УДК 621.373 : 535+535.2

ФОРМА ИМПУЛЬСА ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ СВЕРХКОРОТКИМИ ИМПУЛЬСАМИ СВЕТА

Г. В. Кривощеков, Н. Г. Никулин и Р. И. Соколовский

Изучается форма импульса второй гармоники в зависимости от формы сверхкороткого импульса накачки. Ограничиваясь первым приближением теории дисперсии, проанализировано влияние расстройки групповых скоростей взаимодействующих волн. Предложены различные аппроксимационные формулы, определяющие форму импульса второй гармоники.

Интерес к исследованию возбуждения второй гармоники в нелинейных кристаллах импульсно-модулированными волнами света [1-5] связан с появлением новых явлений, обусловленным групповым запаздыванием взаимодействующих волн.

В настоящей работе изучается зависимость формы импульса второй гармоники от формы импульса накачки. Теоретическое рассмотрение этого вопроса наталкивается на серьезные трудности, связанные с тем, что дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами имеют решения в известных функциях лишь в исключительных случаях.

Характерным параметром задачи является отношение l_k/l_γ, где l_k — так называемая квазистатическая длина, а l_γ — длина нелинейного взаимодействия [1-3]. При $l_k \gg l_\gamma$ характер изменения комплексных амплитуд с координатой остается таким же, как и для монохроматических волн [1-3], и поэтому этот случай мало интересен. В другом предельном случае $l_k \ll l_\gamma$ можно ожидать [5] [см. (3)], что форма импульса гармоники практически не будет зависеть от формы импульса накачки. При сравнимых l_k и l_γ необходимы аппроксимационные методы, приближенно описывающие форму импульса гармоники. Один из таких методов предложен в настоящей работе. Критерием его применимости является сравнение с точным решением, найденным в работе [3] для импульса накачки лоренцевой формы.

Метод ВКБ

Представим поле в кристалле в виде суммы двух волн с частотами ω и 2ω соответственно

$$\mathbf{E}(t,\ \mathbf{r}) = \mathbf{e}_1\bar{A}_1(t,\ \mathbf{r})\, e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1\mathbf{r})} + \mathbf{e}_2\bar{A}_2(t,\ \mathbf{r})\, e^{i(2\omega t - \mathbf{k}_2\mathbf{r})}. \tag{1}$$

Будем считать, что нелинейная среда занимает пространство $z > 0$ и ось z направлена в среду. Для медленных амплитуд $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ справедливы следующие уравнения [2]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\bar{A}_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1}\frac{\partial\bar{A}_1}{\partial t} &= -i\gamma_1\bar{A}_2\bar{A}_1^* e^{i\Delta kz}, \\ \frac{\partial\bar{A}_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2}\frac{\partial\bar{A}_2}{\partial t} &= -i\gamma_2\bar{A}_1^2 e^{-i\Delta kz}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где u_1, u_2 — групповые скорости волн, $\Delta k = 2k_{1z} - k_{2z}$ — расстройка волновых векторов, $\gamma_{1,2}$ — нелинейные константы. Перейдем в уравнениях (2) от комплексных амплитуд $\bar{A}_{1,2}$ к действительным $A_{1,2}$, положив

$$\bar{A}_{1,2} = A_{1,2} \exp\{i\varphi_{1,2}(z)\}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), можно убедиться, что система уравнений (2) оказывается эквивалентной следующей системе уравнений для действительных функций:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1}\frac{\partial A_1}{\partial t} + \gamma_1 A_1 A_2 \sin\Phi = 0, \tag{4а}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2}\frac{\partial A_2}{\partial t} - \gamma_2 A_1^2 \sin\Phi = 0, \tag{4б}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Delta k + \left(2\gamma_1 A_2 - \gamma_2 \frac{A_1^2}{A_2}\right)\cos\Phi = 0, \tag{4в}$$

где $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta k z$. Предположим выполненным условие синхронизма ($\Delta k = 0$). В этом случае уравнение (4в) имеет стационарное решение $\Phi \equiv \pi/2$, и остаются два уравнения (4а), (4б), причем $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ в силу свойств симметрии тензора нелинейной поляризации [1]. Систему уравнений (4а), (4б) ($\Phi \equiv \pi/2$) следует дополнить приближенными граничными условиями [1]

$$A_1|_{z=0} = A_{10}(t), \quad A_2|_{z=0} = 0. \tag{5}$$

Уравнения (4а), (4б) оказываются эквивалентными одному нелинейному уравнению [3]. Чтобы найти последнее, нужно продифференцировать (4б) по z и по t, а затем с помощью (4а) исключить производные от A_1 по z и t. Из получившегося уравнения A_1 исключается с помощью (4б). Таким образом, приходим к уравнению для одной только амплитуды A_2. Воспользовавшись граничными условиями (5), его можно представить в виде

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_1}\frac{\partial A_2}{\partial t} + \gamma A_2^2 = \gamma A_{10}^2\left(t - \frac{z}{u_2}\right). \tag{6}$$

Если теперь провести замену переменных

$$z \to z, \quad t \to \eta = t - \frac{z}{u_1}, \tag{7}$$

то (6) можно представить в виде (3)

$$\frac{dA_2}{dz} + \gamma A_2^2 = \gamma A_{10}^2(\eta - \nu z), \tag{8}$$

где $\nu = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}$ характеризует расстройку групповых скоростей импульсов накачки и второй гармоники.

