Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. — 1999. — №1(15) Вопросы алгебры. — С. 78–84

УДК 512.542

В.Г. Сафонов

О ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ НИЛЬПОТЕНТНОГО ДЕФЕКТА 3

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — локальные формации, причем решетка $\mathfrak{F}/_l\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ локальных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, конечна и имеет длину k. Тогда число k называют $\mathfrak{H}$-дефектом локальной формации $\mathfrak{F}$ [1]. В случае, когда $\mathfrak{H}$ — формация всех нильпотентных групп, $\mathfrak{H}$-дефект локальной формации называют ее нильпотентным дефектом. В работе [1] установлен ряд общих свойств $\mathfrak{H}$-дефекта локальной формации и дано описание локальных формаций нильпотентного дефекта $\leqslant 2$. Задача классификации локальных формаций нильпотентного дефекта 3 поставлена в совместной монографии Л.А.Шеметкова и А.Н.Скибы [2] (проблема 20.9). Работа автора данной заметки [3] посвящена решению указанной задачи в классе всех разрешимых групп. Следует однако отметить, что в работе [3] при описании приводимых локальных формаций данного типа условие разрешимости не накладывалось. Поэтому решение отмеченной выше задачи сводится к описанию неразрешимых неприводимых локальных формаций с нильпотентным дефектом 3.

В данной работе мы даем классификацию минимальных неразрешимых локальных формаций такого вида.

Рассматриваются только конечные группы. Необходимые определения и обозначения можно найти в книге [2]. Везде в дальнейшем Z_p (p - простое число) обозначает группу порядка p. Напомним так же, что если группа Шмидта G имеет нормальную силовскую p-подгруппу и $\pi(G) = \{p, q\}$, то говорят, что она имеет тип (p, q).

Сформулируем в виде лемм ряд известных фактов, используемых при доказательстве основного результата.

Лемма 1 [2, с.170]. *Пусть G — монолитическая группа с монолитом P, $G/F_p(G)$ — монолитическая группа с монолитом $Q/F_p(G)$, где $p \in \pi(P)$. Пусть $Q/F_p(G)$ — p'-группа, если P — p-группа. Тогда если $|\Phi(G)| = 1 = |\Phi(G/F_p(G))|$, то формация $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$ имеет единственную максимальную локальную подформацию $\mathfrak{H}$, у которой есть такой внутренний локальный экран h, что $h(p) = \mathrm{form}(G/Q)$ при всех $p \in \pi(P)$ и $h(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G))$ при всяком $p \in \pi(G) \setminus \pi(P)$.*

Лемма 2 [2, с.78]. *Пусть Θ — некоторая полурешётка формаций, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} \in \Theta$ и $\mathfrak{F} = \Theta^l\mathrm{form}\mathfrak{X}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) формация $\mathfrak{F}$ *обладает единственным минимальным локальным* Θ*-значным экраном* f*, причем* $f(p) = \varnothing$*, если* $p \in \pi'(\mathfrak{X})$*, и* $f(p) = \Theta\mathrm{form}(A/F_p(A) | A \in \mathfrak{X})$ *при всех* $p \in \pi(\mathfrak{X})$*;*

2) если h *— произвольный локальный* Θ*-значный экран формации* $\mathfrak{F}$*, то при всех* $p \in \pi(\mathfrak{F})$ *имеет место*

$$f(p) = \Theta\mathrm{form}(A | A \in \mathfrak{F} \cap h(p) \quad \text{и} \quad O_p(A) = 1).$$

Лемма 3 [2, с.198]. *В точности тогда* $\mathfrak{F}$ *— неприводимая локальная формация с нильпотентным дефектом 2, когда* $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$*, где* G *— такая монолитическая группа с монолитом* R*, что либо* R *— неабелева группа,* G/R *— прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп и* $\pi(R) \subseteq \pi(G/R)$*, либо* $G = [R]H$*, где* $R = C_G(R)$ *— минимальная нормальная* p*-подгруппа в* G*, а* H *— одна из следующих групп:*

