ФИЗИКА

УДК 539.12.01

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА О *S*-СОСТОЯНИЯХ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ ДВУХ ПОТЕНЦИАЛОВ «δ-СФЕРА»

В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

RELATIVISTIC SCATTERING *S*-STATES PROBLEM FOR SUPERPOSITION OF TWO POTENTIALS «δ-SPHERE» TYPE

V.N. Kapshai, Yu.A. Grishechkin

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Получены точные решения релятивистских двухчастичных уравнений для *s*-состояний рассеяния в случае δ-потенциала и суперпозиции двух δ-потенциалов. На основании найденных волновых функций вычислены амплитуды рассеяния и фазовые сдвиги. Произведен анализ полученных величин, в результате которого доказано условие унитарности для амплитуд рассеяния, найдены условия обращения амплитуд в нуль. Показано, что нерелятивистский предел всех полученных релятивистских выражений даёт результаты, которые совпадают с соответствующими выражениями, найденными при решении уравнения Шрёдингера.

Ключевые слова: *релятивистское двухчастичное уравнение, релятивистское конфигурационное представление, дельта-потенциал, амплитуда рассеяния, S-матрица, фазовый сдвиг, условие унитарности, эффект Рамзауэра – Таунсенда.*

Exact solutions of relativistic two-particle equations for scattering *s*-states are obtained in cases of the δ-function potential and superposition of two δ-function potentials. Scattering amplitudes and phase shifts are calculated on the basis of wave functions found. The analysis of values obtained was carried out. As a result, the unitarity condition and vanishing conditions of scattering amplitudes are proved. It is shown that the non-relativistic limit of relativistic expressions obtained yields results which coincide with corresponding expressions which were found in the process of solving the Schrödinger equation.

Keywords: *relativistic two-particle equation, relativistic configurational representation, delta-function potential, scattering amplitude, S-matrix, phase shift, unitarity condition, Ramsauer – Townsend effect.*

Введение

Уравнения квазипотенциального типа впервые были получены в импульсном представлении в интегральной форме [1], [2]. Позже эти уравнения были сформулированы в так называемом релятивистском конфигурационном представлении (РКП) [3] в виде разностных или интегральных. Фактически РКП является релятивистским обобщением обычного координатного представления квантовой механики. В течение долгого времени в РКП рассматривались только разностные уравнения. И лишь с установлением явного вида функций Грина (ФГ) оказалось возможным рассмотрение интегральных уравнений в РКП [4], [5]. Основной проблемой, возникающей при решении разностных уравнений, является наличие у получаемых решений произвольного *i*-периодического множителя, определение явного вида которого из разностного уравнения невозможно. В то же время решения интегральных уравнений не имеют этого недостатка и определяются однозначно.

В настоящее время известно только очень небольшое число точных решений интегральных квазипотенциальных уравнений. В этой связи привлекательной возможностью получения точных решений является рассмотрение δ-потенциалов и их суперпозиций в РКП.

Так называемые потенциалы нулевого радиуса привлекают большое внимание физиков и используются в самых разных задачах молекулярной, атомной и ядерной физики [6]. С развитием метода и введением в рассмотрение обобщённых δ-потенциалов был найден большой класс точно решаемых задач квантовой механики.

Квазипотенциальные уравнения в РКП с δ-потенциалами долгое время не привлекали внимания, поскольку решение разностных парциальных уравнений с δ-потенциалами представляет очень сложную проблему. Но с нахождением явного вида ФГ интегральных квазипотенциальных уравнений в РКП стала ясна возможность изучения таких потенциалов. Ковариантные двухчастичные интегральные уравнения в РКП с δ-потенциалами рассматривались ранее [7], [8], но только в одномерном случае.

В данной работе найдены решения трехмерных релятивистских двухчастичных интегральных уравнений для сферически-симметричных волновых функций (ВФ) состояний рассеяния в РКП в случае δ-потенциала, отличного от нуля на поверхности сферы и суперпозиции двух таких потенциалов. На основании полученных решений вычислены парциальные амплитуды рассеяния и фазовые сдвиги.

