

УДК 535.42+537.86

## ОБОБЩЕННЫЕ ПУЧКИ БЕССЕЛЯ – ГАУССА НЕПРЕРЫВНОГО ПОРЯДКА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## GENERALIZED BESSEL – GAUSSIAN BEAMS OF CONTINUOUS ORDER

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Предложены новые решения параболического уравнения, описывающие обобщенные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка. Они характеризуются тремя свободными непрерывными параметрами и обладают спиральным волновым фронтом. Установлены ограничения на эти параметры, при которых исследуемые фракционные пучки переносят конечную мощность. Проведено графическое моделирование таких пучков.

**Ключевые слова:** фракционные пучки, пучки Бесселя – Гаусса, квадратичная интегрируемость.

The new solutions of the parabolic equation featuring the generalized Bessel – Gaussian beams of the continuous order are offered. They are characterized by three free continuous parameters and possess a spiral wave front. Restrictions on these parameters at which the explored fractional beams transfer terminating power are discovered. Graphic simulation of such beams is held.

**Keywords:** fractional beams, beams of Bessel – Gaussian, square integrability.

**Введение**

В последнее время наблюдается бум в поиске и исследовании новых типов световых пучков [1]–[5]. Большой интерес привлекают пучки Бесселя и пучки Бесселя – Гаусса (ПБГ) [6]–[10]. Как хорошо известно [6], пучки Бесселя обладают уникальным свойством бездифракционности. Вместе с тем, они переносят бесконечную мощность и не могут быть реализованы практически. Использование гауссовой аподизации функций Бесселя позволяет перейти к скалярным ПБГ [7], которые переносят конечную мощность и могут быть реализованы практически, хотя свойство бездифракционности, строго говоря, при этом нарушается. Свойства векторных ПБГ исследовались нами в [11], [12]. В данной работе вводится новый тип пучков (фракционные обобщенные ПБГ), найдены условия их физической реализуемости и обсуждаются их физические свойства.

**1 Новый тип ПБГ**

Будем исходить из 3D параболического уравнения [1]

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z) = 0, \quad (1.1)$$

описывающего скалярные параксиальные монохроматические световые пучки, распространяющиеся в направлении оси  $z$ . Перейдя к цилиндрической системе координат путем стандартной подстановки  $\{x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi\}$  получаем

$$\left( \frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) f = 0. \quad (1.2)$$

Разделяя переменные, находим частное решение

$$f_B(\rho, \varphi, z) = J_\nu(K\rho) \exp(i\nu\varphi) \exp\left(\frac{-iK^2 z}{2k}\right), \quad (1.3)$$

где параметры  $\nu$  и  $K$  – постоянные разделения переменных, а  $J_\nu$  – функции Бесселя I рода [13]. Поэтому выражение (1.3) описывает параксиальные пучки Бесселя. В случае классических пучков Бесселя  $K = k_\perp$ , где  $k_\perp$  – вещественная поперечная составляющая волнового вектора  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_\perp + \mathbf{k}_\parallel$  и, кроме того, порядок (индекс)  $\nu$  является целочисленным [1]. С физической точки зрения пучок Бесселя представляет суперпозицию плоских монохроматических волн, волновые векторы каждой из которых расположены по круговому конусу вокруг оси  $z$ .

Пучки Бесселя обладают бесконечной энергией. Чтобы найти соответствующие решения для ПБГ с конечной энергией, надо выполнить гауссову аподизацию выражения (1.3). С этой целью проще всего к параксиальному уравнению (1.3) применить преобразование Аппеля [14], которое мы представим в форме

$$f(\mathbf{r}, z) \rightarrow G \cdot f\left(\frac{r}{\beta q}, -\frac{1}{\beta^2 q}\right). \quad (1.4)$$

Здесь гауссиан  $G = \frac{1}{q} \exp\left(\frac{i\rho^2}{2q}\right)$ , комплексный параметр пучка  $q = z - q_0$ . Размерный коэффициент  $\beta$  можно взять в виде  $\beta = i/z_0$ . Величины  $w_0$  и  $z_0 = kw_0^2/2$  – характерные размеры пучка

вдоль осей  $OX$  и  $OZ$  соответственно. Теперь получаем

$$f_{BG} = \frac{1}{q} \left[ i \left( \frac{k}{2q} \left( \rho^2 - \left( \frac{Kz_0}{k} \right)^2 \right) + \nu\varphi \right) \right] \times \times J_\nu \left( \frac{-iK\rho z_0}{q} \right). \quad (1.5)$$

Последнее выражение позволяет также интерпретировать исследуемые ПБГ, как децентрированные пучки.