Удобно перейти к безразмерным функциям и аргументам, полагая

$$A_{10} = A_0 \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad A_2 = A_0 f(\bar{z}), \quad \bar{z} = \frac{z}{l_k}, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(\xi)\, d\xi = 1, \tag{9}$$

$l_k = \tau/\nu$ — квазистатическая длина. Функция $f(\bar{z})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{df(\bar{z})}{d\bar{z}} + \frac{l_k}{l_\gamma} f^2(\bar{z}) = \frac{l_k}{l_\gamma}\varphi^2(\xi - \bar{z}), \tag{10}$$

где $l_\gamma = (\gamma A_0)^{-1}$ — длина нелинейного взаимодействия, $\xi = \eta/\tau$. Введем функцию $F(\bar{z})$ такую, что

$$f(\bar{z}) = \frac{l_\gamma}{l_k}\frac{1}{F(\bar{z})}\frac{dF(\bar{z})}{d\bar{z}}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), найдем, что

$$\frac{d^2F(\tilde z)}{d\tilde z^2}-\left(\frac{l_k}{l_\gamma}\right)^2\varphi^2(\xi-\tilde z)\,F(\tilde z)=0. \tag{12}$$

Асимптотическое решение этого уравнения ($l_k/l_\gamma \gg 1$) может быть найдено методом ВКБ [6, 7] и является линейной комбинацией функций

$$F_{\mp}(\tilde z)=\frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi-\tilde z)}}\exp\left\{\mp\frac{l_k}{l_\gamma}\int\limits_0^{\tilde z}\varphi(\xi-z')\,dz'\right\}. \tag{13}$$

Соответствующие коэффициенты выбираются так, чтобы удовлетворить граничным условиям (5). Таким образом, приходим к формуле

$$f(\tilde z)=\left[\varphi(\xi-\tilde z)-\frac{l_\gamma}{l_k}\frac{\varphi'(\xi-\tilde z)}{2\varphi(\xi-\tilde z)}\right]\frac{\alpha(\tilde z)-\alpha(0)\exp\left\{-\dfrac{2l_k}{l_\gamma}\displaystyle\int\limits_0^{\tilde z}\varphi(\xi-z')\,dz'\right\}}{1+\alpha(0)\exp\left\{-\dfrac{2l_k}{l_\gamma}\displaystyle\int\limits_0^{\tilde z}\varphi(\xi-z')\,dz'\right\}}, \tag{14}$$

где

$$\alpha(\tilde z)=\frac{\varphi(\xi-\tilde z)+\dfrac{l_\gamma}{l_k}\dfrac{\varphi'(\xi-\tilde z)}{2\varphi(\xi-\tilde z)}}{\varphi(\xi-\tilde z)-\dfrac{l_\gamma}{l_k}\dfrac{\varphi'(\xi-\tilde z)}{2\varphi(\xi-\tilde z)}}. \tag{15}$$

Формула (14) тем точнее, чем меньше отношение l_γ/l_k.

При сравнимых l_γ и l_k характер приближения (14) может быть установлен путем сравнения с точным решением [3] для лоренцева импульса накачки (рис. 1). Из приведенных графиков, первый из которых построен по формуле (14), а второй по соответствующей формуле из работы [3], видно, что согласие точного и приближенного решения даже при $l_\gamma=l_k$ удивительно хорошее.

Форма импульса второй гармоники при $l_k \ll l_\gamma$

Обратимся к анализу того предельного случая, когда $l_k \ll l_\gamma$. Рассмотрим сначала решение уравнения (10) в приближении заданного поля. Соответствующее приближенное решение аппроксимирует точное на расстояниях $z \ll l_\gamma$. Пренебрежем в уравнении (10) членом $\frac{l_k}{l_\gamma}f^2$, как членом более высокого порядка малости по отношению к оставшимся. Таким образом, мы придем к уравнению, решение которого находится без труда,

$$f(\tilde z,\ \xi)=\frac{l_k}{l_\gamma}\int\limits_0^{\tilde z}\varphi^2(\xi-z')\,dz'. \tag{16}$$

Формулу (16) можно рассматривать как свертку импульса $\varphi^2(\xi)$ с щелевой аппаратной функцией $\zeta(z)=\Theta(z')\,\Theta(\tilde z-z')$, где $\Theta(z)$ — функция, равная единице при $z \geqslant 0$ и нулю при $z<0$. При $\tilde z \ll 1$ форма импульса второй гармоники является точным квадратом импульса накачки, а величина его пропорциональна $\tilde z$, т. е. ширине щели. В другом предельном случае $\tilde z \gg 1$ ширина импульса второй гармоники приблизительно равна $\tau\tilde z$, т. е. определяется шириной аппаратной функции. Форма импульса близка к прямоугольнику [5]. Для иллюстрации сказанного вычислим по формуле (16) контур импульса второй гармоники для следующего импульса накачки:

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(1+\xi^2)^{-1/2}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16), найдем, что

$$f(\tilde{z},\ \xi)=\frac{l_k}{l_\gamma}\frac{1}{\pi}\{\operatorname{arc\,tg}\xi-\operatorname{arc\,tg}(\xi-\tilde{z})\} \tag{18}$$

в полном согласии с высказанными выше качественными соображениями.