1 Точное решение двухчастичных уравнений с δ-потенциалом

Интегральные уравнения для ВФ $\psi_{(j)}(\chi_q, r)$ в РКП, описывающих *s*-состояния рассеяния системы двух скалярных частиц одинаковой массы *m*, имеют вид [4]

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q mr) + \\ +\int_0^\infty G_{(j)}(\chi_q, r, r')V(r')\psi_{(j)}(\chi_q, r')dr', \tag{1.1}$$

где индекс *j* соответствует одному из четырёх вариантов релятивистских уравнений квазипотенциального типа [1]–[3]:

$j=1$ $(j=3)$ – уравнению Логунова – Тавхелидзе (модифицированному);

$j=2$ $(j=4)$ – уравнению Кадышевского (модифицированному).

В уравнениях (1.1) величина $\chi_q \geq 0$ – быстрота, связанная с энергией двухчастичной системы $2E_q$ как $2E_q = 2m\,\mathrm{ch}\,\chi_q$, r – модуль радиус-вектора в РКП, $V(r)$ – потенциал, $G_{(j)}(\chi_q, r, r')$ – ФГ *j*-го уравнения:

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') = \\ = G_{(j)}(\chi_q, r - r') - G_{(j)}(\chi_q, r + r'), \tag{1.2}$$

где [4], [5]

$$G_{(1)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{K_q^{(1)}} \frac{\mathrm{sh}[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{\mathrm{sh}(\pi mr/2)}, \tag{1.3}$$

$$G_{(2)}(\chi_q, r) = \frac{(4m\,\mathrm{ch}\chi_q)^{-1}}{\mathrm{ch}(\pi mr/2)} - \frac{i}{K_q^{(2)}} \frac{\mathrm{sh}[(\pi + i\chi_q)mr]}{\mathrm{sh}(\pi mr)},$$

$$G_{(3)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{K_q^{(3)}} \frac{\mathrm{ch}[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{\mathrm{ch}(\pi mr/2)},$$

$$G_{(4)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{K_q^{(4)}} \frac{\mathrm{sh}[(\pi + i\chi_q)mr]}{\mathrm{sh}(\pi mr)}.$$

В формулах (1.3) использованы обозначения

$$K_q^{(1)} = K_q^{(2)} = m\,\mathrm{sh}\,2\chi_q;$$

$$K_q^{(3)} = K_q^{(4)} = 2m\,\mathrm{sh}\,\chi_q.$$

В дальнейшем нам понадобятся асимптотики ФГ (1.2) при $r \to \infty$:

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r')\Big|_{r\to\infty} \cong \\ \cong \frac{-2}{K_q^{(j)}} \sin\left(\chi_q mr'\right)\exp\left(i\chi_q mr\right). \tag{1.4}$$

Рассмотрим решения релятивистских уравнений для состояний рассеяния (1.1) в случае взаимодействия, моделируемого δ-потенциалом

$$V(r) = V_0\delta(r-a), \tag{1.5}$$

где V_0 и $a > 0$ – вещественные константы. Потенциал (1.5) локализован на поверхности сферы конечного радиуса $a > 0$ (на «δ-сфере»). ВФ для потенциала (1.5) имеют следующий вид:

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q mr) + \\ +V_0 A_{(j)}^{-1}(\chi_q)\sin(\chi_q ma)G_{(j)}(\chi_q, r, a); \\ A_{(j)}(\chi_q) = 1 - V_0 G_{(j)}(\chi_q, a, a). \tag{1.6}$$

Учитывая (1.4), асимптотики ВФ (1.6) при $r \to \infty$ можно представить в виде

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r)\Big|_{r\to\infty} \cong \sin(\chi_q mr) + \\ +q\,f_{(j)}(\chi_q)\exp(i\chi_q ma),$$

$$f_{(j)}(\chi_q) = \frac{-2V_0\sin^2(\chi_q ma)}{qK_q^{(j)}A_{(j)}(\chi_q)}, \tag{1.7}$$

где $q = m\,\mathrm{sh}\,\chi_q$ – релятивистский импульс, $f_{(j)}(\chi_q)$ – релятивистская амплитуда рассеяния, которая определена так же, как и в нерелятивистской теории – в виде коэффициента при рассеянной волне в асимптотике ВФ, разделенного на импульс [9] (релятивистская рассеянная волна имеет вид $\exp(i\chi_q mr)$ [3]).