Фракционные ПБГ зависят от трех переменных  $(\rho, \varphi, z)$  и пяти параметров  $(k, K, z_0, q_0, \nu)$ . Число независимых свободных параметров можно уменьшить, если перейти к безразмерным величинам соотношениями:  $R = \rho/w_0$ ,  $Z = z/z_0$ ,  $K_\perp$ . Введем также безразмерный параметр пучка  $Q = q/z_0 \equiv Z - Q_0$ . Теперь число независимых параметров уменьшилось до трех:

$$f_{BG} = \frac{1}{Q} \exp \left[ \frac{i}{Q} \left( R^2 - \frac{K_\perp^2}{4} \right) + i\nu\varphi \right] J_\nu \left( \frac{-iK_\perp R}{Q} \right). \quad (1.6)$$

## 2 Условия физической реализуемости новых фракционных ПБГ

Пучок будем считать физически реализуемым, если его комплексная амплитуда является конечной во всем пространстве, а переносимая им мощность через любое сечение, перпендикулярное оси пучка, также является конечной. Эти требования сводятся к непрерывности и квадратичной интегрируемости комплексной амплитуды пучка. Так как при  $\rho \rightarrow \infty$

$$\lim J_\nu(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos \left( \rho - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

[13], то отсюда можно получить, что необходимые условия квадратичной интегрируемости спиральных ПБГ –  $Q_0'' > 0$ . Кроме того, функция Бесселя имеет особенность при  $R \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что индекс  $\nu$  должен быть неотрицательным.

Поскольку индекс  $\nu$  может принимать непрерывные значения, то фаза при полном обороте вокруг оси пучка также является непрерывной и не обязана быть равной  $2\pi$ . Пучки, обладающие таким свойством, называются фракционными [2]–[5], [15]. Поэтому обсуждаемые нами ПБГ являются также фракционными и имеют спиральный волновой фронт. Следуя терминологии, применяющейся Абрамочкиным и Волосниковым [16], пучки со спиральным волновым фронтом можно называть также спиральными.

Итак, общие условия физической реализуемости фракционных ПБГ (6):

$$Q_0'' > 0 \text{ и } \nu \geq 0. \quad (2.1)$$

При этом на параметр  $K_\perp$  не накладываются никакие ограничения и он может быть произвольным комплексным числом.

## 3 Обсуждение результатов

В классических пучках ПБГ [7], [1], как и в пучках Бесселя, свободный параметр  $K_\perp$  является вещественным. При комплексном параметре  $K_\perp$  и целочисленных значениях  $\nu$  получаем обобщенные ПБГ, введенные в работах [8]–[10]. Обобщенные ПБГ можно интерпретировать [10] как суперпозицию пучков Гаусса, центральные волновые векторы которых расположены по круговому конусу вокруг оси  $OZ$  с углом раствора  $\theta$ , а оси перетяжек парциальных волн размещены в плоскости  $z = 0$  по окружности.

Основными результатами настоящей работы являются выражения (1.6) и (2.1). Непрерывный порядок  $\nu$  дает основание полученные пучки (1.6) трактовать как фракционные обобщенные ПБГ, которые обладают спиральным волновым фронтом. В частных случаях, когда неотрицательный индекс (порядок)  $\nu$  фракционных обобщенных ПБГ (1.6) становится целым числом, наши выражения (1.6) эквивалентны выражениям для обобщенных ПБГ, введенных в работах [8], [9]. Однако наши более общие формулы (1.5) и (1.6) имеют в то же время более простую форму, чем соответствующие формулы в [8]–[10].

Попутно отметим, что после получения важных результатов в физике, как правило, всегда находятся забытые предшественники. Так, пучки Бесселя привлекли всеобщий интерес как бездифракционные, после работ Дурнина [6] в 1987 году. Однако решения уравнения Гельмгольца в виде волновых полей Бесселя были получены математиками гораздо раньше, см., напр., [17]. Аналогично, ПБГ нулевого порядка фактически были получены [18] Шеппардом еще в 1978 году, до работы [7].

В давней работе Валдрона [19] использовалась неортогональная спиральная (цилиндрическая вращающаяся) система координат. Для уравнения Гельмгольца получено решение в виде спиральных волновых полей Бесселя. В отличие от обычных световых полей Бесселя индекс (порядок)  $\nu$  таких полей не обязан быть целым числом, а может пробегать непрерывный спектр значений:  $\nu \geq 0$ . Согласно интерпретации Оверфельт [20] в таких случаях непрерывный индекс  $\nu$  связан не только с угловой фазой, но также является функцией шага спирали волнового фронта и продольной фазовой скорости волны Бесселя.

