

ОТРАЖЕНИЕ МНОГОМОДОВОГО ЛАЗЕРНОГО ЛУЧА ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИКОВ

Ю. А. Курчатов и И. А. Малинов

С помощью математического аппарата интегральных преобразований Фурье получены приближенные выражения для коэффициентов отражения от границы раздела диэлектриков многомодового когерентного волнового пучка с гауссово-эрмитовым распределением интенсивности.

Отражение от границы раздела двух диэлектриков исследовано для плоских волн и для когерентных волновых пучков с равномерным распределением интенсивности в поперечном сечении [1, 2]. Распределение интенсивности в поперечном сечении лазерного луча неравномерно и в значительной степени определяется резонатором [3].

Из теории лазерных пучков известно [4], что любое произвольное распределение монохроматического света в пучке может быть разложено по типам колебаний, каждое из которых удовлетворяет волновому уравнению $\nabla^2 u + k^2 u = 0$. Типы колебаний образуют полную ортогональную систему функций, являются почти поперечными и характеризуются двумя индексами, отражающими изменение интенсивности в двух ортогональных направлениях в поперечном сечении луча. Для резонаторов, образованных сферическими зеркалами прямоугольной формы, распределение интенсивности в типе TEM_{mn} дается выражением

$$I = I_0 e^{-2 \frac{x^2 + y^2}{\omega^2}} H_m^2 \left(\frac{x \sqrt{2}}{\omega} \right) H_n^2 \left(\frac{y \sqrt{2}}{\omega} \right), \quad (1)$$

где H_m, H_n — полиномы Эрмита, $m, n = 0, 1, 2, \dots$ — индексы типа колебаний, ω — радиус пучка.

Как правило, аналогичные распределения интенсивности имеют место и в резонаторах, образованных сферическими зеркалами круглой формы, так как различные радиальные направления по многим причинам оказываются не идентичными.

Поперечная компонента электрического поля $E_{x'}$ такого типа колебаний в системе координат x', y', z' , связанной с пучком (рис. 1), может быть записана в виде

$$E_{x'} = E_{0x'} e^{-\frac{x'^2 + y'^2}{\omega_0^2}} H_m \left(\frac{x' \sqrt{2}}{\omega} \right) H_n \left(\frac{y' \sqrt{2}}{\omega} \right) e^{-i\Phi}, \quad (2)$$

где

$$\Phi = kz' - (m + n + 1) \arctg \frac{\lambda z'}{\pi \omega_0^2} + \frac{k}{2R} (x'^2 + y'^2),$$

ω_0 — радиус пучка в перетяжке, R — радиус кривизны волнового фронта. Продольная компонента определяется из уравнений Максвелла

$$E_{z'} = -\frac{1}{ik} \frac{\partial E_{x'}}{\partial x'}.$$

Подставляя в это выражение (2), можно заметить, что в дальней зоне продольной компонентой можно пренебречь, так как расходимость ла-

зерного луча мала. Возможна еще и ортогональная поляризация, которая вместе с (2) исчерпывает все возможные случаи. Реальное излучение лазера почти всегда является многомодовым.

Целью настоящей работы является исследование отражения многомодового лазерного пучка с распределением типа (1) в каждой моде от границы раздела двух диэлектриков.

Вычисление поля отраженного пучка

Рассмотрим пучок, состоящий из одной моды TEM_{mn} , падающий под углом θ_0 из воздуха на поверхность диэлектрика. Поперечная компонента электрического поля в этом пучке при $z=0$ может быть получена из (2) преобразованием координат

$$E_{mn}^{\text{пад.}}(x, y, z=0) = E_{0x} e^{-\frac{x^2+y^2 \cos^2 \theta_0}{\omega^2}} H_m\left(\frac{x\sqrt{2}}{\omega}\right) H_n\left(\frac{y\sqrt{2} \cos \theta_0}{\omega}\right) \times e^{iky \sin \theta_0} e^{-i\frac{k}{2R}(x^2+y^2 \cos^2 \theta_0)} e^{i(m+n+1) \arctg \frac{2y \sin \theta_0}{k\omega_0^2}} \quad (3)$$

Поле можно представить в виде интеграла Фурье по плоским волнам

$$E_{mn}^{\text{пад.}}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (4)$$

где

$$S(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{mn}^{\text{пад.}}(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy.$$

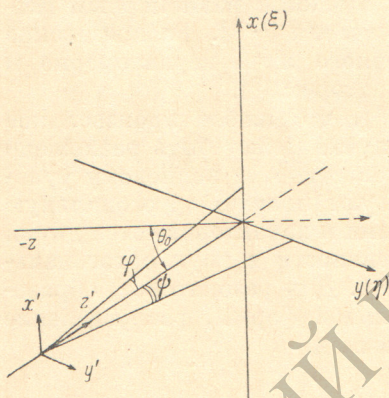


Рис. 1.