Выражения для амплитуд рассеяния, соответствующие четырём вариантам уравнений, могут быть представлены формулами

$$f_{(1)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 q^{-1}\sin^2(\chi_q ma)}{K_q^{(1)} + V_0\left[\sin(2\chi_q ma)\mathrm{cth}(\pi ma) - 2\dfrac{\chi_q}{\pi} + 2i\sin^2(\chi_q ma)\right]}; \tag{1.8}$$

$$f_{(2)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 q^{-1}\sin^2(\chi_q ma)}{K_q^{(2)} + V_0\left[\sin(2\chi_q ma)\mathrm{cth}(2\pi ma) - \dfrac{\chi_q}{\pi} - \dfrac{\mathrm{sh}(\chi_q)\mathrm{sh}^2(\pi ma/2)}{\mathrm{ch}(\pi ma)} + 2i\sin^2(\chi_q ma)\right]};$$

$$f_{(3)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 q^{-1}\sin^2(\chi_q ma)}{K_q^{(3)} + V_0\left[\sin(2\chi_q ma)\mathrm{th}(\pi ma) + 2i\sin^2(\chi_q ma)\right]};$$

$$f_{(4)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 q^{-1}\sin^2(\chi_q ma)}{K_q^{(4)} + V_0\left[\sin(2\chi_q ma)\mathrm{cth}(2\pi ma) - \chi_q/\pi + 2i\sin^2(\chi_q ma)\right]}.$$

Зная амплитуду рассеяния $f_{(j)}(\chi_q)$, можно получить информацию о рассеянии частиц. Например, парциальное сечение рассеяния *s*-волны $\sigma_{0(j)}(\chi_q)$ и парциальная *S*-матрица $S_{(j)}(\chi_q)$ соответственно выражаются через амплитуду рассеяния $f_{(j)}(\chi_q)$ соотношениями

$$\sigma_{0(j)}(\chi_q) = 4\pi\left|f_{(j)}(\chi_q)\right|^2;$$

$$S_{(j)}(\chi_q) = 1 + 2iq\, f_{(j)}(\chi_q). \qquad (1.9)$$

Нетрудно видеть, что амплитуды рассеяния (1.8) удовлетворяют условию унитарности [3], которое имеет вид, аналогичный нерелятивистскому выражению [9]:

$$\operatorname{Im} f_{(j)}(\chi_q) = q\left|f_{(j)}(\chi_q)\right|^2. \qquad (1.10)$$

Из выражений (1.7) следует, что условие унитарности эквивалентно следующему свойству ФГ (1.2):

$$\operatorname{Im} G_{(j)}(\chi_q, a, b) = -2\sin(\chi_q m a)\sin(\chi_q m b)\big/K_q^{(j)}. \qquad (1.11)$$

Парциальные S-матрицы могут быть представлены в следующем виде:

$$S_{(j)}(\chi_q) = 1 - \frac{4iV_0\sin^2(\chi_q m a)}{K_q^{(j)}A_{(j)}(\chi_q)} = \frac{\left(A_{(j)}(\chi_q)\right)^*}{A_{(j)}(\chi_q)}, \qquad (1.12)$$

из которых унитарность S-матрицы очевидна. Унитарность S-матрицы учитывается в следующем представлении

$$S_{(j)}(\chi_q) = \exp\left(2i\,\phi_{(j)}(\chi_q)\right),$$

на основе которого определяется фазовый сдвиг $\phi_{(j)}(\chi_q)$. Фазовые сдвиги могут быть найдены по формулам

$$\operatorname{tg}\left(2\phi_{(j)}(\chi_q)\right) = \frac{-4V_0\left[1 - V_0\operatorname{Re}G_{(j)}(\chi_q, a, a)\right]\sin^2(\chi_q m a)}{K_q^{(j)}\left[\left(1 - V_0\operatorname{Re}G_{(j)}(\chi_q, a, a)\right)^2 - \left(2V_0\sin^2(\chi_q m a)\big/K_q^{(j)}\right)^2\right]}. \qquad (1.13)$$

На рисунке 1.1 приведены результаты численных расчётов сечений рассеяния и фазовых сдвигов, найденных для $m = 1$, $a = 5$, $V_0 = 2$ (номер кривой на всех рисунках равен индексу уравнения j).