Вернемся теперь к точному уравнению (10) и проанализируем его решение при $\tilde{z}\gg 1$. Заменой переменной $\tilde{z}=\frac{l_\gamma}{l_k}x$ уравнение (10) можно привести к виду

$$\frac{df}{dx}+f^2=\varphi^2\left(\xi-\frac{l_\gamma}{l_k}x\right). \tag{19}$$

Функция в правой части уравнения (19) отлична от нуля в интервале $\left[x_0-\frac{l_k}{l_\gamma},\ x_0+\frac{l_k}{l_\gamma}\right]$, где $x_0=\frac{l_k}{l_\gamma}\xi$, и интеграл от нее равен l_k/l_γ. При доста-

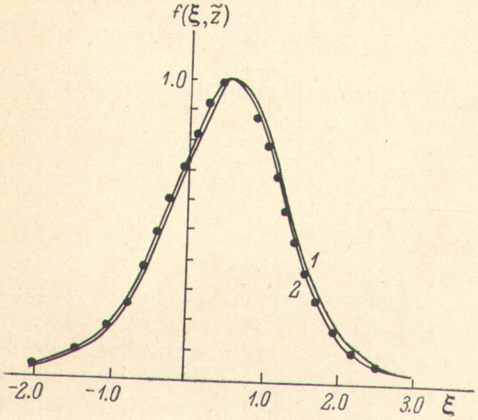

Рис. 1. Графики функции $f(\xi,\tilde{z})$, нормированные на единицу ($l_k/l_\gamma=1,\ \tilde{z}=1$).

1 — кривая, построенная по формуле (14); 2 — кривая, взятая из работы [3].

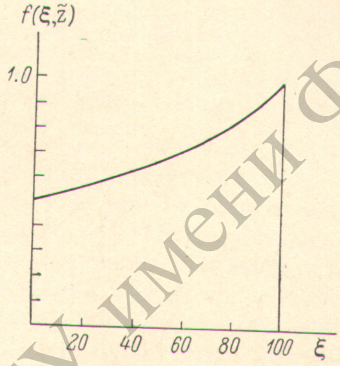

Рис. 2. График функции $f(\xi,\tilde{z})$, построенной по формуле (21) при $l_k/l_\gamma=0.1$, $\tilde{z}=100$.

точно малом отношении l_k/l_γ функцию φ^2 можно считать пропорциональной $\delta(x-x_0)$-функции и тем самым приближенно представить уравнение (19)

$$\frac{df}{dx}+f^2=\frac{l_k}{l_\gamma}\delta(x-x_0). \tag{20}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$\frac{1}{x-x_0+\frac{l_\gamma}{l_k}}\{\Theta(x_0)-\Theta(x_0-x)\}\ (x_0>0)$$

удовлетворяет уравнению (20), а следовательно,

$$f(\tilde{z},\ \xi)\simeq\frac{l_k}{l_\gamma}[\Theta(\xi)-\Theta(\xi-\tilde{z})]\frac{1}{1+\left(\frac{l_k}{l_\gamma}\right)^2(\tilde{z}-\xi)}. \tag{21}$$

Графики этой функции изображены на рис. 2. Сопоставляя (21) с (18), видим, что резкие изломы в точках $\xi=0$ и $\xi=\tilde{z}$ связаны с δ-аппроксимацией импульса накачки и должны быть заменены плавными кривыми в единичной окрестности этих точек.

Заключение

Рассмотрены особенности процесса возбуждения второй гармоники импульсно-модулированными волнами в нелинейном кристалле. Из проведенного исследования видно, что с ростом параметра l_γ/l_k импульс второй гармоники деформируется так, что в пределе $l_\gamma / l_k \rightarrow \infty$ при достаточно большой длине кристалла ($l \gg l_k$) он практически не зависит от формы породившего его импульса накачки. При этом длительность импульса второй гармоники может на один-два порядка превосходить длительность импульса накачки. Последнее явление может быть использовано при измерении длительности импульсов короче и порядка 10^{-13} сек.

Литература

[1] Н. Бломберген. Нелинейная оптика. Изд. «Мир», М., 1966.
[2] С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов. Проблемы нелинейной оптики. Изд. АН СССР, М., 1964.
[3] С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин. ЖЭТФ, *55*, 1430, 1968.
[4] W. H. Glenn. IEEE, *QE-5*, 284, 1969.
[5] J. Comply, E. Garmire. Appl. Phys. Lett., *12*, 7, 1968.
[6] Л. Бриллюэн, М. Пароди. Распространение волн в периодических структурах. ИЛ, М., 1959.
[7] Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. Изд. АН СССР, М., 1957.

Поступило в Редакцию 22 октября 1970 г.