta T - \frac{1}{2} \frac{C_{V\infty}}{T} \delta T^2 + \sum_{\alpha} \left( -2\mu_{\alpha} e_{ik} \xi_{ik}^{\alpha} - \lambda_{\alpha} e_{ik}^2 + \nu_{\alpha} \xi_{ik}^{\alpha 2} + \frac{1}{2} \beta_{\alpha} \xi_{ik}^{\alpha 2} + \vartheta_{\alpha} \xi_{ik}^{\alpha} \delta T \right). \quad (1)$$

<sup>1</sup> Предполагается суммирование по латинским индексам, встречающимся дважды.

Из условия равновесия  $\partial F / \partial \xi_{ik}^\alpha = 0$  можно выразить равновесные значения  $\xi_{ik}^\alpha$  через  $e_{ik}$ . В частности,  $\xi_{ik}^{\prime\alpha} = \xi_{ik}^\alpha - \frac{1}{3} \xi_{il}^\alpha \delta_{ik} = (\nu_\alpha / \nu_\alpha) e'_{ik}$ . Поскольку постоянные множители в определении величин  $\xi_{ik}^{\prime\alpha}$  можно выбирать произвольно, всегда можно положить, что в равновесии  $\xi_{ik}^{\prime\alpha} = e'_{ik}$ , тогда  $\nu_\alpha = \mu_\alpha$ . Далее, если мы ограничимся рассмотрением жидкостей, в которых при равновесии не может быть сдвиговых напряжений ( $\partial F / \partial e'_{ik} = 0$ ), то оказывается  $\mu_\infty = \sum_\alpha \mu_\alpha$ . Таким образом,

$$F = F_0 + \frac{1}{2} K_\infty e^2 - p_{T\infty} e \delta T - \frac{1}{2} \frac{C_{V\infty}}{T} \delta T^2 + \sum_\alpha \left[ \mu_\alpha (\xi_{ik}^{\prime\alpha} - e'_{ik})^2 + \frac{1}{2} F_{\xi\xi}^\alpha \xi^\alpha{}^2 - \rho F_{\xi\rho}^\alpha e \xi^\alpha + F_{\xi T}^\alpha \delta T \xi^\alpha \right]. \quad (2)$$

Здесь  $\xi^\alpha = \xi_{il}^\alpha$ ,  $K_\infty = \lambda_\infty + \frac{2}{3} \mu_\infty$  — мгновенный изотермический модуль объемной упругости,  $\rho$  — плотность,  $C_{V\infty}$  — мгновенная теплоемкость единицы объема,  $p_{T\infty}$  — мгновенный термический коэффициент давления,  $F_{\xi\xi}^\alpha = \beta_\alpha + \frac{2}{3} \mu_\alpha$ ,  $\rho F_{\xi\rho}^\alpha = \lambda_\alpha + \frac{2}{3} \mu_\alpha$ ,  $F_{\xi T}^\alpha = \vartheta_\alpha$  — коэффициенты, используемые в термодинамической теории объемной релаксации Мандельштама и Леонтовича [7]. Тензоры  $\xi_{ik}^\alpha$  и скаляры  $\xi^\alpha$  описывают, конечно, совершенно независимые физические процессы.

Дифференцируя (2) можно получить уравнения состояния. Тензор напряжений определяется как

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial e_{ik}} = (K_\infty e - p_{T\infty} \delta T) \delta_{ik} + \sum_\alpha [2\mu_\alpha (e'_{ik} - \xi_{ik}^{\prime\alpha}) - \rho F_{\xi\rho}^\alpha e \delta_{ik}]. \quad (3)$$

Приращение энтропии будет

$$\delta S = - \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{C_{V\infty}}{T} \delta T + p_T e - \sum_\alpha F_{\xi T}^\alpha \xi^\alpha. \quad (4)$$

Для нахождения термодинамических сил  $\psi_{ik}^\alpha$ , сопряженных с  $\xi_{ik}^\alpha$ , следует продифференцировать (1) по  $\xi_{ik}^\alpha$ . Для диагональных элементов получим, например

$$\psi_{11}^\alpha = - \frac{\partial F}{\partial \xi_{11}^\alpha} = -2\mu_\alpha (\xi_{11}^\alpha - e_{11}) - F_{\xi\xi}^\alpha \xi^\alpha + \rho F_{\xi\rho}^\alpha e - F_{\xi T}^\alpha \delta T.$$

При вычислении недиагональных элементов следует учесть, что в силу симметрии тензоров  $\xi_{ik}^\alpha = \xi_{ki}^\alpha$  в (1) входит только три независимых компоненты  $\xi_{12}^\alpha$ ,  $\xi_{23}^\alpha$ ,  $\xi_{31}^\alpha$ . Поэтому

$$\psi_{ik}^\alpha = - \frac{\partial F}{\partial \xi_{ik}^\alpha} = -4\mu_\alpha (\xi_{ik}^\alpha - e_{ik}) \quad (i \neq k). \quad (5)$$

В уравнения для  $\psi_{11}^\alpha$ ,  $\psi_{22}^\alpha$ ,  $\psi_{33}^\alpha$  входят как изотропные, так и анизотропные части тензоров  $\xi_{ik}^\alpha$ . Для их разделения введем новые переменные [1]

$$\begin{aligned} \xi_{11}^{\prime\alpha} &= \xi_{11}^\alpha - \frac{1}{3} \xi^\alpha = \varphi^\alpha; & \xi^\alpha &= \xi_{11}^\alpha + \xi_{22}^\alpha + \xi_{33}^\alpha; \\ \xi_{22}^{\prime\alpha} &= \xi_{22}^\alpha - \frac{1}{3} \xi^\alpha = -\frac{1}{2} \varphi^\alpha + \chi^\alpha; & \varphi^\alpha &= \frac{1}{3} (2\xi_{11}^\alpha - \xi_{22}^\alpha - \xi_{33}^\alpha); \\ \xi_{33}^{\prime\alpha} &= \xi_{33}^\alpha - \frac{1}{3} \xi^\alpha = -\frac{1}{2} \varphi^\alpha - \chi^\alpha; & \chi^\alpha &= \frac{1}{2} (\xi_{22}^\alpha - \xi_{33}^\alpha), \end{aligned}$$