Из выражений (1.8) следует и на рисунке 1.1 видно, что $\sigma_{0(j)}(\chi_q) \to 0$ при $\chi_q \to \infty$, что естественно. Видно также, что сечения рассеяния могут быть равны нулю при некоторых конечных значениях быстроты χ_q. В нерелятивистской теории аналогичный эффект обращения в ноль парциального сечения рассеяния при конечных значениях импульса известен как эффект Рамзауэра – Таунсенда [9]. Амплитуда рассеяния в случае δ-потенциала равна нулю, если выполняется одинаковое для всех уравнений условие

$$\chi_q m\, a = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Из этого условия следует, что число нулей каждой амплитуды рассеяния бесконечно, и они отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии, обратно пропорциональном произведению радиуса «δ-сферы» и массы частицы.

2 Решение в случае суперпозиции двух δ-потенциалов

Найдём решения уравнений для состояний рассеяния (1.1) и выражения для амплитуд рассеяния в случае суперпозиции двух δ-потенциалов:

$$V(r) = V_1\delta(r - a_1) + V_2\delta(r - a_2), \qquad (2.1)$$

где $V_{1,2}$, $a_{1,2}$ – вещественные постоянные и $a_2 > a_1 > 0$. Подставляя (2.1) в уравнения (1.1), получим ВФ в следующем общем виде:

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q m r) + \sum_{s=1}^{2} V_s\, G_{(j)}(\chi_q, r, a_s)\,\psi_{(j)}(\chi_q, a_s). \qquad (2.2)$$

Содержащиеся в (2.2) величины $\psi_{(j)}(\chi_q, a_{1,2})$ могут быть найдены. Для их определения нужно взять выражения (2.2) в точках $r = a_1$ и $r = a_2$. В результате будет получена система двух линейных алгебраических уравнений для $\psi_{(j)}(\chi_q, a_1)$, $\psi_{(j)}(\chi_q, a_2)$. Решая эту систему и подставляя решение в (2.2), получим следующие выражения для ВФ:

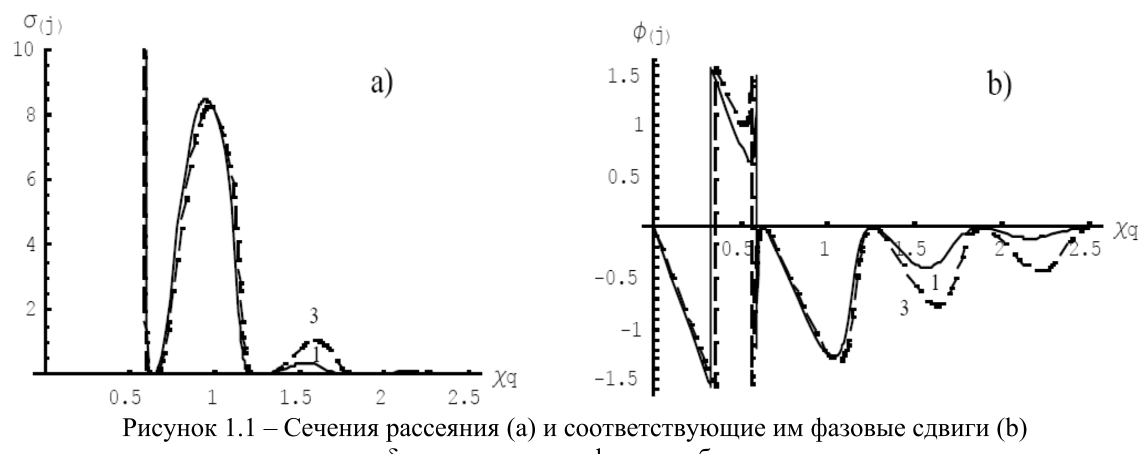

Рисунок 1.1 – Сечения рассеяния (a) и соответствующие им фазовые сдвиги (b) для δ-потенциала как функции быстроты

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q mr) + \\ + \frac{1}{\Delta_{(j)}(\chi_q)} \sum_{s=1}^{2} V_s\, G_{(j)}(\chi_q, r, a_s)\, \Delta_{s(j)}(\chi_q), \tag{2.3}$$

