ПРОСТАЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА НА МИНИМАКС: МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ, ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Д.С. Кузьменков

Большое значение для теории и методов оптимизации имеют кусочно-линейные задачи, целевые функции которых образуются из набора линейных функций при помощи операций взятия максимума, модуля и их сочетания. Такие задачи, с одной стороны, часто встречаются как самостоятельные при моделировании прикладных задач, с другой – используются в качестве простейших аппроксимаций при исследовании нелинейных задач. Кусочно-линейные задачи являются хорошими объектами для выяснения особенностей теории и методов решения общих негладких задач.

Раньше подобные задачи решались сведением кусочно-линейной задачи к линейной с помощью введения дополнительных ограничений. При таком подходе, что вполне естественно, увеличивался размер решаемой задачи. При достаточно больших размерах исходной задачи решать полученную задачу ещё более высокого порядка было затруднительно. Поэтому и были разработаны прямой, двойственный и адаптивный методы решения простой кусочно-линейной задачи на минимакс.

Простой кусочно-линейной задачей на минимакс назовем задачу:

$$f(x) = \max_{k \in K}(c'_k x + \alpha_k) \to \min, \; d_* \le x \le d^* \qquad (1)$$

где $x = x(J); c_k = c_k(J); d_*; d^*$ – n-векторы; α_k – скаляр, $J = \{1,2,...,n\}$, $K = \{1,2,...,k\}$. Задача (1) имеет решение при $\|d_*\| < \infty, \|d^*\| < \infty$.

Такие задачи возникают в теории некорректных задач, встречаются при нахождении грубого решения задач оптимального управления минимальной интенсивности или на первом этапе построения точных решений этих задач, используются при решении задачи сглаживания производственного процесса.

Автором были обоснованы прямой, двойственный опорный и адаптивный методы решения простой кусочно-линейной задачи на минимакс. Для этого предварительно введены понятия опоры целевой функции, правильной опоры, опорных плана и коплана, получены формулы приращения прямой и двойственной целевых функций, доказаны достаточные условия субоптимальности, критерии оптимальности в прямой и двойственной задачах.

Разработаны алгоритмы и созданы программы, реализующие прямой, двойственный и адаптивный методы решения простой кусочно-линейной задачи на минимакс. Программы, реализованные в среде Delphi в виде многооконного приложения, позволяют считывать и записывать в файл все исходные данные. Реализован удобный вывод результатов: отображение оптимального плана, невязок, оценок, опор целевой функции по двум множествам индексов, количества итераций и оптимального значения целевой функции. Все часто встречающиеся математические операции (нахождение обратной матрицы, транспонирования матриц, решения СЛАУ, вычисления произведения матриц и т.д.) реализованы в программе в виде отдельных функций. В программах предусмотрена выдача сообщений о несовместности ограничений прямой задачи и отсутствии у неё планов. Обработаны также все некорректные случаи ввода исходных данных (забыли ввести какую-либо компоненту вектора или скаляра, ввод букв и других ненужных символов запрещён). Имеется также возможность автозаполнения исходных данных, т.е. для заданных размерностей с помощью генератора случайных чисел или по специальному алгоритму заполняются исходные вектора и матрица. Это, например, необходимо при тестировании программы с использованием больших размерностей векторов и матрицы, а также для облегчения ввода матриц и векторов имеющих повторяющиеся блоки. Память в программах выделяется динамически.

Оценим быстроту работы методов и их точность.

Таблица 1 – Сравнение методов для тестового примера 10×16

Метод	Значение целевой функции	Δ	Количество итераций
Прямой	-128,600000000008076	$8\cdot10^{-13}$	28
Двойственный	-128,600000000019636	$2\cdot10^{-12}$	9
Адаптивный	-128,6	0	3

Для вычислений использовался тип *double*. При решении примеров более высоких порядков адаптивный метод оказался также более точным и более быстрым не только по количеству итераций, но и по времени выполнения (в миллисекундах).

1. Габасов Р., Кирилова Ф.М., Костюкова О.И., Ракецкий В.М. Конструктивные методы оптимизации. Часть 4. – Мн.: Издательство Университетское, 1987.

2. Габасов Р., Кирилова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Часть 1. – Мн.: Издательство Университетское, 1984.

3. Габасов Р., Кирилова Ф.М. Методы линейного программирования. Часть 1-3. – Минск: Издательство БГУ, 1977, 1978, 1980.

4. Конструктивная теория экстремальных задач / Под ред. Р. Габасова, Ф.М. Кириловой. – Мн.: Издательство Университетское, 1984