А. В. Ивашкевич, О. А. Василюк, В. В. Кисель, В. М. Редьков
Институт физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси,
Минск, Беларусь

ТЕОРИЯ ФРАДКИНА ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2, НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ

1. Исходные соотношения

Помимо уравнения Паули-Фирца [1, 2] для частицы со спином 3/2, известно уравнение, предложенное Фрадкиным [3]; также см. [4–7]. При занулении дополнительного параметра Фрадкина Λ следует уравнение Паули-Фирца. С целью установления физической интерпретации этого параметра в работе исследован вопрос нерелятивистском приближения в теории Фрадкина.

Исходим из уравнения Фрадкина

$$(D_\mu \Gamma_\mu + M + Q)\Psi = 0, \quad D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \tag{1}$$

где Ψ преобразуется как вектор-биспинор; матрицы Γ_μ представляются так:

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes e^{\nu,\nu} + \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_\rho \otimes (e^{\rho,\mu} - e^{\mu,\rho}); \tag{2}$$

Q описывает дополнительное взаимодействие с электромагнитным полем:

$$Q = -\frac{ie\Lambda}{3M} F_{\mu\nu} \Big\{ 2\sqrt{3}\gamma_\lambda \gamma_\nu \otimes e^{\lambda,\mu} - 2\gamma_\mu \gamma_\rho \otimes (e^{\nu,\rho} + e^{\rho,\nu}) +$$

$$+ \gamma_\mu \gamma_\nu \otimes e^{\rho,\rho} + 2I \otimes e^{\mu,\nu} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^5 \otimes e^{\lambda,\rho} \Big\}. \tag{3}$$

Для разложения функций в большие и малые составляющие нужно знать минимальное уравнение для матрицы Γ_4: $\Gamma_4^2(\Gamma_4^2 - 1) = 0$. Учитывая его, можно убедиться в существовании трех проективных операторов:

$$P_{+} = +\frac{1}{2}\Gamma_4^2(\Gamma_4+1), \quad P_{-} = -\frac{1}{2}\Gamma_4^2(\Gamma_4-1), P_0 = 1-\Gamma_4^2, \quad P_{+}+P_{-}+P_0 = 1;$$

они позволяют разложить волновую функцию в сумму трех частей:

$$\Psi^{(+)} = \frac{1+\gamma_4}{2}\left|\begin{matrix} \Psi_c - \frac{1}{3}\gamma_c\gamma_b\Psi_b \\ 0 \end{matrix}\right|, \Psi^{(-)} = \frac{1-\gamma_4}{2}\left|\begin{matrix} \Psi_c - \frac{1}{3}\gamma_c\gamma_b\Psi_b \\ 0 \end{matrix}\right|,$$

$$\Psi^{(0)} = \left|\begin{matrix} \frac{1}{3}\gamma_c\gamma_b\Psi_b \\ \Psi_4 \end{matrix}\right|. \qquad (4)$$

В нерелятивистском приближении компонента $\Psi^{(+)}$ является большой, а компоненты $\Psi^{(-)}$ и $\Psi^{(0)}$ – малые.

2. Нерелятивистское уравнение в приближении 1-го порядк по Λ

Выведено нерелятивистское уравнение в приближении 1-го порядка по Λ:

$$D_4\Phi_c^{(+)} - \frac{1}{2M}D^2\Phi_c^{(+)} + \frac{ie}{3M}F_{ab}\left\{\frac{3}{4}\gamma_a\gamma_b\Phi_c^{(+)} + \gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)}\right\} -$$

$$-\frac{ie\Lambda}{3M}\left\{2F_{ab}\gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)} - 2F_{ca}\Phi_a^{(+)} + F_{ab}\gamma_a\gamma_b\Phi_c^{(+)}\right\} = 0. \qquad (5)$$

Из 16 уравнений независимыми являются только четыре. Покажем, что после перехода к этим 4-м компонентам член, пропорциональный Λ, дает нулевой вклад. Для этого детализируем структуру нерелятивистской функций $\Phi_c^{(+)}$:

$$\Phi_1^{(+)} = (1/6)(1+\gamma_4)[2\Phi_1 - \gamma_1\gamma_2\Phi_2 + \gamma_3\gamma_1\Phi_3],$$
$$\Phi_2^{(+)} = (1/6)(1+\gamma_4)[2\Phi_2 + \gamma_1\gamma_2\Phi_1 - \gamma_2\gamma_3\Phi_3],$$
$$\Phi_3^{(+)} = (1/6)(1+\gamma_4)[2\Phi_3 - \gamma_3\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\gamma_3\Phi_2].$$

Получаем явные представления для трех компонент:

$$\Phi_1^{(+)} = \left|\begin{matrix} \Phi_{11}^{(+)} \\ \Phi_{21}^{(+)} \\ \Phi_{11}^{(+)} \\ \Phi_{21}^{(+)} \end{matrix}\right|, \quad \Phi_2^{(+)} = \left|\begin{matrix} \Phi_{12}^{(+)} \\ \Phi_{22}^{(+)} \\ \Phi_{12}^{(+)} \\ \Phi_{22}^{(+)} \end{matrix}\right|, \quad \Phi_3^{+} = \left|\begin{matrix} -(\Phi_{21}^{(+)} + i\Phi_{22}^{(+)}) \\ (\Phi_{11}^{(+)} - i\Phi_{12}^{(+)}) \\ -(\Phi_{21}^{(+)} + i\Phi_{22}^{(+)}) \\ (\Phi_{11}^{(+)} - i\Phi_{12}^{(+)}) \end{matrix}\right|;$$

отсюда следует, что в нерелятивистских функциях $\Phi_c^{(+)}$ имеем только 4 независимые компоненты. Собираем их в столбец $\psi = \{\Phi_{11}^{(+)}, \Phi_{21}^{(+)}, \Phi_{12}^{(+)}, \Phi_{22}^{(+)}\}$. Обратимся к 16-мерному уравнению (5). Рассмотрим часть, содержащую Λ-член. Пусть $c = 1$, пропорциональный Λ член задается выражением

$$X_{\Lambda(1)} = -2\frac{ie\Lambda}{3M}F_{23}\left|\begin{matrix} -i\Phi_{13}^{(+)} + \Phi_{22}^{(+)} - i\Phi_{21}^{(+)} \\ i\Phi_{23}^{(+)} - \Phi_{12}^{(+)} - i\Phi_{11}^{(+)} \\ -i\Phi_{33}^{(+)} + \Phi_{42}^{(+)} - i\Phi_{41}^{(+)} \\ i\Phi_{43}^{(+)} - \Phi_{32}^{(+)} - i\Phi_{31}^{(+)} \end{matrix}\right|.$$

В силу полученных выше равенств, для $X_{\Lambda(1)}$ получаем тождество: $X_{\Lambda(1)} \equiv 0$, аналогично $X_{\Lambda(2)} \equiv 0$, $X_{\Lambda(3)} \equiv 0$. Таким образом, имеем уравнение

$$D_4\Phi_c^{(+)} - \frac{1}{2M}D^2\Phi_c^{(+)} + \frac{ie}{3M}F_{ab}\left\{\frac{3}{4}\gamma_a\gamma_b\Phi_c^{(+)} + \gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)}\right\} = 0. \qquad (6)$$

Явное представление этого уравнения для 4-компонентной функции следующее:

$$\left(D_4 - \frac{1}{2M}D^2\right)\left|\begin{matrix} \Phi_{1(1)}^{+} \\ \Phi_{2(1)}^{+} \\ \Phi_{1(2)}^{+} \\ \Phi_{2(2)}^{+} \end{matrix}\right| + \frac{ie}{3M}\left\{ F_{12}\left|\begin{matrix} -i/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -i/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & i/2 \end{matrix}\right| + \right.$$

$$+F_{31}\begin{vmatrix} 0 & 3/2 & 0 & i \\ -3/2 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{vmatrix}+F_{23}\begin{vmatrix} 0 & -i/2 & 0 & 0 \\ -i/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3i/2 \\ 1 & 0 & -3i/2 & 0 \end{vmatrix}\Bigg\}\begin{vmatrix} \Phi^{+}_{1(1)} \\ \Phi^{+}_{2(1)} \\ \Phi^{+}_{1(2)} \\ \Phi^{+}_{2(2)} \end{vmatrix}=0.$$

Введя три матрицы (для компонент спина)

$$S_1=-i\begin{vmatrix} 0 & -i/2 & 0 & 0 \\ -i/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3i/2 \\ 1 & 0 & -3i/2 & 0 \end{vmatrix}, \text{ и т. д.}$$

уравнение представляем так:

$$\left\{D_4-\frac{1}{2M}\vec{D}^{\,2}-\frac{e}{3M}(F_{23}S_1+F_{31}S_2+F_{12}S_3)\right\}\Psi=0. \qquad (7)$$

3. Учет квадратичных членов по Λ

Определим вид нерелятивистского уравнения с учетом квадратичных по Λ членов. Для этого малые функции исходного уравнения выразим через большие, используя следующим за нулевым порядок приближения.

При учете только магнитного поля для квадратичного слагаемого получаем выражение

$$\frac{4}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2\left\{B_3^2\begin{vmatrix} -1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \\ -i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & i & 0 & -1 \end{vmatrix}+B_3B_2\begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix}+\right.$$

$$+B_3B_1\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 1 \\ -2i & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}+B_2^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+$$

$$+B_2B_1\begin{vmatrix}-i & 0 & -2 & 0\\ 0 & i & 0 & -2\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i\end{vmatrix}+B_1^2\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\end{vmatrix}\Bigg\}\begin{vmatrix}\Phi_{11}^{(+)}\\ \Phi_{21}^{(+)}\\ \Phi_{12}^{(+)}\\ \Phi_{22}^{(+)}\end{vmatrix}.$$

Полное нерелятивистское уравнение записывается символически так:

$$D_4\psi=\left\{\frac{1}{2M}D^2+\frac{e}{3M}\sum_i B_iS_i-\frac{4}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2\sum_{(ik)}B_iB_kM_{ik}\right\}\psi\,. \qquad (8)$$

Уравнение описывает дополнительное взаимодействие частицы с магнитным полем.

Нерелятивистское уравнение во внешнем электрическом после необходимых вычислений принимает очень простой вид

$$D_4\Phi_c^{(+)}=\frac{1}{2M}D^2\Phi_c^{(+)}\,. \qquad (9)$$

Таким образом, нерелятивистское уравнение в теории Фрадкина не содержит дополнительного члена взаимодействия с электрическим полем, есть только вклады взаимодействия с магнитным полем. По этой причине это уравнение можно рассматривать как описывающее частицу с магнитным квадрупольным моментом.

Литература

1. Fierz, M. Ьber die relativistische theorie Kraftefreier Teilchen mit beliebigem Spin / M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 3–37.

2. Pauli, W. Ьber relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 297–300.

3. Фрадкин, Е. С. К теории частиц с высшими спинами / Е. С. Фрадкин // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20, вып. 1. – С. 27–38.

4. Федоров, Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф. И. Федоров // Докл. Акад. наук СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.

5. Богуш, А. А. Уравнение для частицы со спином 3/2, обладающей аномальным магнитным моментом / А. А. Богуш, В. В. Кисель // Изв. вузов. Физика. – 1984. – № 1. – С. 23–27.

6. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015. – 328 с.

7. Elementary particles with internal structure in external fields. I. General theory, II. Physical problems. / V. V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 p.