где введены обозначения

$$\Delta_{(j)}(\chi_q) = \prod_{s=1}^{2} \left[1 - V_s G_{(j)}(\chi_q, a_s, a_s)\right] - \\ -V_1 V_2 G_{(j)}^2(\chi_q, a_1, a_2);$$

$$\Delta_{1(j)}(\chi_q) = \sin(\chi_q m a_1)\left[1 - V_2 G_{(j)}(\chi_q, a_2, a_2)\right] + \\ +V_2 \sin(\chi_q m a_2) G_{(j)}(\chi_q, a_1, a_2);$$

$$\Delta_{2(j)}(\chi_q) = \sin(\chi_q m a_2)\left[1 - V_1 G_{(j)}(\chi_q, a_1, a_1)\right] + \\ +V_1 \sin(\chi_q m a_1) G_{(j)}(\chi_q, a_1, a_2).$$

Учитывая асимптотическое поведение ВФ (2.3) при $r \to \infty$, получим следующие формулы для амплитуд рассеяния:

$$f_{(j)}(\chi_q) = \frac{-2}{q K_q^{(j)} \Delta_{(j)}(\chi_q)} \times \\ \times \sum_{s=1}^{2} V_s \Delta_{s(j)}(\chi_q) \sin(\chi_q m a_s). \tag{2.4}$$

Выражения (2.3), (2.4) для конкретных j имеют довольно громоздкий вид. Например, в случае модифицированного уравнения Логунова-Тавхелидзе ($j = 3$) амплитуда рассеяния имеет форму

$$f_{(3)}(\chi_q) = \frac{F_1 + F_2}{q K_q^{(3)} \left(F_3 + i F_4\right)},$$

где

$$F_1 = V_1 \sin^2(\chi_q m a_1) \times \\ \times \left[1 + \frac{V_2}{K_q^{(3)}} \operatorname{th}(\pi m a_2) \sin(2\chi_q m a_2)\right] + \\ +V_2 \sin^2(\chi_q m a_2) \left[1 + \frac{V_1}{K_q^{(3)}} \operatorname{th}(\pi m a_1) \sin(2\chi_q m a_1)\right];$$

$$F_2 = \frac{2V_1V_2}{K_q^{(3)}} \sin(\chi_q m a_1) \sin(\chi_q m a_2) \times \\ \times \left[\sin(\chi_q m(a_2 - a_1)) \operatorname{th}\frac{\pi m(a_2 - a_1)}{2} - \right. \\ \left. - \sin(\chi_q m(a_2 + a_1)) \operatorname{th}\frac{\pi m(a_2 + a_1)}{2}\right];$$

$$F_3 = \prod_{s=1}^{2} \left[1 + \frac{V_s}{K_q^{(3)}} \operatorname{th}(\pi m a_s) \sin(2\chi_q m a_s)\right] - \\ - \frac{V_1 V_2}{\left(K_q^{(3)}\right)^2} \left[\operatorname{th}\frac{\pi m(a_2 - a_1)}{2} \sin(2\chi_q m(a_2 - a_1)) - \right. \\ \left. - \operatorname{th}\frac{\pi m(a_2 + a_1)}{2} \sin(2\chi_q m(a_2 + a_1))\right]^2;$$

$$F_4 = \frac{2V_1 \sin^2(\chi_q m a_1)}{K_q^{(3)}} \mp \\ \mp \left[1 + \frac{V_2}{K_q^{(3)}} \operatorname{th}(\pi m a_2) \sin(2\chi_q m a_2)\right] + \\ + \frac{2V_2 \sin^2(\chi_q m a_2)}{K_q^{(3)}} \left[1 + \frac{V_1}{K_q^{(3)}} \operatorname{th}(\pi m a_1) \sin(2\chi_q m a_1)\right] + \\ + \frac{4V_1V_2}{\left(K_q^{(3)}\right)^2} \sin(\chi_q m a_1) \sin(\chi_q m a_2) \times \\ \times \left[\operatorname{th}\frac{\pi m(a_2 - a_1)}{2} \sin(\chi_q m(a_2 - a_1)) - \right. \\ \left. -\operatorname{th}\frac{\pi m(a_2 + a_1)}{2} \sin(\chi_q m(a_2 + a_1))\right]^2.$$

Амплитуды (2.4) удовлетворяют условию унитарности (1.10), которое, как и в случае одного δ-потенциала, эквивалентно свойству ФГ (1.11).