где ось  $x_1$  выбрана по направлению волнового вектора той компоненты пространственного спектра-Фурье флуктуаций, которая ответственна за рассеяние света в интересующем нас направлении. Обычные правила преобразования переменных дают для сил, сопряженных с  $\xi^\alpha$ ,  $\varphi^\alpha$  и  $\chi^\alpha$ :

$$\psi_\xi^\alpha = \frac{1}{3} \psi_{i1}^\alpha; \quad \psi_\varphi^\alpha = \psi_{11}^\alpha - \frac{1}{2} (\psi_{22}^\alpha + \psi_{33}^\alpha); \quad \psi_\chi^\alpha = \psi_{22}^\alpha - \psi_{33}^\alpha.$$

Теперь уравнения состояния будут

$$\psi_\varphi^\alpha = -3\mu_\alpha \left[ \varphi^\alpha - \frac{1}{3} (2e_{11} - e_{22} - e_{33}) \right],$$

$$\psi_\chi^\alpha = -4\mu_\alpha \left[ \chi^\alpha - \frac{1}{2} (e_{22} - e_{33}) \right],$$

$$\psi_\xi^\alpha = -F_{\xi\xi}^\alpha \xi^\alpha + \rho F_{\xi\rho}^\alpha e - F_{\xi T}^\alpha \delta T.$$

Уравнения состояния (3)—(8) нужно дополнить уравнениями, описывающими изменение переменных. Это прежде всего уравнения движения и теплопроводности

$$\rho \dot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \mathcal{F}_i, \quad (9)$$

$$T \delta S = \kappa (\nabla^2 T + \nabla^2 \mathcal{T}), \quad (10)$$

где  $u$  — смещение,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности, а  $\mathcal{F}_i$  и  $\mathcal{T}$  — сторонние поля сил и температуры. К ним нужно добавить еще уравнения релаксации, описывающие процесс изменения внутренних переменных  $\xi^\alpha$ ,  $\xi_{ik}^\alpha$ ,  $\varphi^\alpha$ ,  $\chi^\alpha$ . По аналогии с уравнениями состояния можно написать

$$4\eta_\alpha \dot{\xi}_{ik}^\alpha = \psi_{ik}^\alpha + \Psi_{ik}^\alpha \quad (i \neq k), \quad (11)$$

$$3\eta_\alpha \dot{\varphi}^\alpha = \psi_\varphi^\alpha + \Psi_\varphi^\alpha, \quad (12)$$

$$4\eta_\alpha \dot{\chi}^\alpha = \psi_\chi^\alpha + \Psi_\chi^\alpha, \quad (13)$$

$$\frac{1}{L_\alpha} \dot{\xi}^\alpha = \psi_\xi^\alpha + \Psi_\xi^\alpha. \quad (14)$$

Здесь  $L_\alpha$  и  $1/\eta_\alpha$  — кинетические коэффициенты Онзагера,  $\Psi_{ik}^\alpha$ ,  $\Psi_\varphi^\alpha$ , ... — сторонние силы.

Уравнения (8) и (14) без сторонних сил были введены Мандельштамом и Леонтовичем [7] для описания релаксации скалярных внутренних параметров. Исключение  $\xi^\alpha$  и  $\psi_\xi^\alpha$  из (8), (14), (3) и (4) приводит к обычным по форме уравнениям состояния

$$\delta p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii} = -\tilde{K} e + \tilde{p}_T \delta T; \quad T \delta S = \tilde{C}_V \delta T + T \tilde{p}_T e$$

с комплексными коэффициентами

$$\tilde{K} = K_\infty - \sum_\alpha \frac{K_\alpha}{1 + i\omega\tau_\alpha^k}; \quad \tilde{C}_V = C_{V\infty} + \sum_\alpha \frac{C_{V\alpha}}{1 + i\omega\tau_\alpha^k}; \quad \tilde{p}_T = p_{T\infty} + \sum_\alpha \frac{p_{T\alpha}}{1 + i\omega\tau_\alpha^k}, \quad (15)$$

где  $\omega$  — круговая частота,  $K_\alpha = \rho^2 F_{\xi\xi}^{\alpha 2} / F_{\xi\xi}^\alpha$ ,  $C_{V\alpha} = T F_{\xi T}^{\alpha 2} / F_{\xi\xi}^\alpha$ ,  $p_{T\alpha} = -\rho F_{\xi\rho}^\alpha F_{\xi T}^\alpha$ ,  $\tau_\alpha^k = 1/L_\alpha F_{\xi\xi}^\alpha$ . Точно так же исключение  $\psi_{ik}^\alpha$  и  $\xi_{ik}^\alpha$  из (11)—(13), (5)—(7) и (3) приведет к уравнению  $\sigma'_{ik} = \sigma_{ik} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} \delta_{ik} = 2\tilde{\mu} e'_{ik}$ , где комплексный модуль сдвига

$$\tilde{\mu} = \mu(\omega) + i\omega\eta(\omega) = \sum_\alpha \frac{i\omega\eta_\alpha}{1 + i\omega\tau_\alpha} = \sum_\alpha \frac{\mu_\alpha \omega^2 \tau_\alpha^2}{1 + \omega^2 \tau_\alpha^2} + i\omega \sum_\alpha \frac{\eta_\alpha}{1 + \omega^2 \tau_\alpha^2} \quad (\tau_\alpha = \eta_\alpha / \mu_\alpha). \quad (16)$$

Это выражение соответствует механической модели для сдвиговой деформации, состоящей из  $n$  параллельно включенных максвелловских элементов с модулями  $\mu_\alpha$ , вязкостями  $\eta_\alpha$  и временами релаксации  $\tau_\alpha$ . Обычная сдвиговая вязкость жидкости  $\eta = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \eta(\omega) = \sum_\alpha \eta_\alpha$ .

