

ПОТЕНЦИАЛ ГРАВИТИРУЮЩЕГО КОЛЬЦА

Введение

В Солнечной системе некоторые планеты окружены кольцами. Они состоят из космической пыли и льда, вращающегося вокруг планеты. Долгое время Сатурн считался единственной планетой, окружённой кольцами. Одним из первых, предположивших наличие у Сатурна «придатка», был Галилей. Это было в 1610 году, а в 1655 году Христиан Гюйгенс впервые описал этот «придаток» как кольцо, окружающее Сатурн. В 1977 году были обнаружены кольца у Урана, в 1979 году тонкие кольца были зафиксированы вокруг Юпитера космическим аппаратом «Вояджер-1». А в 1989 году приборы космическим аппаратом «Вояджер-2» диагностировали наличие кольца вокруг Нептуна. В 2014 году были открыты кольца вокруг астероида Харикло – самого большого астероида в области между Главным поясом и поясом Койпера. В январе 2017 года обнаружили кольца у Хаумеи – четвёртой по величине карликовой планеты Солнечной системы. Природа происхождения колец до сих пор не ясна. Наиболее популярными гипотезами образования колец вокруг Сатурна и других планет является две. По первой кольца сформировались из остатков околопланетного облака вещества, которые из-за непостоянства притяжения Сатурна не смогли, как у других планет, стать полноценным спутником. По второй кольца появились в результате разрушения крупного спутника из-за столкновения с метеоритом, крупной кометой или астероидом. Исследовали кольца Сатурна П. Лаплас, С. В. Ковалевская, Д. Максвелл, М. С. Бобров [1–4].

1. Потенциал для пространственной точки

Кольца Сатурна имеют сложную структуру, расщепляясь на многочисленные более тонкие колечки, разделённые так называемыми щелями. По снимкам «Вояджера-1» было установлено, что кольца Сатурна состоят из сотен узеньких колечек. В 1981 году автоматическая межпланетная станция «Вояджер-2» приблизилась к Сатурну на расстояние 161 000 км от его центра и была способна наблюдать кольца с намного бóльшим разрешением и открыла много новых колечек. Размер материала колец у Сатурна – от нескольких микрон до десятков метров, а по составу это – водяной лёд с примесями силикатной пыли и обломков.

Кольца планеты находятся в гравитационном поле, создаваемом самой планетой, и в то же время сами являются источниками поля. Определим, каким будет потенциал, создаваемый одним гравитирующим кольцом.

Пусть гравитирующая масса с некоторой объемной плотностью распределена внутри тора малого сечения и большого радиуса R . Ввиду малого сечения тора заменим его кольцом радиуса R с линейной плотностью массы τ . Тогда элементарная масса dm , соответствующая элементу длины dl будет τdl (рисунок 1).



Рисунок 1 – Гравитирующее кольцо радиуса R

Потенциал, создаваемый элементарной массой dm в точке, расположенной на расстоянии ρ от нее, определяется соотношением

$$d\varphi = -\frac{Gdm}{\rho},$$

где G – гравитационная постоянная.

Подставив вместо dm величину $\tau R d\alpha$, можно записать

$$d\varphi = -\frac{G\tau R d\alpha}{\rho}.$$

Заменяя ρ величиной $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$, получим

$$d\varphi = -\frac{G\tau R d\alpha}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Учитывая, что согласно теореме косинусов $x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha$, можно записать

$$d\varphi = -\frac{G\tau R d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \alpha}}.$$

Потенциал всего кольца будет определяться выражением

$$\varphi = -2 \int_0^{\pi} \frac{G\tau R d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \alpha}}.$$

Преобразуем последнее соотношение, введя параметр

$$k = \frac{r}{R}.$$

Тогда для потенциала получим

$$\varphi = -2\tau GI,$$

где интеграл I равен

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + k^2 + \frac{z^2}{R^2} - 2k \cos \alpha}}.$$

Потенциал можно выразить также через массу кольца

$$\varphi = -\frac{Gm}{R} \cdot \frac{I}{\pi}.$$

2. Потенциал для точки в плоскости кольца

Для точки, расположенной в плоскости кольца, $z = 0$, поэтому

$$\varphi(z=0) = -2\tau GI, \text{ где } I = \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\alpha}}.$$

Интеграл I определяется величиной параметра k , который для точек внутри кольца меньше единицы, а вне его больше единицы. Вычисленные значения интеграла для некоторых значений k точек внутри кольца представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Значения интеграла I для некоторых значений параметра k точек внутри кольца

k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
I	3,141	3,149	3,174	3,216	3,28	3,371
k	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999
I	3,502	3,691	3,991	4,561	6,713	8,991

Вычисленные значения интеграла для некоторых значений k точек вне кольца представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Значения интеграла I для некоторых значений параметра k точек вне кольца

k	1,001	1,01	1,1	1,2	1,3	1,4
I	8,983	6,656	4,222	3,445	2,986	2,661
k	1,5	2	4	10	20	50
I	2,413	1,685	0,798	0,315	0,157	0,063

3. Обсуждение результатов

Анализируя зависимость распределения потенциала внутри кольца от расстояния до центра кольца, можно отметить, что величина потенциала в центре имеет максимум, уменьшаясь при приближении к точкам кольца. За пределами кольца потенциал начинает возрастать и на бесконечности обращается в нуль. Для близлежащих к кольцу точек, в области внутри тора, можно учесть величину сечения тора. Внутри сечения потенциал с достаточной степенью приближения будет изменяться аналогично полю однородного бесконечного длинного цилиндра с радиусом, равным радиусу кругового сечения тора. Это

обусловлено тем, что длина кольца много больше диаметра сечения тора.

Закономерности распределения потенциала, в частности, уменьшение его в точках локализации частиц тора позволяет обосновать одну из причин устойчивости кольцеобразных образований. Попадающие извне частицы материи в потенциальном поле гравитирующего кольца будут втягиваться в области с меньшей величиной потенциала. При этом возможны колебательные процессы вблизи области с минимумом потенциальной энергии. Или же одна из частиц, составляющих кольцо, удаляясь от точек минимального потенциала после столкновения с другими частицам, будет потом втягиваться обратно.

Литература

1. Laplace, P. S. Mem. Acad. sci (Mecanique Celeste, k.3, p.VI) / P. S. Laplace. – 1789 (1787).
2. Maxwell, J. C. The Sci. Papers, v. 1. / J. C. Maxwell. – Cambridge, 1859. – 287 p.
3. Ковалевская, С. В. В кн.: С. В. Ковалевская. Научные работы. – М. Изд-во АН СССР, 1948.
4. Бобров, М. С. Кольца Сатурна / М. С. Бобров. – М. Наука, 1970. – 123 с.