Для суперпозиции δ-потенциалов S-матрицы $S_{(j)}(\chi_q)$ и фазовые сдвиги $\phi_{(j)}(\chi_q)$ также могут быть представлены в аналогичной (1.12) и (1.13) форме

$$S_{(j)}(\chi_q) = 1 - \left[4i\left(V_1 \sin(\chi_q m a_1) \Delta_{1(j)}(\chi_q) + \right.\right. \\ \left.\left. +V_2 \sin(\chi_q m a_2) \Delta_{2(j)}(\chi_q)\right)\right] / \left(K_q^{(j)} \Delta_{(j)}(\chi_q)\right) = \tag{2.5} \\ = \frac{\left(\Delta_{(j)}(\chi_q)\right)^*}{\Delta_{(j)}(\chi_q)}.$$

$$\tan\left(2\phi_{(j)}(\chi_q)\right) = \\ = \frac{-2 \operatorname{Re}\Delta_{(j)}(\chi_q) \operatorname{Im}\Delta_{(j)}(\chi_q)}{\left(\operatorname{Re}\Delta_{(j)}(\chi_q)\right)^2 - \left(\operatorname{Im}\Delta_{(j)}(\chi_q)\right)^2}, \tag{2.6}$$

где

$$\operatorname{Re}\Delta_{(j)}(\chi_q) = \prod_{s=1}^{2} \left[1 - V_s \operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a_s, a_s)\right] - \\ -V_1 V_2 \left[\operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a_2, a_1)\right]^2;$$

$$\operatorname{Im}\Delta_{(j)}(\chi_q) = 2V_1 \sin^2(\chi_q m a_1) \times \\ \times \left[1 - V_2 \operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a_2, a_2)\right] / K_q^{(j)} + \\ +2V_2 \sin^2(\chi_q m a_2) \times \\ \times \left[1 - V_1 \operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a_1, a_1)\right] / K_q^{(j)} + \\ +4V_1 V_2 \sin(\chi_q m a_1) \sin(\chi_q m a_2) \times \\ \times \operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a_2, a_1) / K_q^{(j)}.$$

Выражения (2.3)–(2.6) для конкретных j имеют довольно громоздкий вид, поэтому мы не приводим их. Результаты численных расчётов сечений рассеяния и фазовых сдвигов для $j = 1, 2, 3, 4$ при $m = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $V_1 = 1$, $V_2 = -1$ проиллюстрированы на рисунке 2.1.

Условия обращения в нуль сечений рассеяния для суперпозиции двух δ-потенциалов имеют вид

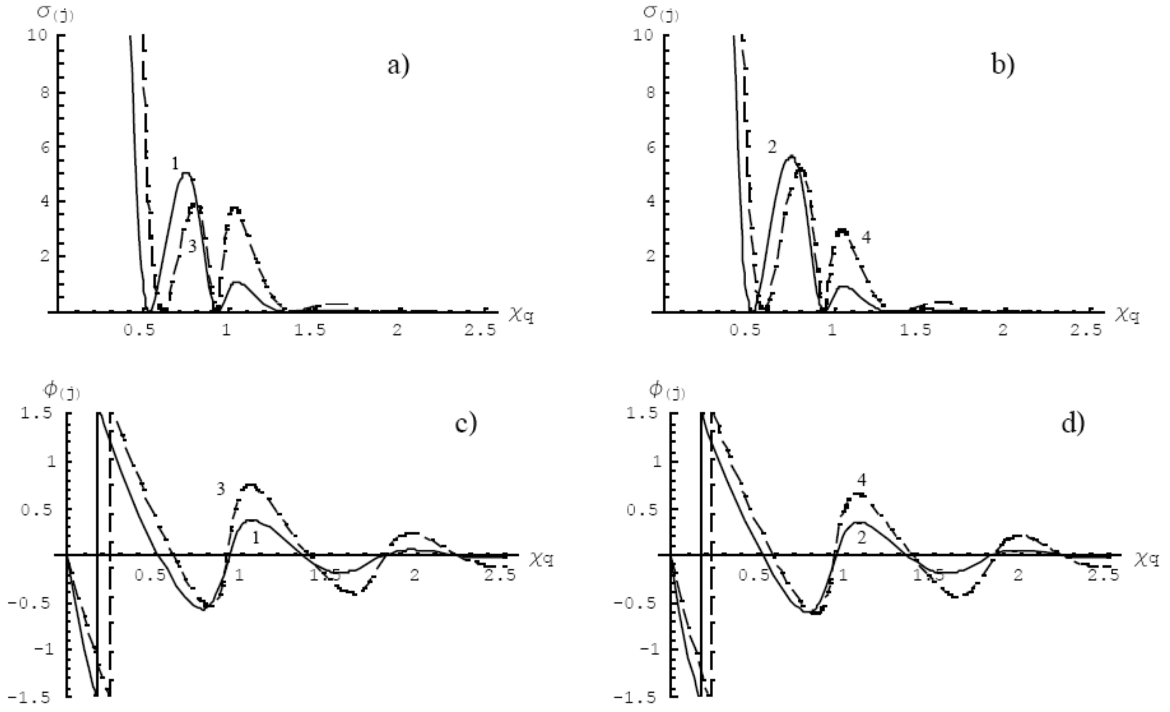

Рисунок 2.1 – Сечения рассеяния (a, b) и соответствующие им фазовые сдвиги (c,d) для суперпозиции двух δ-потенциалов как функции быстроты

$$\begin{gathered}V_2\sin^2(\chi_q m a_2)+V_1\sin^2(\chi_q m a_1)+\\ +V_1V_2\Big[2\sin(\chi_q m a_2)\sin(\chi_q m a_1)G_{(j)}(\chi_q,a_2,a_1)-\\ -\sin^2(\chi_q m a_1)G_{(j)}(\chi_q,a_2,a_2)-\\ -\sin^2(\chi_q m a_2)G_{(j)}(\chi_q,a_1,a_1)\Big]=0.\end{gathered}\tag{2.7}$$

Например, для $j=3$ условие (2.7) принимает форму

$$\begin{gathered}V_2\sin^2(\chi_q m a_2)+V_1\sin^2(\chi_q m a_1)+\\ +\frac{2V_1V_2}{K_q^{(3)}}\sin(\chi_q m a_1)\sin(\chi_q m a_2)\times\\ \times\Bigg[\operatorname{th}\frac{\pi m(a_2-a_1)}{2}\sin\big(\chi_q m(a_2-a_1)\big)-\\ -\operatorname{th}\frac{\pi m(a_2+a_1)}{2}\sin\big(\chi_q m(a_2+a_1)\big)+\\ +\operatorname{th}(\pi m a_1)\sin(\chi_q m a_2)\cos(\chi_q m a_1)+\\ +\operatorname{th}(\pi m a_2)\sin(\chi_q m a_1)\cos(\chi_q m a_2)\Bigg]=0\,.\end{gathered}$$

При $\chi_q\to\infty$ выражения (2.7) обращаются в равенство

$$V_2\sin^2(\chi_q m a_2)+V_1\sin^2(\chi_q m a_1)=0,\tag{2.8}$$

из которого следует:

1) при $V_1V_2<0$ число нулей амплитуд рассеяния $f_{(j)}(\chi_q)$ бесконечно;

2) при $V_1V_2>0$ уравнение (2.8) имеет бесконечное число решений только, если отношение a_2/a_1 – рациональное число; в противном случае амплитуда рассеяния имеет конечное число нулей.

3 Нерелятивистский предел

Определим теперь нерелятивистский предел полученных результатов. В этом пределе полученные для потенциала «δ-сфера» ВФ (1.6), амплитуды рассеяния (1.8) имеют одинаковый для всех рассматриваемых уравнений вид

$$\begin{gathered}\lim_{\substack{\chi_q\to 0\\ m\to\infty}}\psi_{(j)}(\chi_q,r)=\psi_{(0)}(q,r)=\\ =\sin(qr)+\frac{V_0\sin(qa)G_{(0)}(q,r,a)}{q+V_0\sin(qa)\exp(iqa)},\end{gathered}\tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}\lim_{\substack{\chi_q\to 0\\ m\to\infty}}f_{(j)}(\chi_q)=f_{(0)}(q)=\\ =\frac{-V_0\sin^2(qa)}{q\big[q+V_0\sin(qa)\exp(iqa)\big]},\end{gathered}\tag{3.2}$$