Для вычисления интенсивности рассеянного света нужно будет найти флуктуации тензора диэлектрических проницаемостей  $\epsilon_{ik}$ . Изотропная часть  $\epsilon_{ik}$ ,  $\epsilon = \epsilon_{11}/3$ , зависит от  $e$ ,  $T$  и  $\xi^\alpha$ . Тензор анизотропии  $\epsilon'_{ik} = \epsilon_{ik} - \epsilon \delta_{ik}$  должен исчезать в покоящейся жидкости при равновесии, когда  $\xi'_k = \xi'_{ik}$ , т. е. он зависит от  $e'_{ik} - \xi'_{i,k}$ . Введем поэтому новые переменные

$$\epsilon'_{ik} = e_{ik} - \xi^\alpha_{ik} \quad (i \neq k); \quad \Phi^\alpha = -\varphi^\alpha + \frac{1}{3}(2e_{11} - e_{22} - e_{33}); \quad X^\alpha = -\chi^\alpha + \frac{1}{2}(e_{22} - e_{33}).$$

Спряженные с ними силы  $\psi'_{ik}^\alpha$ ,  $\psi_\Phi^\alpha$ ,  $\psi_X^\alpha$  будут, как легко убедиться, отличаться от  $\psi_{ik}^\alpha$ ,  $\psi_\Phi^\alpha$ ,  $\psi_X^\alpha$  только знаком; то же самое относится и к сторонним силам  $\Psi'_{ik}^\alpha$ ,  $\Psi_\Phi^\alpha$ ,  $\Psi_X^\alpha$ . Уравнения состояния и релаксации для новых переменных переписутся в виде

$$\psi'_{ik} = -4\mu_\alpha \dot{\epsilon}'_{ik}, \quad (17)$$

$$\dot{\psi}_\Phi = -3\mu_\alpha \dot{\Phi}^\alpha, \quad (18)$$

$$\dot{\psi}_X = -4\mu_\alpha \dot{X}^\alpha, \quad (19)$$

$$4\eta_\alpha (\dot{e}_{ik} - \dot{\xi}^\alpha_{i,k}) = -\dot{\psi}'_{ik} - \Psi'_{ik}^\alpha \quad (i \neq k), \quad (20)$$

$$3\eta_\alpha \left[ \frac{1}{3}(2\dot{e}_{11} - \dot{e}_{22} - \dot{e}_{33}) - \dot{\Phi}^\alpha \right] = -\dot{\psi}_\Phi - \Psi_\Phi^\alpha, \quad (21)$$

$$4\eta_\alpha \left[ \frac{1}{2}(\dot{e}_{22} - \dot{e}_{33}) - \dot{X}^\alpha \right] = -\dot{\psi}_X - \Psi_X^\alpha. \quad (22)$$

Одновременно преобразуются напряжения:  $\sigma'_{ik}$  ( $i \neq k$ ) перейдет в  $\sigma'_{ik} - \frac{1}{2} \sum_\alpha \psi'_{ik}^\alpha$ ,  $\sigma'_{11}$  — в  $\sigma'_{11} - \frac{2}{3} \sum_\alpha \psi_\Phi^\alpha$ ,  $\sigma'_{22}$  — в  $\sigma'_{22} + \frac{1}{3} \sum_\alpha \psi_\Phi^\alpha - \frac{1}{2} \sum_\alpha \psi_X^\alpha$ ,  $\sigma'_{33}$  — в  $\sigma'_{33} + \frac{1}{3} \sum_\alpha \psi_\Phi^\alpha + \frac{1}{2} \sum_\alpha \psi_X^\alpha$ . По тем же правилам преобразуются сторонние силы  $\mathcal{F}_i$  (как  $\partial \sigma_{ik} / \partial x_k$ ). Не выписывая преобразованных гидродинамических уравнений в общем виде, мы сразу учтем, что нас интересует только плоская волна, распространяющаяся в направлении  $x_1$ . При этом система (3), (4), (8)—(10), (14), (17)—(22) распадается на группы независимых уравнений, которые после исключения обобщенных сил принимают вид

$$4\eta_\alpha \left( \dot{X}^\alpha + \frac{1}{\tau_\alpha} X^\alpha \right) = \Psi_X^\alpha, \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} 4\eta_\alpha \left( \dot{\xi}^\alpha_{21} + \frac{1}{\tau_\alpha} \xi^\alpha_{21} \right) - 2\eta_\alpha \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_1} &= \Psi'^\alpha_{21}, \\ \rho \ddot{u}_2 - 2 \sum_\alpha \mu_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha_{21}}{\partial x_1} &= \mathcal{F}_2 - \frac{1}{2} \sum_\alpha \frac{\partial \Psi'^\alpha_{21}}{\partial x_1} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

и аналогично для  $u_3, \xi_{31}^\alpha$

$$\begin{aligned}
 & 3\gamma_\alpha \left( \dot{\Phi}^\alpha + \frac{1}{\tau_\alpha} \Phi^\alpha \right) - 2\gamma_\alpha \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} = \Psi_\Phi^\alpha, \\
 & \frac{1}{L_\alpha} \left( \dot{\xi}^\alpha + \frac{1}{\tau_\alpha} \xi^\alpha \right) + \sum_\beta \frac{TF_{\xi T}^\alpha F_{\xi T}^\beta}{C_{V\infty}} \xi^\beta - \left( \rho F_{\xi \rho}^\alpha + F_{\xi T}^\alpha \frac{Tp_{T\infty}}{C_{V\infty}} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \\
 & \quad + \frac{TF_{\xi T}^\alpha}{C_{V\infty}} \delta S = \Psi_\xi^\alpha, \\
 & \rho \ddot{u}_1 - \left( K_\infty + \frac{Tp_{T\infty}^2}{C_{V\infty}} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \sum_\alpha \left[ \left( \frac{Tp_{T\infty} F_{\xi T}^\alpha}{C_{V\infty}} + \rho F_{\xi \rho}^\alpha \right) \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_1} - \right. \\
 & \quad \left. - 2\gamma_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x_1} \right] + \frac{Tp_{T\infty}}{C_{V\infty}} \delta S = \mathcal{S}_1 - \frac{2}{3} \sum_\alpha \frac{\partial \Psi_\Phi^\alpha}{\partial x_1}, \\
 & \frac{T}{x} S - \frac{T}{C_{V\infty}} \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} + \frac{Tp_{T\infty}}{C_{V\infty}} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} - \sum_\alpha \frac{TF_{\xi T}^\alpha}{C_{V\infty}} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial x_1^2}.
 \end{aligned}$$

### Спектральные интенсивности флуктуаций анизотропии

Полная система уравнений (23)–(25) позволяет вычислить флуктуации любых интересующих нас величин. Для этого надо, разрешив систему, найти восприимчивости по отношению к сторонним силам  $p_{\alpha\beta}$

$$x^\alpha = \sum_\beta p_{\alpha\beta} \mathcal{S}^\beta,$$

где  $x^\alpha$  — любые переменные  $\dot{u}_i, S, \xi_{ik}^\alpha, \dots$  (амплитуды  $\omega k$  — компонент, а  $\mathcal{S}^\alpha$  — сопряженные с ними сторонние силы. Согласно ФДТ,

$$\langle x^\alpha x^\beta \rangle_{\omega k} = \frac{k_B T}{i\omega} (p_{\beta\alpha}^* - p_{\alpha\beta}).$$