1) простая неабелева p'*-группа;*

2) $[Q]N$*, где* $Q = C_{[Q]N}(Q)$ *— минимальная нормальная* q*-подгруппа в* $[Q]N$ $(q \neq p)$*, а* N *— либо группа порядка* p*, либо прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп и* $p, q \in \pi(N)$*;*

3) неабелева группа порядка q^3 *простой нечетной экспоненты* $q \neq p$*;*

4) циклическая примарная группа порядка q^2*, где* q *— простое число* $\neq p$*.*

Обозначим через $d(\mathfrak{F})$ и $d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{F})$ — длину и нильпотентный дефект локальной формации $\mathfrak{F}$ соответственно.

Лемма 4 [3]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{X}$ *— произвольные локальные формации, имеющие конечный нильпотентный дефект. Тогда*

$$d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{X}) = d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M}) + d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{X}) - d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{X}).$$

Лемма 5 [2, с.195]. *Пусть* $\mathfrak{M}$*,* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *— локальные формации, причем* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$*. Тогда если* m *и* n *—* $\mathfrak{H}$*-дефекты формаций* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{F}$ *соответственно, то* $m \leqslant n$*.*

Лемма 6 [2, с.205]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— такая нильпотентная локальная формация, что* $\pi(\mathfrak{F})$ *— конечное множество. Тогда длина формации* $\mathfrak{F}$ *равна* $|\pi(\mathfrak{F})|$*.*

Доказательство следующей леммы осуществляется прямой проверкой.

Лемма 7. *Пусть f, m и h — минимальные локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, то имеет место равенство $f = mVh$.*

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ — локальные формации, причем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{H}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ конечен, когда конечны $\mathfrak{H}$-дефект формации $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$-дефект формации $\mathfrak{F}$, при этом*

$$d_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F}) = d_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}) + d_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{F}).$$

Доказательство. Необходимость. По лемме 5 $d_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}) \leqslant d_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F}) = n$. Положим $k = d_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M})$. Ввиду леммы 20.2 [2] существуют цепи

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \supset \mathfrak{F}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{L}_0 \supset \mathfrak{L}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{L}_k = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H},$$

где $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{L}_j$ — максимальные локальные подформации в $\mathfrak{F}_{i-1}$ и $\mathfrak{L}_{j-1}$ соответственно, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$.

Поскольку $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}/_l\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ подрешётка решетки конечной длины $\mathfrak{F}/_l\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Поэтому решетка $\mathfrak{F}/_l\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ также имеет конечную длину. Обозначим ее через t. Согласно лемме 20.2 [2] $t = d_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{F})$.

Достаточность. Пусть $d_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}) = k$, $d_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{F}) = t$. Тогда ввиду леммы 20.2 [2] существуют цепи

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \supset \mathfrak{F}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{F}_t = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M},$$

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{L}_0 \supset \mathfrak{L}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{L}_k = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H},$$

где $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{L}_j$ — максимальные локальные подформации в $\mathfrak{F}_{i-1}$ и $\mathfrak{L}_{j-1}$ соответственно, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$. Таким образом, существует конечная максимальная цепь от $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ до $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 20.2 [2] $d_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F}) = k + t$. Лемма доказана.

Следствие. *Тогда и только тогда длина локальной формации $\mathfrak{F}$ конечна, когда конечны $\pi(\mathfrak{F})$ и $d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{F})$, при этом $d(\mathfrak{F}) = |\pi(\mathfrak{F})| + d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Ввиду лемм 6 и 21.3 [2] длина нильпотентной локальной формации $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда конечна и равна l, когда $|\pi(\mathfrak{X})| = l$. Применяя теперь лемму 8 при $\mathfrak{H} = (1)$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$, имеем $d(\mathfrak{F}) = |\pi(\mathfrak{F})| + d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{F})$. Следствие доказано.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — минимальная неразрешимая локальная формация. Тогда и только тогда нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 3, когда $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с неабелевым монолитом P, что G/P — элементарная абелева p-группа, $p \in \pi(P)$ и $|\pi(G)| = 3$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — минимальная неразрешимая локальная формация нильпотентного дефекта 3, $\mathfrak{M}$ — ее максимальная локальная подформация. Обозначим через f и m минимальные локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Ввиду п. 18.15 [2] $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с неабелевым монолитом L, что группа G/L разрешима. Если $G = L$, то G — простая неабелева группа. Тогда по следствию 19.10 [2] $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация, что противоречит условию. Поэтому G/L — нееединичная группа.