Поле отраженной волны получается умножением в (4) подынтегрального выражения на коэффициенты отражения плоских волн, определяемых для обеих поляризаций формулами Френеля

$$E_{mn}^{\text{отр.}}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\theta) S(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (5)$$

где $\rho(\theta)$ — коэффициент отражения для z -поляризации (\mathbf{E} перпендикулярен плоскости падения) или для p -поляризации (\mathbf{E} параллелен плоскости падения).

Для вычисления поля отраженной волны разложим $\rho(\theta)$ в ряд по малым разностям $\xi - \xi_0$ и $\eta - \eta_0$ вблизи оси пучка, задаваемой координатной осью z' . Это направление в системе координат ξ и η задается значениями $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = k \sin \theta_0$ (рис. 1).

Ограничиваясь членами первого порядка малости, получаем

$$\rho(\theta) = \rho(\theta_0) + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0, \eta=\eta_0} (\xi - \xi_0) + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\xi=\xi_0, \eta=\eta_0} (\eta - \eta_0). \quad (6)$$

Принимая во внимание, что $\theta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{k}\right)$, находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{\sqrt{k^2 - (\xi^2 + \eta^2)} \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0, \eta=\eta_0} &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{\eta}{\sqrt{k^2 - (\xi^2 + \eta^2)} \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\xi=\xi_0, \eta=\eta_0} &= \frac{1}{k \cos \theta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

С учетом (7) разложение (6) принимает вид

$$\rho(\theta) = \rho(\theta_0) + \frac{\partial \rho(\theta_0)}{\partial \theta} \left(\frac{\eta}{k \cos \theta_0} - \operatorname{tg} \theta_0 \right) + O, \quad (8)$$

где O — остаточный член разложения.

Коэффициенты разложения имеют вид для s -поляризации

$$\rho_{\perp}(\theta_0) = \frac{\cos \theta_0 - \alpha}{\cos \theta_0 + \alpha}, \quad \frac{\partial \rho_{\perp}(\theta_0)}{\partial \theta} = \rho'(\theta_0) = \frac{2 \sin \theta_0}{\alpha} \rho_{\perp}(\theta_0), \quad (9a)$$

для p -поляризации

$$\rho_{\parallel}(\theta_0) = \frac{n^2 \cos \theta_0 - \alpha}{n^2 \cos \theta_0 + \alpha}, \quad \frac{\partial \rho_{\parallel}(\theta_0)}{\partial \theta} = \frac{2n^2 \sin \theta_0}{n^2 - (n^2 + 1) \sin^2 \theta_0} \rho_{\parallel}(\theta_0), \quad (9b)$$

где $\alpha = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}$, $n = \sqrt{\varepsilon}$ — показатель преломления.

Подставляя (8) в (5) и производя интегрирование, получаем

$$E_{mn}^{\text{отр.}} = e^{-iky \sin \theta_0} e^{iky \sin \theta_0} \frac{2(m+n+1)}{\omega_0^2 k^2} \left[\rho(\theta_0) E_{mn}^{\text{пад.}} - \rho'(\theta_0) \operatorname{tg} \theta_0 \frac{2(m+n+1)}{\omega_0^2 k^2} E_{mn}^{\text{пад.}} - \right. \\ \left. - i \frac{\rho'(\theta_0) \sqrt{2}}{\omega k} \left(\frac{1}{2} E_{m, n+1} - n E_{m, n-1} \right) \right]. \quad (10)$$

При вычислении (10) принималось, что

$$e^{-i \frac{x^2 + y^2 \cos^2 \theta_0}{2R}} \approx 1$$

и

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2y \sin \theta_0}{k \omega_0^2} \approx \frac{2ky \sin \theta_0}{k^2 \omega_0^2}.$$

Первое из этих условий означает, что отражающая поверхность расположена в дальней зоне, где радиус кривизны фазового фронта достаточно велик. Второе условие хорошо выполняется для пучков оптического и инфракрасного диапазонов, так как для этих длин волн $2y \sin \theta_0 (k \omega_0^2)^{-1} \ll 1$. Два экспоненциальных множителя в (10) описывают дополнительные изменения фазы в направлении оси y , обусловленные наклонным падением пучка на границу раздела.

Второе слагаемое в квадратных скобках имеет малый множитель $(\omega_0 k)^{-2}$, поэтому вклад этого члена при не очень больших m и n мал и им можно пренебречь.

Третье слагаемое в квадратных скобках содержит моды с индексами $m, n+1$ и $m, n-1$. Как видно из (10), амплитуды их умножаются на малый множитель $(\omega k)^{-1}$ и коэффициент разложения $\rho'(\theta_0)$. Появление этих мод в поле отраженного пучка обусловлено дифракционным преобразованием — дифракцией пучка с распределением вида (2) на плоской границе раздела.