В работах [2], [3] вводятся новые пучковые решения фракционного порядка для пучков Эрмита – Гаусса и Лагерра – Гаусса. Фракционные ПБГ рассматривались недавно также в [4], однако обсуждаемые нами ПБГ непрерывного порядка  $\nu$  принадлежат другому типу и отличаются от пучков в [4].

Произведем численные оценки. Возьмем радиус гауссова пучка в перетяжке  $w_0 \approx 10^{-3}$  м,

длину волны  $\lambda \approx 6,33 \cdot 10^{-7}$  м, угол раствора конуса  $\theta \approx 10^{-3}$ ,  $Q_0'' = 1$ . Тогда конфокальный параметр  $z_0 = \pi w_0^2 / 2 \approx 5$  м; расхожимость парциальных гауссовых пучков, образующих ПБГ,  $\theta_G = \lambda / (\pi w_0) \approx 1.1 \cdot 10^{-2}$ .

Согласно Гори и др. [7], поведение стандартного ПБГ определено двумя конкурирующими влияниями: угловой апертурой конуса и угловым расширением отдельных гауссовых пучков. Картина интенсивности в поперечном сечении пучка зависит от отношения  $\theta / \theta_G = K_{\perp} / 2$ .

1. При  $K_{\perp} < 2$  картина БГП практически не отличается от картины гауссового пучка.
2. При  $K_{\perp} > 2$  и при малых расстояниях  $Z < 0.2$  ПБГ ведет себя подобно пучку Бесселя. При  $Z \gg 0.2$  вклад функции Бесселя превалирует над вкладом функции Гаусса и картина интенсивности превращается в светлое кольцо.

При комплексных  $K_{\perp}$  и нецелых  $\nu$  картины интенсивности существенно усложняются. Проведем численное моделирование интенсивности обобщенных ПБГ в зависимости от значений его продольной координаты  $Z$  при различных значениях нецелого порядка  $\nu$  и комплексного параметра  $K_{\perp}$ . Будем полагать во всех случаях  $Q_0'' = 1$ , что соответствует обычной нормировке  $q_0'' = z_0$ . На рисунках 3.1–3.3 полагаем  $K_{\perp}' = 15$ , что соответствует преобладанию вклада функции Бесселя над вкладом функции Гаусса. При  $\nu \neq 0$  имеем полый пучок.

На рисунке 3.1 видно, что ПБГ с нецелым порядком ведет себя качественно, как стандартный ПГ. С увеличением расстояния  $Z$  центральные кольца постепенно уменьшаются и при  $Z > 0.2$  исчезают. Взамен на периферии появляется светлое кольцо. Из-за расплывания пучка его интенсивность постепенно уменьшается.

На рисунке 3.2 показано влияние мнимой части параметра  $K_{\perp}$ . Значение параметра  $K_{\perp}'' < 0$  приводит к возникновению значительного периферийного светлого кольца. Оно присутствует всегда, с увеличением  $Z$  постепенно расширяется и доминирует.

Наиболее интересные случаи иллюстрированы на рисунках 3.3 и 3.4, когда  $K_{\perp}'' > 0$ . Картина интенсивности качественно видоизменяется. С увеличением расстояния  $Z$  центральные кольца сначала растут, и только потом постепенно уменьшаются. Это новое явление можно интерпретировать, как самофокусировку пучка. При  $Z < 0$  – картина аналогичная. Таким образом, если  $K_{\perp}'' > 0$ , то пучок самофокусируется при двух значениях  $Z$ . Это новое любопытное свойство самофокусировки пучков в линейной среде, насколько нам известно, не было описано ранее в литературе.

Итак, анализ и графическое моделирование показывают, что картины интенсивности в поперечных сечениях фракционных обобщенных со спиральным волновым фронтом ПБГ (1.6) представляют собой множества колец разной интенсивности и ширины. Всегда, за счет гауссиана, с увеличением  $Z$  ПБГ, в конечном счете, расплывается.

