СФЕРИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Н.С. Тышкевич

Рассмотрим дифракцию плоской линейно поляризованной монохроматической волны на сфере радиуса a, находящейся в однородной изотропной среде. Среда, в которой находится сфера, является непроводящей и как среда, так и сфера немагнитны. Выделяем зависимость от времени в виде множителя $\exp(-i\omega t)$. В соответствии с граничными условиями на поверхности раздела тангенциальные составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ непрерывны на поверхности сферы. Кроме падающего поля $\vec{E}^{(i)}$ и $\vec{H}^{(i)}$ и поля внутри сферы $\vec{E}^{(\omega)}$, $\vec{H}^{(\omega)}$ имеется вторичное (рассеянное или дифрагированное) поле $\vec{E}^{(s)}$, $\vec{H}^{(s)}$ в среде, окружающей сферу. Поля $\vec{E}^{(s)}$, $\vec{H}^{(s)}$, и $\vec{E}^{(\omega)}$, $\vec{H}^{(\omega)}$ можно считать аналогичными соответственно отраженному и проходящему полям при падении на плоскую границу. Однако такая аналогия верна лишь при диаметре сферы, большом по сравнению с длиной волны. Найдем решение уравнений Максвелла, описывающих поле, возникающее при падении плоской монохроматической волны на сферическую поверхность, близ которой резко меняются свойства среды. Полное электрическое поле записываем в виде

$$\vec{E} = \vec{E}^{(i)} + \vec{E}^{(s)} \quad \text{вне сферы,}$$

$$\vec{E} = \vec{E}^{(\omega)} \quad \text{внутри сферы.}$$

Подобные выражения справедливы и для магнитного вектора. Решение с нулевым радиальным электрическим полем – это магнитная волна (или поперечная электрическая волна). Решение с нулевым радиальным магнитным полем – это электрическая волна (или поперечная магнитная волна). Каждую из этих волн можно получить из соответствующего скалярного потенциала ${}^{e}\Pi$

или $^{m}\Pi$, которые известны как потенциалы Дебая. Оба потенциала служат решениями дифференциального уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\left(r^e\Pi\right)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial^e\Pi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^{2\,e}\Pi}{\partial\varphi^2}+k^{2\,e}\Pi=0$$

и имеют следующий вид:

$$r^e\Pi^{(\omega)}=\frac{1}{\left(k^{(\mathrm{I})}\right)^2}\sum_{l=1}^{\infty}{}^{e}A_l\psi_l\left(k^{(\mathrm{I})}r\right)P_l^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi,$$

$$r^m\Pi^{(\omega)}=\frac{1}{k^{(\mathrm{II})}k_2^{(\mathrm{II})}}\sum_{l=1}^{\infty}{}^{m}A_l\psi_l\left(k^{(\mathrm{II})}r\right)P_l^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi.$$

Нетрудно затем найти соответствующие напряженности, например имеем

$$^{e}H_\varphi=k_1\frac{\partial^e\Pi}{\partial\theta}=\frac{k_1}{r}\frac{\partial\left(r^e\Pi\right)}{\partial\theta},\qquad {}^{e}H_r=0,$$

$$^{e}H_\theta=-\frac{k_1}{\sin\theta}\frac{\partial^e\Pi}{\partial\varphi}=-\frac{k_1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(r^e\Pi\right)}{\partial\varphi}.$$

Далее представляя полное поле вне и внутри сферы в виде суммы двух «подполей» (электрическая волна и магнитная волна) и используя граничные условия на поверхности сферы, находим алгебраическую систему четырех уравнений для коэффициентов $^{e}A_l$, $^{m}A_l$, $^{e}B_l$, $^{m}B_l$, решение которой нетрудно найти, например

$$^{e}B_l=i^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{\hat{n}\psi_l'(q)\psi_l(\hat{n}q)-\psi_l(q)\psi_l'(\hat{n}q)}{\hat{n}\zeta_l^{(1)\prime}(q)\psi_l(\hat{n}q)-\zeta_l^{(1)}(q)\psi_l'(\hat{n}q)},$$

$$^{m}B_l=i^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{\hat{n}\psi_l(q)\psi_l'(\hat{n}q)-\psi_l'(q)\psi_l(\hat{n}q)}{\hat{n}\zeta_l^{(1)}(q)\psi_l'(\hat{n}q)-\zeta_l^{(1)\prime}(q)\psi_l(\hat{n}q)}$$

Решение имеет большое практическое значение и его можно применить к самым разным задачам; помимо вопроса о цветах металлических суспензий, можно упомянуть такие приложения, как изучение атмосферной пыли, межзвездных частиц или коллоидов, теория радуги, солнечная корона, слияние облаков и туманов на пропускание света и т. д.