Преобразование части энергии пучка в моды других порядков при отражении лазерного пучка обусловлено двумя причинами: неравномерной интенсивностью и конечными поперечными размерами пучка, кривизной фазового фронта лазерного луча. При выводе соотношения (10) учтена только первая причина, поскольку вычисления проводились в дальней зоне.

Коэффициент отражения многомодового пучка

Мощность моды TEM_{mn} в падающем пучке можно записать в виде

$$P_{mn}^{\text{пад.}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{8\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} |E_{mn}^{\text{пад.}}|^2 dx dy. \quad (11)$$

Вычисляя интеграл, находим

$$P_{mn}^{\text{пад.}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{8\pi} E_{0x}^2 \frac{\pi\omega^2}{2 \cos \theta_0} m! n! 2^{m+n}. \quad (12)$$

Полная мощность многомодового пучка складывается из суммы мощностей каждой моды [5,6]

$$P_{\Sigma}^{\text{пад.}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{8\pi} E_{0x}^2 \frac{\pi\omega^2}{2 \cos \theta_0} \sum_{m=0}^{m_k} \sum_{n=0}^{n_j} a_{mn} m! n! 2^{m+n}, \quad (13)$$

где m_k, n_j — максимальные индексы мод в пучке, a_{mn} — коэффициенты, учитывающие относительное распределение мощности в пучке между модами.

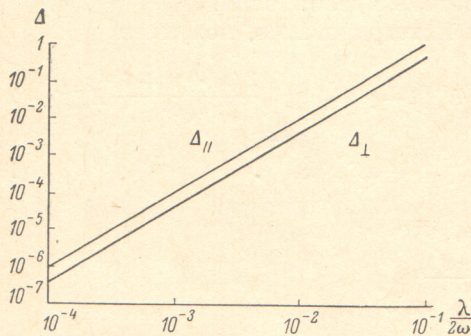


Рис. 2.

Полная мощность отраженного пучка находится в виде

$$P_{\Sigma}^{\text{отр.}} = \sum_{m=0}^{m_k} \sum_{n=0}^{n_j} P_{mn}^{\text{отр.}}. \quad (15)$$

Учитывая (13)—(15), энергетический коэффициент отражения многомодового лазерного пучка можно представить в виде

$$\Gamma = \rho^2(\theta_0) (1 + \Delta), \quad (16)$$

где для s-поляризации

$$\Delta_{\perp} = \frac{8 \sin^2 \theta_0 \sum_{m=0}^{m_k} \sum_{n=0}^{n_j} a_{mn} m! n! \left(n + \frac{1}{2}\right) 2^{m+n}}{\alpha^2 k^2 \omega^2 \sum_{m=0}^{m_k} \sum_{n=0}^{n_j} a_{mn} m! n! 2^{m+n}};$$

для p-поляризации

$$\Delta_{\parallel} = \frac{8\varepsilon^2 \sin^2 \theta_0 \sum_{m=0}^{m_k} \sum_{n=0}^{n_j} a_{mn} m! n! \left(n + \frac{1}{2}\right) 2^{m+n}}{[\varepsilon - (\varepsilon + 1) \sin^2 \theta_0]^2 k^2 \omega^2 \sum_{m=0}^{m_k} \sum_{n=0}^{n_j} a_{mn} m! n! 2^{m+n}}.$$

Из (16) видно, что первый член дает приближение геометрической оптики, а поправка Δ к этому приближению слабо зависит от номеров мод m и n , так как второй член содержит малый множитель $(k\omega)^{-2}$.

Зависимость поправки Δ для двух поляризаций от отношения $\lambda/2\omega$ при $\theta_0 = 45^\circ$, $\sqrt{\varepsilon} = 1.51$ и $n_j = 20$ приведена на рис. 2.

Заключение

1. Показано, что при отражении луча, состоящего из мод TE_{mn} , от плоской границы раздела диэлектриков в отраженном луче проявляются моды $TE_{m, n+1}$ и $TE_{m, n-1}$. Амплитуды этих мод имеют порядок $1/\omega k$, если считать амплитуду TE_{mn} моды за единицу.

2. Энергетический коэффициент отражения многомодового лазерного пучка при не очень больших m и n слабо зависит от номеров мод.

Литература

- [1] Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. Изд. АН СССР, М., 1957.
- [2] H. Lotsch. J. Opt. Soc. Am., 58, № 4, 1968.
- [3] X. Когельник, Т. Ли. Тр. Инст. инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 54, № 10, 1966.
- [4] В. М. Файн, Я. И. Ханин. Квантовая радиофизика. Изд. «Сов. радио», М., 1965.
- [5] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1963.
- [6] G. Goubau, F. Schwering. IRE Trans., AP-6, 248, 1961.

Поступило в Редакцию 14 января 1970 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины