**А. В. Павленко, Ю. А. Гришечкин**
УО «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

# ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА – ТАВХЕЛИДЗЕ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ДВУМЕРНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

## Введение

Одной из основных моделей нерелятивистской квантовой теории, допускающих точные решения, является задача о гармоническом осцилляторе [1]. В данной работе найдено точное решение модифицированного уравнения Логунова – Тавхелидзе в импульсном представлении с потенциалом гармонического осциллятора в двумерном случае. Аналогичная задача в трёхмерном случае была рассмотрена в работе [2].

Потенциал гармонического осциллятора на плоскости в координатном представлении имеет вид

$$V(\rho) = \omega^2 \rho^2, \tag{1}$$

где $\omega$ – константа связи, $\rho$ – модуль радиус-вектора. Используя двумерное преобразование Фурье, запишем потенциал (1) в импульсном представлении

$$V(\mathbf{p}-\mathbf{k}) = -(2\pi)^2 \omega^2 \Delta_p \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \tag{2}$$

где $\Delta_p$ – оператор Лапласа на плоскости импульсов, $\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})$ – дельта-функция.

Модифицированное уравнение Логунова – Тавхелидзе, описывающее связанные состояния двух скалярных частиц одинаковой массы $m$ в двумерном импульсном представлении имеет вид

$$\psi(\mathbf{p}) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{E_p^2 - E^2}\frac{E_p}{m}\int V(\mathbf{p},\mathbf{k})\frac{m}{E_k}\psi(\mathbf{k})d^2\mathbf{k}, \quad E_p = \sqrt{k^2+m^2}, \quad (3)$$

где $\psi(\mathbf{p})$ – волновая функция, $\mathbf{p}$ – двумерный относительный импульс в системе центра масс, $2E$ – энергия двухчастичной системы, $V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ – релятивистский потенциал.

**1. Решение релятивистского двухчастичного уравнения**

Подстановка потенциала (2) в уравнение (3) и последующее интегрирование с учетом свойств дельта-функции [3] приводит к следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\left(E^2 - m^2 - p^2\right)\frac{m}{E_p}\psi(\mathbf{p}) = -\omega^2\Delta_{\mathbf{p}}\frac{m}{E_p}\psi(\mathbf{p}). \quad (4)$$

Выполним в данном уравнении разделение переменных в полярных координатах $(p,\varphi)$, для этого представим волновую функцию $\psi(\mathbf{p})$ в следующей форме [4, 5]:

$$\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\psi_\mu(p)\exp(i\mu\varphi), \quad (5)$$

где $\psi_\mu(p)$ – парциальные волновые функции. Подстановка ряда (5) в уравнение (4) и приравнивание в полученном равенстве коэффициентов при одинаковых множителях $\exp(i\mu\varphi)$ слева и справа приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для парциальных волновых функций, каждое из которых запишем в виде

$$\left(\frac{d^2}{dp^2} + \frac{1/4-\mu^2}{p^2} + \frac{1}{\omega^2}\left(E^2-m^2\right) - \frac{1}{\omega^2}p^2\right)\frac{m}{E_p}\psi_\mu(p) = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) представим в форме [6]

$$\psi_\mu(p) = C_\mu \frac{E_p}{m} p^{\frac{1}{2}+\mu} \exp\left(-\alpha \frac{p^2}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{4} + \frac{|\mu|}{2}, |\mu|+1, \alpha p^2\right), \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{1}{\omega}, \quad \beta = \frac{1}{\omega}\left(E^2 - m^2\right), \quad (8)$$

где $C_\mu$ – неизвестная константа, ${}_1F_1(a,b,x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция [7]. Для того, чтобы функции (7) были конечными, потребуем выполнение условия

$$\frac{1}{2} - \frac{\beta}{4} + \frac{|\mu|}{2} = -n, \qquad n = 0,1,2\ldots, \quad (9)$$

которое приводит к тому, что вырожденная гипергеометрическая функция преобразуется в обобщённый полином Лагерра [7]. Таким образом, парциальные волновые функции с точностью до нормировочных множителей $C_{\mu,n}$ имеют вид

$$\psi_{\mu,n}(p) = C_{\mu,n} \frac{E_p}{m} p^{\frac{1}{2}+\mu} \exp\left(-\alpha \frac{p^2}{2}\right) L_n^{|\mu|}(\alpha p^2), \quad (10)$$

где $L_b^a(x)$ – обобщенный полином Лагерра. Учитывая обозначения (8), из равенства (9) получим условие квантования энергии:

$$2E_{\mu,n} = 2\sqrt{2\omega\left(2n + |\mu| + 1\right) + m^2}, \quad n = 0,1,2\ldots. \quad (11)$$

Анализ условия квантования энергии (11) показывает, что для любой парциальной волны существует бесконечное количество энергетических уровней системы, а сама энергия двухчастичной системы должна быть больше $2m$. Кроме того, в отличие от нерелятивистского случая, энергетические уровни релятивистского гармонического осциллятора не являются эквидистантными.

Для определения множителей $C_{\mu,n}$ воспользуемся нерелятивистским условием нормировки [1]

$$\int_0^\infty \psi_{\mu,n}^2(p)\,dp = 1. \qquad (12)$$

Подставив (10) в (12) и выполнив интегрирование [8], получим следующее выражение для нормировочных множителей:

$$C_{\mu,n} = \frac{\alpha^{\mu+1} 2n!}{\left(\frac{2n+\mu+1}{\alpha m^2}+1\right)\Gamma(n+\mu+1)}, \qquad (13)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция. На рисунке 1 показаны графики зависимости квадратов парциальных волновых функций от переменной $p$ при $m=1$.

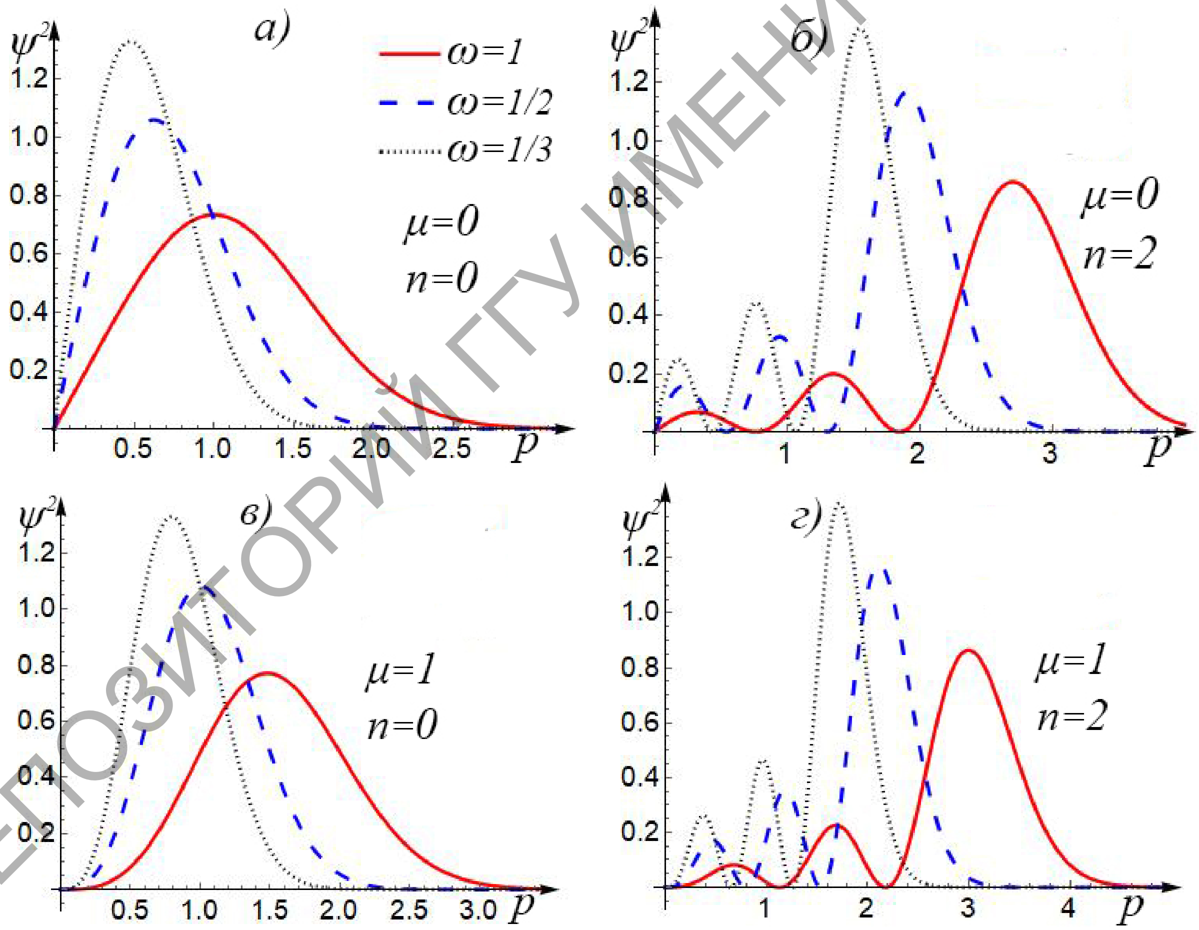


Рисунок 1 – Квадраты парциальных волновых функций

Как видно на рисунке 1, с убыванием константы связи $\omega$ парциальные волновые функции локализуются в области начала координат, также видно, что число нулей волновой функции равно $n+1$.

**Заключение**

В данной работе найдено точное решение двумерного модифицированного уравнения Логунова – Тавхелидзе для потенциала гармонического осциллятора: получено условие квантования энергии двухчастичной системы и парциальные волновые функции. Проведён анализ полученных результатов.

## Литература


1. Ландау, Л. Д. Курс теоретической физики / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц // Учеб. пособ.: для вузов. В 10 т. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). 6-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2004. – 800 с.

2. Капшай, В. Н. Точные решения квазипотенциальных уравнений для некоторых аналогов потенциалов запирания / В. Н. Капшай, С. П. Кулешов, Н. Б. Скачков // Ядерная физика. – 1983. – Т. 37. – С. 1292–1296.

3. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики. Учебник для вузов. 2-е изд. / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

4. Пупышев, В. В. Двумерное кулоновское рассеяние квантовой частицы: низкоэнергетические асимптотик / В. В. Пупышев // ТМФ. – 2016. – Т. 188, № 1. – С. 49–75.

5. Флюгге, З. Задачи по квантовой механике: в 2 т. / З. Флюгге. – Москва: ЛКИ, 2010. – Т. 1. – 344 с.

6. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям. / Э. Камке. – Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2003 – 576 с.

7. Арфкен, Г. Математические методы в физике / Г. Арфкен. – Москва: Атомиздат, 1970. – 712 с.

8. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.