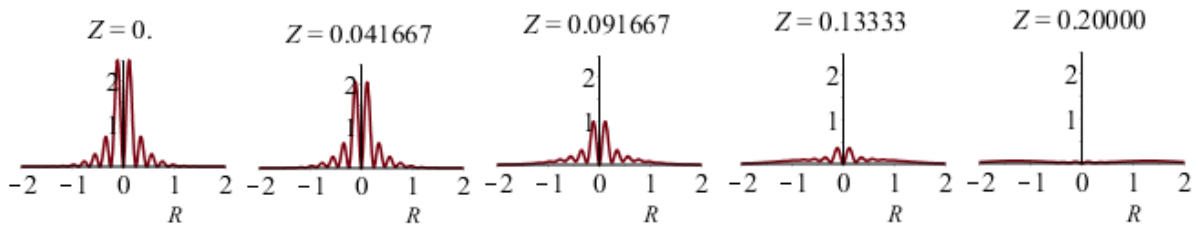


Рисунок 1 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка с  $K_{\perp}' = 15$ ,  $\nu = 0.9$  при различных значениях  $Z$

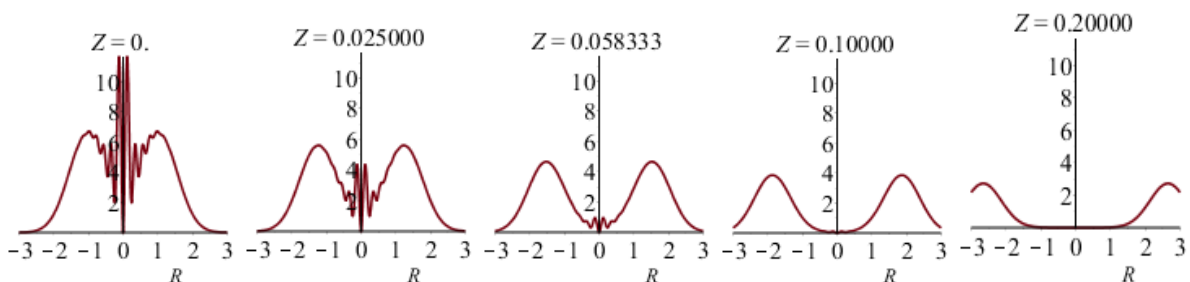


Рисунок 2 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка с  $K_{\perp}' = 15 - 2.5i$ ,  $\nu = 0.9$  при различных значениях  $Z$

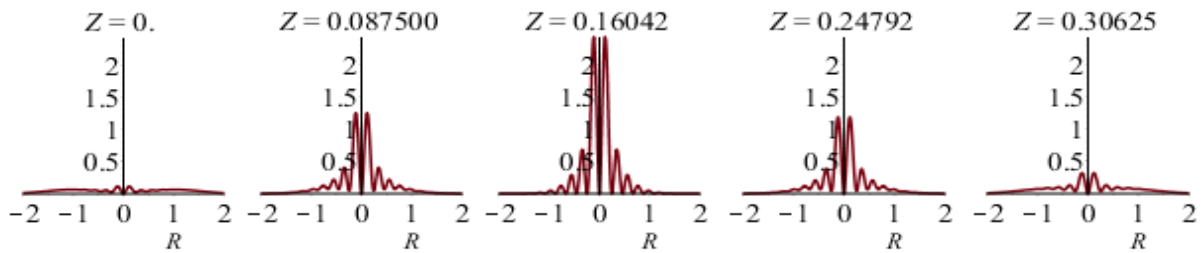


Рисунок 3 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка с  $K_{\perp} = 15 + 2.5i$ ,  $\nu = 0.9$  при различных значениях  $Z$

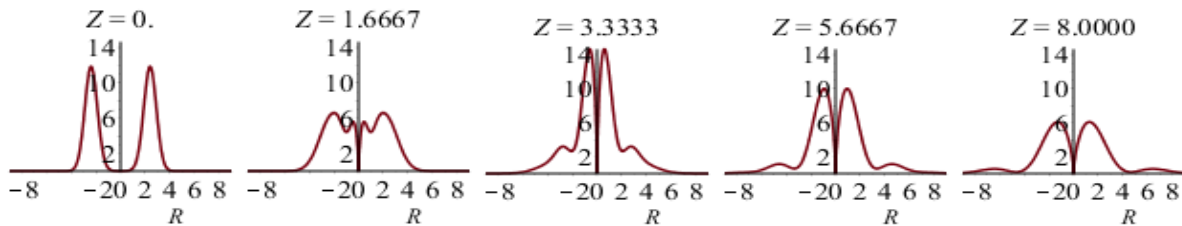


Рисунок 4 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка с  $K_{\perp} = 5i$ ,  $\nu = 0.3$  при различных значениях  $Z$

При этом, в отличие от стандартных ПБГ и обычных пучков Лагерра – Гаусса, при увеличении расстояния  $R$  от оси пучка интенсивности и радиусы колец могут изменяться нерегулярным образом.