Интенсивность рассеянного света определяется флуктуациями тензора диэлектрической проницаемости, переменную часть которого мы обозначим через  $\varepsilon_{ik}$ . Изотропная часть  $\varepsilon_{ik}$  будет функцией скалярных переменных:

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} = D\varepsilon + H\delta T + \sum_\alpha G_\alpha \xi^\alpha. \quad (26)$$

Для анизотропной части можно написать

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon'_{ik} &= \varepsilon_{ik} = \sum_\alpha A_\alpha \xi_{ik}^\alpha \quad (i \neq k), \\
 \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11} - \varepsilon = \sum_\alpha A_\alpha \Phi^\alpha, \\
 \varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{22} - \varepsilon = \sum_\alpha A_\alpha \left( -\frac{1}{2} \Phi^\alpha + X^\alpha \right), \\
 \varepsilon'_{33} &= \varepsilon_{33} - \varepsilon = \sum_\alpha A_\alpha \left( -\frac{1}{2} \Phi^\alpha - X^\alpha \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Пусть свет падает на рассеивающую среду вдоль оси  $x$ , а рассеяние наблюдается в плоскости  $xy$  под углом  $\vartheta$ . Падающий свет может быть поляризован либо по оси  $z$ , либо по оси  $y$ . Интенсивность рассеянного света удобно определять при двух различных поляризациях — параллельно оси  $z$  или в плоскости  $xy$ . Соответственно представляет интерес

четыре коэффициента рассеяния  $I_z^z, I_{xy}^z, I_z^y, I_{xy}^y$ , где верхний индекс указывает направление электрического вектора в падающей, а нижний — в рассеянной волне. Пользуясь общими формулами для амплитуд рассеяния [1], находим

$$I_z^z \sim \left\langle \left[ De + H\delta T + \sum_{\alpha} \left( G_{\alpha} \xi^{\alpha} - \frac{1}{2} A_{\alpha} \Phi^{\alpha} \right) \right]^2 \right\rangle_{\omega k} + \sum_{\alpha} A_{\alpha}^2 \langle X^{\alpha 2} \rangle_{\omega k}, \quad (28)$$

$$I_{xy}^z = I_z^y \sim \left\langle \left( \sum_{\alpha} A_{\alpha} \xi_{12}^{\alpha} \right)^2 \right\rangle_{\omega k} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \sum_{\alpha} A_{\alpha}^2 \langle X^{\alpha 2} \rangle_{\omega k} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad (29)$$

$$I_{xy}^y \sim \left\langle \left\{ \left( De + H\delta T \right) \cos \vartheta + \sum_{\alpha} \left[ G_{\alpha} \xi^{\alpha} \cos \vartheta + A_{\alpha} \Phi^{\alpha} \frac{1}{2} \left( \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + 1 \right) \right] \right\}^2 \right\rangle_{\omega k} + \sum_{\alpha} A_{\alpha}^2 \langle X^{\alpha 2} \rangle_{\omega k} \sin^4 \frac{\vartheta}{2}, \quad (30)$$

где  $k = (4\pi/\lambda) \sin \vartheta/2$ ,  $\lambda$  — длина световой волны.

Формулы (28)–(30) совместно с уравнениями (23)–(25) позволяют рассчитывать интенсивность рассеяния света в жидкости, обладающей произвольным набором скалярных и тензорных внутренних параметров. Уравнения (23) разделены и легко решаются

$$P_{X^{\alpha} X^{\beta}} = \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_{\alpha} + i\omega\eta_{\alpha}} \delta_{\alpha\beta}; \quad \langle X^{\alpha} X^{\beta} \rangle_{\omega k} = \frac{k_B T}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \frac{\eta_{\alpha}}{\mu_{\alpha}^2 + \omega^2 \eta_{\alpha}^2} \delta_{\alpha\beta}. \quad (31)$$

В уравнениях (24) переменные  $\zeta^{\alpha} = \zeta_{21}^{\alpha}$  связаны через величину смещения  $u_2$ . Исключая  $u_2$  из этих уравнений, получим

$$P_{\zeta^{\alpha} \zeta^{\beta}} = \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_{\alpha} + i\omega\eta_{\alpha}} \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \frac{k^2}{-\rho\omega^2 + k^2 i\omega\eta} \frac{i\omega\eta_{\beta}}{\mu_{\beta} + i\omega\eta_{\beta}} \frac{i\omega\eta_{\alpha}}{\mu_{\alpha} + i\omega\eta_{\alpha}}, \quad (32)$$

где  $\tilde{\eta} = \sum_{\gamma} \eta_{\gamma} / (1 + i\omega\tau_{\gamma})$ . Вычислять флуктуации  $\langle \zeta^{\alpha} \zeta^{\beta} \rangle_{\omega k}$  в общем виде трудно из-за комплексности  $\tilde{\eta}$ . Мы ограничимся двумя предельными случаями.

В области высоких частот ( $\rho\omega^2 \gg k^2 i\omega\tilde{\eta}$  и  $\rho\omega^2 \gg k^2 \mu_{\alpha}$ ) второй член в (32) мал; физически это связано с тем, что на таких частотах мала амплитуда макроскопических смещений  $u_2$ . Тогда  $\langle \zeta^{\alpha} \zeta^{\beta} \rangle_{\omega k} = \langle X^{\alpha} X^{\beta} \rangle_{\omega k}$ . Отсюда следует, что в области высоких частот контур линии рассеяния  $I_{xy}^z$  и  $I_z^z$  описывается суммой кривых лоренцовского типа

$$I_{xy}^z = I_z^y \sim \sum_{\alpha} \frac{A_{\alpha}^2}{\mu_{\alpha}^2} \frac{\eta_{\alpha}}{1 + \omega^2 \tau_{\alpha}^2}. \quad (33)$$

Если коэффициенты  $A_{\alpha}$  равны соответствующим модулям  $\mu_{\alpha}$  (это значит, что  $\varepsilon'_{ik} \sim \sigma'_{ik}$ ), то контур (33) совпадает с кривой частотной зависимости динамической вязкости  $\eta(\omega)$ . В общем же случае можно ожидать только совпадения значений  $\tau_{\alpha}$ , определяемых из этих двух кривых.