где $q=\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ \chi_q\to 0}}m\chi_q$ – нерелятивистский импульс, $G_{(0)}(q,r,r')$ – нерелятивистская ФГ [9]. Нерелятивистский предел найденных для суперпозиции двух «δ-сфер» ВФ (2.3) и амплитуд рассеяния (2.4) для всех j может быть записан как

$$\begin{gathered}\psi_{(0)}(q,r)=\sin(qr)+\frac{1}{\Delta_{(0)}(q)}\times\\ \times\Big[V_1\sin(q\,a_2)G_{(0)}(q,r,a_1)+V_2\big(\sin(q\,a_2)+\\ +V_1/q\sin(q\,a_1)\sin(q\,a_2-q\,a_1)\big)G_{(0)}(q,r,a_2)\Big],\end{gathered}\tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}f_{(0)}(q)=\frac{-\sin(q\,a_2)}{q^2\Delta_{(0)}(q)}\Bigg[\sum_{s=1}^{2}V_s\sin(q\,a_s)+\\ +V_1V_2/q\sin(q\,a_1)\sin(q\,a_2-qa_1)\Bigg],\end{gathered}\tag{3.4}$$

где

$$\Delta_{(0)}(q) = 1 + 1/q \prod_{s=1}^{2} V_s \exp(iqa_s)\sin(qa_s) + \\ + V_1V_2/q^2 \exp(iqa_2)\sin(qa_1)\sin(qa_2 - qa_1). \quad (3.5)$$

Формулы (3.1)–(3.5) совпадают с выражениями, полученными при решении уравнения Шрёдингера с соответствующими потенциалами.

Заключение

Таким образом, в данной работе найдены точные решения релятивистских двухчастичных интегральных уравнений в релятивистском конфигурационном представлении, описывающих *s*-состоянии рассеяния в случае δ-потенциала, локализованного на сфере конечного радиуса – «δ-сфере» и суперпозиции двух δ-потенциалов. На основании полученных решений вычислены парциальные амплитуды рассеяния, сечения рассеяния, *S*-матрицы и фазовые сдвиги. Численно и аналитически исследованы некоторые свойства полученных результатов, а именно: доказано условие двухчастичной унитарности для амплитуд рассеяния; установлено, что это условие для найденных амплитуд рассеяния является следствием тождества, которому удовлетворяют мнимые части релятивистских функций Грина; найдены условия обращения амплитуд рассеяния в ноль при конечных значениях быстроты. Нерелятивистский предел полученных результатов совпадает с соответствующими выражениями, полученными на основании решений уравнения Шрёдингера с δ-потенциалом и с суперпозицией двух δ-потенциалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Logunov*, *A.A*. Quasi-optical approach in quantum field theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.

2. *Kadyshevsky*, *V.G*. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148.

3. *Кадышевский*, *В.Г.* Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.

4. *Капшай*, *В.Н*. Разложение по матричным элементам УНП группы Лоренца и интегральные уравнения для релятивистских волновых функций / В.Н. Капшай, Т.А. Алфёрова // Ковариантные методы в теоретической физике: Сб. ст. – Ин-т физики НАН Беларуси. – Минск, 1997. – Вып. 4. – С. 88–95.

5. *Alferova*, *T.A*. Expansion in terms of matrix elements of the Lorentz group unitary irreducible representations and integral equations for scattering states relativistic wave functions / T.A. Alferova, V.N. Kapshai // Nonlinear phenomena in complex systems: Proced. of the Sixth Annual Seminar NPCS'97 / Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys. – Minsk, 1998. – P. 78–85.

6. *Демков*, *Ю.Н*. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике / Ю.Н. Демков, В.Н. Островский. – Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1975. – 240 с.

7. *Kapshai*, *V.N.* Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

8. *Kapshai*, *V.N*. One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two δ potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45. – P. 1–9.

9. *Тейлор*, *Дж*. Теория рассеяния / Дж. Тейлор. – М.: Мир, 1975. – 568 с.

Поступила в редакцию 15.05.15.