В силу лемм 1 и 2

$$m(p) = \begin{cases} \mathrm{form}((G/L)/O_p(G/L)), & \text{для любого } p \in \pi(L), \\ \mathrm{form}(G/F_p(G)), & \text{для любого } p \in \pi(G) \setminus \pi(L). \end{cases} \qquad (I)$$

Понятно, что $|\pi(\mathfrak{F})| \geqslant 3$ и $\mathfrak{M}$ — разрешимая локальная формация нильпотентного дефекта 2. Так как $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\pi(\mathfrak{M}) = \pi(\mathfrak{F})$. Кроме того, по лемме 3 всякая разрешимая неприводимая локальная формация нильпотентного дефекта 2 бипримарна. Поэтому $\mathfrak{M}$ — приводимая локальная формация. Ввиду теоремы 20.6 [2] формация $\mathfrak{M}$ удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные локальные ненильпотентные формации;

2) $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ — неприводимая локальная формация нильпотентного дефекта 2, $\mathfrak{R} \not\subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть формация $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию 1). Тогда очевидно, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ — неразрешимая минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация. Ввиду п. 18.22 [2] $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}B$, где B — монолитическая группа с неабелевым монолитом R, совпадающим с коммутантом группы B. Понятно, что B/R — нееединичная абелева группа.

Покажем, что $\pi(B/R) \subseteq \pi(R)$, $|\pi(B/R)| = 1$ и $|\pi(B)| = 3$.

Пусть $p \in \pi(B/R)$. Предположим, что $p \notin \pi(R)$. Тогда для любого $q_i \in \pi(R)$ $(i \in I,\ |I| \geqslant 3)$ имеем $F_{q_i}(B) = 1$ и

$$Z_p \in \mathrm{form}B = \mathrm{form}(B/F_{q_i}(B)) = f(q_i).$$

Ввиду леммы 18.8 [2] для каждого $q_i \in \pi(R)$ существует точный неприводимый $\mathrm{F}_{q_i}[Z_p]$-модуль V_i. Пусть $A_i = [V_i]Z_p$. По лемме 8.2 [2] группа $A_i \in \mathfrak{F}$. Согласно следствию 19.10 [2] $\mathfrak{L}_i = l\mathrm{form}(A_i)$ — минимальная локальная ненильпотентная формация, т.е. локальная формация нильпотентного дефекта 1. Но тогда в силу леммы 4 формация $\mathfrak{F}$, а значит и $\mathfrak{M}$, содержат приводимую локальную подформацию $l\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{L}_i)$ нильпотентного дефекта $|\pi(R)| \geqslant 3$. Последнее противоречит лемме 5. Значит, $p \in \pi(R)$, т.е. $\pi(B/R) \subseteq \pi(R)$.

Предположим, что $|\pi(B/R)| > 1$. Пусть $p, r \in \pi(B/R)$ и $s \in \pi(R) \setminus \{p, r\}$. Тогда имеем

$$Z_p, Z_r \in \mathrm{form}B = \mathrm{form}(B/F_s(B)) = f(s),$$

$$Z_p \in \mathrm{form}B = \mathrm{form}(B/F_r(B)) = f(r) \quad \text{и}$$

$$Z_r \in \mathrm{form}B = \mathrm{form}(B/F_p(B)) = f(p).$$

Используя аналогичные рассуждения можно построить, по меньшей мере, четыре группы принадлежащие $\mathfrak{F}$ и порождающие различные локальные формации нильпотентного дефекта 1. Снова применяя лемму 4 получим, что формация $\mathfrak{F}$ должна содержать локальную подформацию нильпотентного дефекта $\geqslant 4$. Противоречие. Следовательно, $\pi(B/R) = \{p\}$.