В области очень низких частот, когда все  $\tau_{\alpha} \ll 1/\omega$ , можно пренебречь  $i\omega\eta_{\beta} \ll \mu_{\beta}$ ,  $i\omega\eta_{\alpha} \ll \mu_{\alpha}$  во втором члене (32) и заменить  $\tilde{\eta}$  на  $\eta$ . Тогда

$$\langle \zeta^{\alpha} \zeta^{\beta} \rangle_{\omega k} = \frac{k_B T}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left[ \frac{\eta_{\alpha}}{\mu_{\alpha}^2 + \omega^2 \eta_{\alpha}^2} \delta_{\alpha\beta} - \frac{k^4 \eta}{k^4 \eta^2 + \rho^2 \omega^2} \frac{\eta_{\alpha} \eta_{\beta}}{\mu_{\alpha} \mu_{\beta}} \right]. \quad (34)$$

Как видно из этой формулы, на низких частотах флуктуации  $\zeta^{\alpha}$  подавляются ввиду легкости движения масс жидкости ( $u_2$  велико); это приводит к появлению провала на кривой  $I(\omega)$  при  $\omega = 0$ . Форма этого про-

вала определяется спектром аperiodической чисто вязкой волны с характерным временем торможения  $\rho/k^2\eta$ . В формуле (34) мы сохранили  $\omega^2\tau_\alpha^2$  в первом члене, и в таком виде она приближенно применима при всех частотах, если  $k^2\eta/\rho$  меньше, чем все  $1/\tau_\alpha$ . Однако в этом случае она, конечно, не позволяет найти положение максимумов интенсивности рассеяния. Найти максимумы и вообще проанализировать спектр при произвольных значениях параметров можно только численно.

При малых вязкостях, когда высокочастотная часть спектров раскладывается на лоренцовские кривые  $I = R \sum_{\alpha} \left(\frac{A_{\alpha}}{\mu_{\alpha}}\right)^2 \frac{\eta_{\alpha}}{1 + \omega^2\tau_{\alpha}^2}$  (где  $R$  — константа), можно определить все  $\tau_{\alpha}$  и  $n$  величин  $R(A_{\alpha}/\mu_{\alpha})^2\eta_{\alpha}$ . Кроме того, можно найти глубину провала при  $\omega = 0$ , равную  $(R/\eta) \left(\sum_{\alpha} A_{\alpha}\eta_{\alpha}/\mu_{\alpha}\right)^2$  или его интегральную интенсивность  $(R\pi k^2/\rho) \left(\sum_{\alpha} A_{\alpha}\eta_{\alpha}/\mu_{\alpha}\right)^2$ . Вместе с формулой

$\eta = \sum \eta_{\alpha}$  мы получаем систему  $n + 2$  уравнений для  $2n$  неизвестных  $\sqrt{R} A_{\alpha}/\mu_{\alpha}$ ,  $\eta_{\alpha}$ . При  $n = 2$  эта система оказывается полной.

В уравнениях (25) переменные  $\Phi^{\alpha}$  также связаны через смещение  $u_1$ . Система (25) позволяет получить уравнение для  $u_1$  при не слишком низких частотах  $\omega \gg k^2\kappa/C_V$  в виде

$$(-\rho\omega^2 + k^2\tilde{M}) u_1 = -\frac{2}{3} k \sum_{\beta} \frac{\Phi_{\beta}^3}{\mu_{\beta} + i\omega\tau_{\beta}}, \quad (35)$$

где  $\tilde{M} = \tilde{K} + T\tilde{p}_T/\tilde{C}_V + i\omega\tilde{\eta}$ ; потери на теплопроводность можно считать включенными в  $\tilde{C}_V$  [3]. Подставляя (35) в уравнения для  $\Phi^{\alpha}$ , находим восприимчивость

$$\rho\Phi^{\alpha}\Phi^{\beta} = \frac{1}{3} \frac{1}{\mu_{\alpha} + i\omega\tau_{\alpha}} \delta_{\alpha\beta} + \frac{4}{9} \frac{i\omega\tau_{\alpha}}{\mu_{\alpha} + i\omega\tau_{\alpha}} \frac{i\omega\tau_{\beta}}{\mu_{\beta} + i\omega\tau_{\beta}} \frac{k^2}{-\rho\omega^2 + k^2\tilde{M}}. \quad (36)$$

Легко видеть, что  $u_1$  и второй член в (36) пренебрежимо малы везде, кроме окрестности частоты Мандельштама—Бриллюэна  $\Omega_L = k\sqrt{\text{Re } \tilde{M}}$  [включая низкие частоты, на которых уравнение (35) неверно]. Вблизи от  $\Omega_L$  в этом члене можно пренебречь частотной зависимостью всех множителей, кроме последнего. Таким образом,

$$I_{xy}^y|_{\theta=90^\circ} = I_x^y \sim \frac{k_B T}{(2\pi)^4} \sum_{\alpha} \left[ \frac{A_{\alpha}^2}{\mu_{\alpha}^2} \frac{\eta_{\alpha}}{1 + \omega^2\tau_{\alpha}^2} + \sum_{\beta} \frac{8}{9} A_{\alpha}A_{\beta}\Gamma_{\alpha\beta}(\omega - \Omega_L), \quad (37)$$

где поправочный член, существенный только при  $\omega \approx \Omega_L$ , равен

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega - \Omega_L) = -\frac{\Omega_L^2 k^2 \eta_{\alpha} \tau_{\beta} C}{B^2 + \Omega_L^2 C^2},$$

$$B = 2\rho\Omega_L(\Omega_L - \omega)(\mu_{\alpha}\mu_{\beta} - \Omega_L^2\eta_{\alpha}\tau_{\beta}) - k^2\Omega_L^2\eta_M(\eta_{\alpha}\mu_{\beta} + \eta_{\beta}\mu_{\alpha}),$$

$$C = 2\rho\Omega_L(\Omega_L - \omega)(\eta_{\alpha}\mu_{\beta} + \eta_{\beta}\mu_{\alpha}) + k^2\eta_M(\mu_{\alpha}\mu_{\beta} - \Omega_L^2\eta_{\alpha}\tau_{\beta}).$$

Здесь  $\eta_M = (1/\Omega_L) \text{Im } \tilde{M}(\Omega_L)$  определяет поглощение звука на частоте  $\Omega_L$ .

