

# ИССЛЕДОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ СРЕДСТВАМИ ПАКЕТА «МАТЕМАТИКА»

Сафонов И. В.

Будем рассматривать слабонелинейную колебательную систему, в которой наблюдаются флуктуации параметра линейного трения, подверженную периодическим параметрическим возмущениям

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon [\alpha - \beta x^2] \dot{x} + \varepsilon P x^2 \cos 3\omega t + \varepsilon (R_1 \cos \omega t + R_2 \cos 3\omega t) x^2 + \sqrt{\varepsilon} \sigma \dot{\xi}(t) \quad (1)$$

где  $\xi(t)$  – гауссовский белый шум единичной интенсивности,  $\varepsilon$  – положительный малый параметр,  $\omega$  – частота собственных колебаний системы при  $\varepsilon=0$ .

Уравнение (1) удовлетворяет достаточным условиям интегрируемости соответствующего уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка [1,2], следовательно, совместная плотность вероятностей амплитуды  $a$  и фазы  $\theta$  стационарных колебаний определяется следующим образом [3]:

$$W(a, \theta) = C \exp \left\{ 2 \int \left[ \frac{1}{K_{11}} \left( K_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial K_{11}}{\partial a} \right) da + \frac{K_2}{K_{22}} d\theta \right] \right\}, \quad (2)$$

где  $C$  – постоянная нормировки. Коэффициенты сноса и диффузии  $K_{11}(a, \theta)$ ,  $K_{11}(a, \theta)$ ,  $K_2(a, \theta)$ ,  $K_{22}(a, \theta)$  найдем из уравнений

$$\begin{aligned} K_1(a, \theta) &= M \left[ \frac{1}{\omega} f \sin \varphi + \frac{g^2 \cos^2 \varphi}{2\omega^2 a} \right], \\ K_2(a, \theta) &= M \left[ -\frac{1}{a\omega} f \cos \varphi + \frac{g^2 \sin 2\varphi}{2\omega^2 a} \right], \\ K_{11}(a, \theta) &= M \left[ \frac{1}{\omega^2} g^2 \sin^2 \varphi \right], \\ K_{22}(a, \theta) &= M \left[ \frac{1}{a^2 \omega^2} g^2 \cos^2 \varphi \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $M$  – оператор усреднения по явно входящему времени  $t$ ,

$$\begin{aligned} f &= f(t, x, \dot{x}) = [\alpha - \beta x^2] \dot{x} + P x^2 \cos 3\omega t + (R_1 \cos \omega t + R_2 \cos 3\omega t) x^2; \\ g &= g(t, x, \dot{x}) = \sigma \dot{x}. \end{aligned} \quad (4)$$

Нахождение выражений для коэффициентов сноса и диффузии согласно (3) представляет собой довольно сложную задачу вследствие громоздкости соответствующих выкладок.

Применение системы компьютерной алгебры «Mathematica» как вспомогательного средства при исследовании случайных колебаний в системе (1) позволяет освободить исследователя от трудоемких и рутинных операций.

Автором разработаны процедуры, автоматизирующие процесс исследования рассматриваемой стохастической квазилинейной колебательной системы. Пользователь, задав в качестве исходных данных функции  $f(t, x, \dot{x})$  и  $g(t, x, \dot{x})$ , получает усредненные по явно входящему времени стохастические

дифференциальные уравнения для  $a(t)$  и  $\theta(t)$ , а также выражения для коэффициентов сноса и диффузии. Осуществляется также проверка потенциальности построенных уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка и приводится их аналитическое решение в случае потенциальности.

Итак, задавая в качестве начальных данных функции (4), в пакете «Mathematica» последовательно получаем:

$$K_1 = \frac{\alpha a}{2} - \frac{\beta a^3}{8} + \frac{\sigma^2 a}{16} - \frac{a^2 P \sin 3\theta}{8\omega} - \frac{3}{8} a^2 R_1 \omega \sin \theta + \frac{1}{8} a^2 R_2 \omega \sin 3\theta,$$

$$K_2 = \frac{1}{8} a R_2 \omega \cos 3\theta - \frac{1}{8} a R_1 \omega \cos \theta - \frac{a P \cos 3\theta}{8\omega},$$

$$K_{11} = \frac{3a^2 \sigma^2}{8},$$

$$K_{22} = \frac{\sigma^2}{8}.$$

Поскольку условие потенциальности [1,2] выполняется, в «Mathematica» возможно вычисление  $W(a, \theta)$ . Для исследуемой системы находим:

$$W(a, \theta) = a^{-\frac{5}{3}} \frac{\beta a}{3\sigma^2} \exp \left\{ \frac{a(a\beta\omega + 6\omega^2 R_1 \sin \theta + 2(P - \omega^2 R_2) \sin 3\theta)}{3\sigma^2 \omega} \right\}.$$

Разработанные процедуры легко обобщаются на случай исследования более широкого класса стохастических квазилинейных систем.

#### Литература:

1. Митропольский Ю. А., Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань Нелинейные колебания в системах произвольного порядка — Киев: Наук. думка, 1992. — 344 с.
2. Жогаль С. П., Жогаль С. И. Исследование стохастических квазилинейных колебательных систем — Гомель: ГГУ, 1997. — 96 с.
3. Жогаль С. П., Жогаль С. И. Об интегрируемости уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка для неавтономных квазилинейных систем с параметрическим случайным воздействием — Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 1996, Т.4, №6, с. 92-99.