#### Заключение

Выведены выражения, описывающие новый тип пучков – фракционные обобщенные ПБГ непрерывного порядка, обладающие спиральным волновым фронтом. Они характеризуются тремя свободными параметрами: двумя вещественными непрерывными  $\nu$ ,  $Q_0''$  и комплексным параметром  $K_{\perp}$ . Частными случаями введенных здесь пучков являются известные обобщенные ПБГ с дискретными целочисленными индексами  $\nu$ , а также фракционные пучки Бесселя со спиральным волновым фронтом.

Найдены условия физической реализуемости новых типов пучков во всем пространстве:  $Q_0'' > 0$  и  $\nu \geq 0$ . Одновременный переход от дискретных значений  $\nu$  к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям  $K_{\perp}$  сильно расширяет класс известных в настоящее время ПБГ. Варьирование новых свободных параметров таких пучков, несомненно, расширяет и предоставляет новые дополнительные возможности создания и исследования пучков с заданными свойствами для последующих практических применений.

Проведено графическое моделирование таких пучков. Установлено, что если  $K_{\perp}'' > 0$ , то, с увеличением расстояния  $Z$  центральные кольца сначала растут, и только потом постепенно

уменьшаются. Это новое явление можно интерпретировать, как самофокусировку пучка. Пучок самофокусируется при двух значениях расстояния  $Z$ :  $Z > 0$  и  $Z < 0$ .

Для экспериментального получения спиральных обобщенных ПБГ могут, в принципе, быть использованы после модернизации некоторые методики получения стандартных ПБГ и фракционных пучков. Так, в работах Тао и др. рассматривались возможности экспериментального получения и изучения фракционных пучков Бесселя (см., например, [5]).

В настоящем сообщении обсуждались скалярные фракционные обобщенные ПБГ. Несложно перейти к соответствующим векторным пучкам с произвольной поляризацией, используя, например, формализм, предложенный нами в [21], [22].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев, А.П. Локализованные световые волны: парааксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102, № 4. – С. 661–681.
2. Gutierrez-Vega, J.C. Fractionalization of optical beams: I. Planar Analysis / Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 11. – P. 1521–1523.
3. Gutierrez-Vega, J.C. Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre-Gaussian modes / Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, № 10. – P. 6300–6313.
4. Gutierrez-Vega, J.C. Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence / Julio C. Gutierrez-Vega,

- C. Lopez – Mariscal // J. Opt. A. Pure Appl. Opt. – 2008. – 10015009 (8pp).
5. Tao, S.H. Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams / Shao Hua Tao, Woei Ming Lee, and Xiaocong Yuan // Applied Optics. – 2004. – Vol. 43, № 1. – P. 122–126.
6. Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // JOSA A. – 1987. – Vol. 4, № 4. – P. 651–654.
7. Gori, F. Bessel–Gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Optics Communications. – 1987. – Vol. 64, № 6. – P. 491–495.
8. Generalized Bessel – Gauss beams / V. Bagini [et al.] // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43, № 6. – P. 1155–1166.
9. Imaging of generalized Bessel – Gauss beams / C. Palma [et al.] // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43, № 11. – P. 2269–2277.
10. Santarsiero, M. Propagation of general Bessel-Gauss beams through ABCD optical systems / M. Santarsiero // Optics Communications. – 1996. – Vol. 132. – P. 1–7.
11. Гиргель, С.С. Поляризационные свойства бessel-гауссовых пучков света. Проблемы взаимодействия излучения с веществом / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 6 (9). – С. 150–154.
12. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных бessel-гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39), Ч. 1. – С. 49–52.
13. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. II / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1974. – 295 с.
14. Миллер, У. Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. – М.: Мир, 1981. – 342 с.
15. Berry, M.V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // Journal of Optics. – 2003, № 6. – P. 259–268.
16. Абрамочкин, Е.Г. Спиральные пучки света / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волосников // УФН. – 2004. – Т. 174, № 12. – С. 1273–1300.
17. Стрэттон, Дж.А. Теория электромагнетизма / Дж.А. Стрэттон. – М.: ОГИЗ. ГИТТЛ, 1948. – 539 с.
18. Sheppard, C.J.R. Gaussian-beam theory of lenses with annular aperture / C.J.R. Sheppard, T. Wilson // IEEE J. Microwaves, Optics and Acoustics. – 1978. – Vol. 2. – P. 105–112.
19. Waldron, R.A. A helical coordinate system and its applications in electromagnetic theory / R.A. Waldron // Quart. Journ. Mech. and Applied Math. – 1958. – Vol. XI, Pt. 4. – P. 438–461.
20. Overfelt, P.L. Scalar optical beams with helical symmetry / P.L. Overfelt // Phys. Rev. A. – 1992. – Vol. 46, № 6. – P. 3516–3522.
21. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 11–14.
22. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.

Поступила в редакцию 24.09.15.