Порядок величины поправочного члена можно оценить на частоте  $\Omega_L$ . Если на этой частоте все  $\omega\tau_{\alpha} \ll 1$ , то  $|\Gamma_{\alpha\beta}| \approx \tau_{\alpha}\tau_{\beta}/\eta_M(0)$ . Нетрудно убедиться, что отношение поправочного члена к главному оказывается порядка или меньше отношения  $\eta/\eta_M(\Omega_L)$ , т. е. оно может быть сравнимо с единицей, если объемная вязкость невелика. В этом случае в спектре

при  $\omega \approx \Omega_L$  будет наблюдаться провал, имеющий форму линии Мандельштама—Бриллюэна.

Если все  $\tau_\alpha \gg 1/\Omega_L$  (случай большой вязкости), то поправка  $\sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta} \approx \approx n^2/\Omega_L^2 \eta_m(\Omega_L)$  может быть велика по сравнению с главным членом  $\sum_{\alpha} 1/\Omega_L^2 \eta_\alpha$ . Тогда в спектре появится довольно высокий пик Мандельштама—Бриллюэна, который может заметно исказить форму кривой.

### Случай двух релаксационных процессов. Спектры $I_{xy}^x$ и $I_z^y$

Как мы видели, форма спектров  $I_{xy}^x$  и  $I_z^y$  легко расшифровывается только в области высоких частот или при условии, что все времена релаксации малы по сравнению с временем затухания вязкой волны. Для ее анализа при любых значениях параметров и при всех частотах необходимо заново решать систему (24) в каждом конкретном случае. Случай одного релаксационного процесса был исчерпывающим образом рассмотрен Леонтовичем [1]. Он предсказал наличие максимумов интенсивности, смещенных от частоты возбуждающего света,  $\omega_m = k \sqrt{\mu_\infty/\rho}$ , и имеющих ширину порядка  $1/\tau$ . Обычно считают, что мгновенный модуль сдвиговой упругости жидкостей имеет величину порядка  $10^{10}$  дин/см<sup>2</sup>, т. е. при  $k \approx 2 \cdot 10^5$  см<sup>-1</sup>  $\omega_m$  должно быть порядка  $2 \cdot 10^{10}$  сек.<sup>-1</sup> (3 ГГц). Для того чтобы максимум был не слишком широк, должно выполняться условие  $\omega_m \tau \geq 1$ , что дает  $\eta = \mu_\infty \tau = 0.5$  пз. Однако экспериментально дублет был впервые найден Фабелинским и сотрудниками [9, 11], Сиджменом и Стойчевым [8], а затем и другими авторами [12, 13] в жидкостях сравнительно небольшой вязкости ( $\approx 0.05$  пз), причем значения  $\mu_\infty \approx \approx 10^9$  дин/см<sup>2</sup> и  $1/\tau \approx 2 \cdot 10^{10}$  сек.<sup>-1</sup> оказались гораздо ниже ожидавшихся. Кроме того, в этих работах было обнаружено, что  $\omega_m$  уменьшается с понижением температуры и при вязкости  $\eta \approx 0.2$  пз расщепление линии исчезает. В рамках теории Леонтовича это означает уменьшение  $\mu_\infty$ , что трудно объяснимо.

В работе [12] было показано, что эти трудности можно обойти, если предположить, что с рассмотренным тензором анизотропии  $\xi_{ik}$  связана только часть сдвиговой вязкости, а остальная ее часть должна быть отнесена за счет более высокочастотных релаксационных процессов. Старунов и Фабелинский [14] высказали качественное предположение, что экспериментальные факты можно объяснить наличием двух релаксационных механизмов. В [12] было высказано также предположение, что при наличии второго релаксационного механизма, с которым не связана оптическая анизотропия, расщепление должно вновь возникнуть при достаточно больших вязкостях — факт, который к этому времени был уже установлен экспериментально в работе [10]. В связи с этим возникает необходимость детально исследовать случай двух релаксационных процессов. Это уже было сделано Вольтерра [15], но только для очень частой модели жидкости. Он предположил, что анизотропия вызывается запаздывающим процессом ориентации молекул, с которым связана также запаздывающая часть обратимой сдвиговой деформации. Остальная ее часть связана только с мгновенным процессом искажения квазикристаллической решетки. Это, конечно, только одно из возможных предположений, для которого при отсутствии количественной молекулярной теории нет никаких оснований. Естественнее принять, что с каждым из внутренних параметров  $\zeta_{ik}^\alpha$  связана некоторая доля анизотропии; сами параметры в этом случае рациональнее выбирать из соображений математической простоты, т. е. как нормальные координаты. Переход к любому другому набору внутренних параметров совершается тогда с помощью



некоторого линейного преобразования. В частности, тензор анизотропии введенный Вольтерра, в наших обозначениях имеет вид

$$\zeta \sim \frac{\eta_2^{\mu_1} - \eta_1^{\mu_2}}{\eta^{\mu_\infty}} (\zeta_1 - \zeta_2).$$

Решение уравнений (23), (24) в случае двух релаксационных процессов и применение ФДТ дает для флуктуаций  $X^\alpha$  и  $\zeta_{12}^\alpha$  (в дальнейшем  $X_2$ ,  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ )

$$\begin{aligned} \langle X_1^2 \rangle_{\omega k} &= \frac{k_B T}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\mu_1} \frac{\tau_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2}, \\ \langle \zeta_1^2 \rangle_{\omega k} &= \frac{k_B T}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\Delta} \left\{ \left( \frac{\rho}{\tau_1 \tau_2} + k^2 \right) \left[ \rho \omega^2 \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) - k^2 \left( \frac{\mu_2}{\tau_1} + \frac{\mu_1}{\tau_2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\rho \omega^2}{\eta_1} - k^2 \left( \frac{1}{\tau_2} + \frac{\mu_2}{\eta_1} \right) \right] \left[ \rho \omega^2 - \frac{\rho}{\tau_1 \tau_2} - k^2 (\mu_1 + \mu_2) \right] \right\}; \end{aligned}$$

формулы для  $\langle X_2^2 \rangle_{\omega k}$  и  $\langle \zeta_2^2 \rangle_{\omega k}$  получаются из (38) и (39) перестановкой индексов 1 и 2;

$$\langle \zeta_1 \zeta_2 \rangle_{\omega k} = \frac{k_B T}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{2\Delta} \left[ \rho \omega^2 \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) - k^2 \left( \frac{\mu_2}{\tau_1} + \frac{\mu_1}{\tau_2} \right) \right].$$

Здесь введено обозначение

$$\Delta = \left[ \rho \omega^2 \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) - k^2 \left( \frac{\mu_2}{\tau_1} + \frac{\mu_1}{\tau_2} \right) \right]^2 + \omega^2 \left[ \rho \omega^2 - \frac{\rho}{\tau_1 \tau_2} - k^2 (\mu_1 + \mu_2) \right]^2.$$

Форма спектров, даваемых формулами (29) и (38)–(40) для угла рассеяния  $\vartheta = 90^\circ$ , показана на графиках рис. 1, 3 и 3.<sup>2</sup> Расчеты проводились для следующих значений параметров:  $\mu_1 = 0.63 \cdot 10^9$  дин/см<sup>2</sup>,  $\mu_2 = 1.0 \cdot 10^{10}$  дин/см<sup>2</sup>,  $\eta_1 = \eta_2$ ,  $\eta = \eta_1 + \eta_2$  меняется от 2 до 500 спз (указаны на графиках);  $k^2/\rho = 4.76 \cdot 10^{10}$  см/г (приблизительно соответствует рассеянию света с длиной волны 6328 Å под углом  $90^\circ$  в хиолине). Для простоты предполагалось, что  $\mu_1$  и  $\mu_2$  постоянны, а  $\eta_1$  и  $\eta_2$  меняются одинаковым образом. В некоторых жидкостях это может соответствовать реальному температурному ходу параметров, поскольку модули обычно меняются гораздо медленнее, чем времена релаксации. Однако высказать какие-либо общие априорные соображения о виде температурной зависимости  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\eta_1/\eta_2$  невозможно, поскольку переход к нормальным координатам может привести к зависимости этих величин от элементов матрицы кинетических коэффициентов, которые сильно меняются с температурой. В частности, возможен и сильный рост  $\mu_1$  с ростом температуры, который в случае одного релаксационного процесса представлялся бы совершенно непонятным.

Графики рис. 1 в области малых вязкостей не отличаются от полученных в работе [12] в предположении, что  $\eta_2$  не релаксирует. На рис. 1 видно снижение частоты  $\omega_m$  при увеличении  $\eta_1$ . В области больших вязкостей возникает, как это и наблюдалось на опыте в салоле [10], дублет на частоте порядка  $k \sqrt{\mu_\infty/\rho}$ , соответствующий проявлению стеклообразных свойств жидкостей. Однако этот дублет очень слаб: его интегральная интенсивность даже при бесконечной вязкости (в стекле) в  $\mu_2/\mu_1 \approx 15$  раз меньше, чем интенсивность центральной линии. Таким образом, если считать, что оптическая анизотропия связана только с параметром  $\zeta_1$ , то появление такого дублета с заметной интенсивностью трудно объяснить. Поэтому следует рассмотреть также флуктуации  $\zeta_2$  (рис. 2).

<sup>2</sup> Эти результаты [были частично] доложены на Всесоюзном симпозиуме по проблеме релаксационных явлений в жидкостях, Душанбе, октябрь 1969 г.

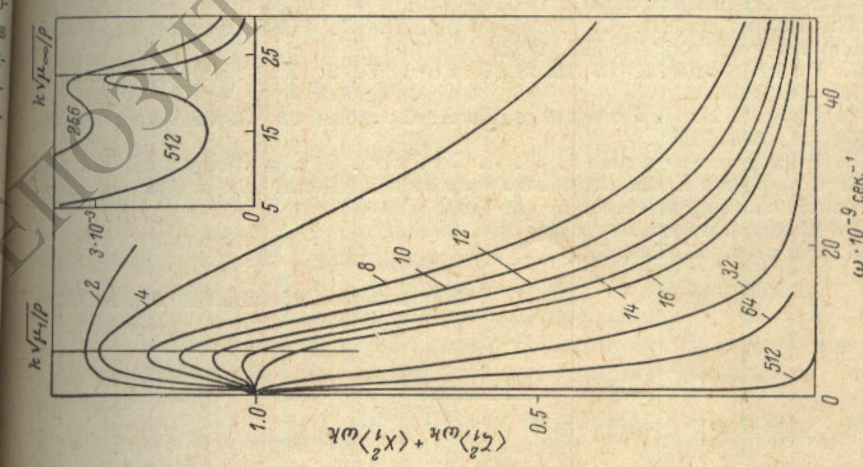


Рис. 1. Спектральная интенсивность  $\langle \xi_1^2 \rangle_{\omega k}$  как функция вязкости (спз).

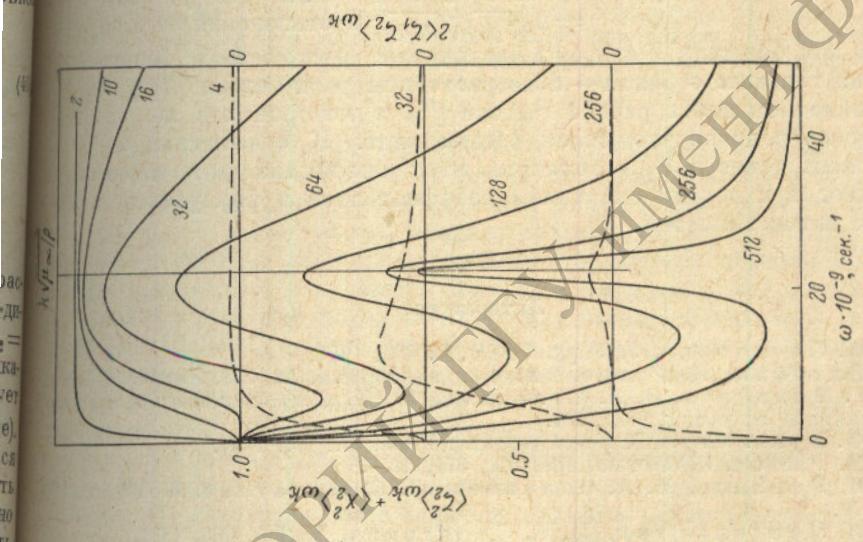


Рис. 2. Спектральная интенсивность  $\langle \xi_2^2 \rangle_{\omega k}$  (сплошные линии) и  $\langle \xi_2^2 \rangle_{\omega k}$  (штриховые линии) как функции вязкости (спз).

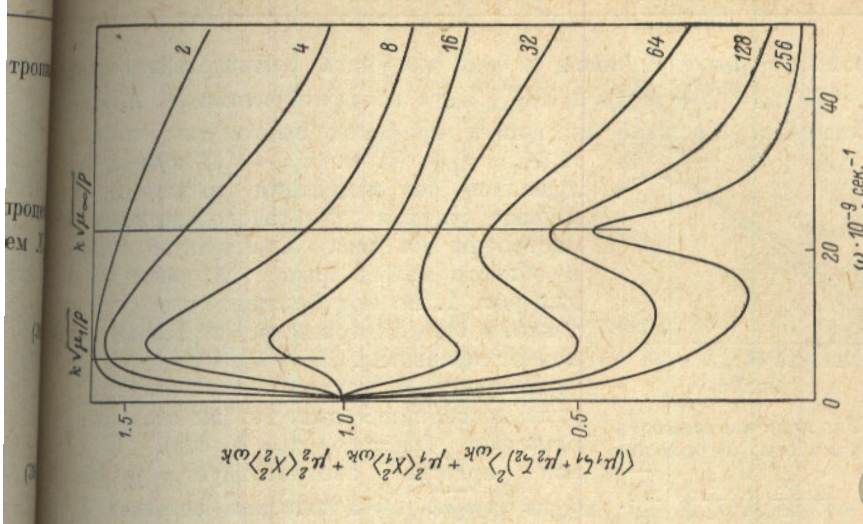


Рис. 3. Полная интенсивность рассеяния как функция вязкости (спз).

Кривую полной интенсивности можно получить суммированием кривых для  $\langle \zeta_1^2 + X_1^2 \rangle_{\omega k}$ ,  $\langle \zeta_2^2 + X_2^2 \rangle_{\omega k}$  и  $2 \langle \zeta_1 \zeta_2 \rangle_{\omega k}$  с коэффициентами  $A_1^2$ ,  $A_2^2$  и  $A_1 A_2$  соответственно. Масштаб на наших графиках выбран так, чтобы  $A_1/A_2 = \mu_1/\mu_2$  (т. е.  $\epsilon'_{ik} \sim \sigma'_{ik}$ ) кривые сдвигались без изменения масштабов. Основные графики для такого предположения построены на рис. 3. Характер спектра в области малых вязкостей такой же, как для рис. 1, но при больших вязкостях интенсивности центральной и боковых компонент сравнимы.

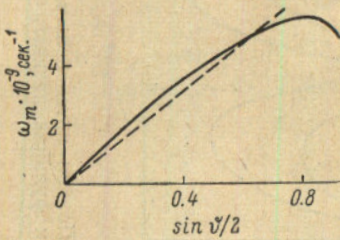


Рис. 4. Угловая зависимость  $\omega_m$  при  $\eta = 4$  слз; штриховая

линия:  $\omega_m = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho}}$ .

На рис. 4 показана зависимость  $\omega_m$  от угла рассеяния  $\theta$  для тех же значений параметров ( $A_2 = 0$ ,  $\eta = 4$  слз). Штриховая прямая соответствует уравнению  $\omega_m = k \sqrt{\mu_1/\rho}$ . Фактические значения  $\omega_m$  в области малых углов растут как  $\omega_m = k \sqrt{\mu_1/\rho} \sqrt{\eta/\eta_1}$ , а отклонения от этой зависимости при больших  $\theta$  связаны частично с ростом  $k$  в формуле для  $\langle \zeta_1^2 \rangle_{\omega k}$ , но главным образом — с возрастанием роли члена  $\langle X_1^2 \rangle_{\omega k} \sin^2 \theta$ .

Недавно появилась работа Рытова [16], в которой эта же проблема рассмотрена в несколько более общем виде. К сожалению, в [16] 9 компонент тензора  $\xi_{ik}^2$  рассматриваются как независимые переменные, что приводит к другим значениям коэффициентов в формулах для спектральных интенсивностей.

#### Литература

- [1] М. А. Леонтович. *J. Phys. USSR*, 4, 499, 1941.
- [2] Т. Литовиц, К. Дэвис. *Физическая акустика*, 2А, 298. Изд. «Мир», 1967.
- [3] И. Г. Михайлов, В. А. Соловьев, Ю. П. Сырников. *Основы акустики*, М., 1964.
- [4] М. Ф. Вукс. *Матер. X Всес. совещ. по спектр.*, М., 1957.
- [5] С. М. Рытов. *ЖЭТФ*, 33, 166, 514, 671, 1957.
- [6] В. П. Романов, В. А. Соловьев, Л. С. Филатова. *ЖЭТФ*, 58, 1970.
- [7] Л. И. Мандельштам, М. А. Леонтович. *ЖЭТФ*, 438, 1937.
- [8] G. I. Stegeman, V. P. Stoicheff. *Phys. Rev. Lett.*, 21, 202, 1968.
- [9] В. С. Старунов, Е. В. Тиганов, И. Л. Фабелинский. *ЖЭТФ*, Письма в Редакцию, 5, 317, 1967.
- [10] Л. М. Сабилов, В. С. Старунов, И. Л. Фабелинский. *ЖЭТФ*, Письма в Редакцию, 8, 399, 1968.
- [11] I. L. Fabelinskii, L. M. Sabirov, V. S. Starunov. *Phys. Lett.*, 29A, 414, 1969.
- [12] Е. Ф. Гросс, В. П. Романов, В. А. Соловьев, Е. О. Чернышев. *ФТТ*, 11, 3686, 1969.
- [13] Н. Б. Рождественская, Л. А. Зубков. *Опт. и спектр.*, 28, 599, 1969.
- [14] В. С. Старунов, И. Л. Фабелинский. *Докл. на конф. по физ. жидкого состояния*, Киев, июнь, 1969.
- [15] V. Volterra. *Phys. Rev.*, 180, 156, 1969.
- [16] С. М. Рытов. *ЖЭТФ*, 58, 2154, 1970.

Поступило в Редакцию 23 апреля 1970