Допустим теперь, что $|\pi(B)| \geqslant 4$. Тогда для каждого простого числа q из $\pi(B) \setminus \{p\}$ имеем

$$Z_p \in \mathrm{form}B = \mathrm{form}(B/F_q(B)) = f(q).$$

Рассуждая также как и выше приходим к выводу, что формация $\mathfrak{F}$ содержит приводимую локальную подформацию нильпотентного дефекта $\geqslant 3$. Противоречие. Таким образом, $|\pi(B)| = 3$.

Пусть $\pi(\mathfrak{F}) = \{s, q, p\}$. По лемме 1 формация $\mathfrak{M}$ имеет такой внутренний локальный экран m_1, что

$$m_1(s) = m_1(q) = m_1(p) = \mathrm{form}(B/R).$$

Используя теперь лемму 2 получаем

$$m(s) = m(q) = \mathrm{form}(B/R), m(p) = (1).$$

Таким образом, экран m принимает равные неединичные значения на двух различных простых числах. Так как при этом формация $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию 1) и формации $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ порождаются группами Шмидта, то из всего сказанного следует, что эти группы имеют тип (s, p) и (q, p). Применяя теперь леммы 2 и 7 получаем

$$m(s) = m(q) = \mathrm{form}Z_p, m(p) = (1).$$

Но тогда B/R — элементарная абелева p-группа. Таким образом, группа B удовлетворяет условию теоремы.

Пусть теперь формация $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию 2). По лемме 3 $\mathfrak{H} = l\text{form}D$, где $D = [K]H$, $K = C_D(K)$ — минимальная нормальная r-подгруппа в D, а H одна из следующих групп:

(а) $[Q]N$, $Q = C_H(Q)$ — q-группа $q \neq r$, $|N| = r$;

(б) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \neq r$;

(в) циклическая примарная группа порядка q^2, $q \neq r$.

Пусть группа H удовлетворяет (б) или (в). Тогда ввиду лемм 1 и 7 только $m(r) \neq (1)$. Значит, поскольку $|\pi(L)| \geqslant 3$, найдутся такие два простых числа $p_1 \neq p_2$ из $\pi(L)$, что

$$m(p_1) = \text{form}((G/L)/O_{p_1}(G/L)) = (1)$$

и

$$m(p_2) = \text{form}((G/L)/O_{p_2}(G/L)) = (1).$$

Следовательно,

$$\text{form}(G/L) \subseteq \mathfrak{N}_{p_1} \cap \mathfrak{N}_{p_2} = (1).$$

Противоречие.

Пусть теперь группа H удовлетворяет условию (а). Привлекая леммы 1 и 7 получаем

$$m(t) = \begin{cases} \text{form}H \not\subseteq \mathfrak{N}, & \text{если } t = r, \\ \text{form}N \subseteq \mathfrak{N}_r, & \text{если } t = q, \\ (1), & \text{если } t \in \pi(\mathfrak{M}) \setminus \{r, q\}. \end{cases} \qquad (II)$$

Пусть $s \in \pi(L) \setminus \{r, q\}$. Используя (I) имеем

$$m(s) = \text{form}((G/L)/O_s(G/L)) = (1).$$

Значит, G/L — s-группа. Но тогда $\pi(L) = \{r, q, s\}$, поскольку иначе $G = L$, что невозможно. Но тогда с учетом (I) получаем, что

$$m(q) = \text{form}((G/L)/O_q(G/L)) = \text{form}(G/L) \subseteq \mathfrak{N}_r.$$

Последнее противоречит (II). Таким образом, данный случай невозможен.

Достаточность. Пусть формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию теоремы. По лемме 1 $\mathfrak{F}$ имеет единственную максимальную локальную подформацию $\mathfrak{M}$, у которой есть такой внутренний локальный экран m_1, что $m_1(s) = \text{form}Z_p$, для любого $s \in \pi(\mathfrak{F})$. В силу леммы 2 $m(s) = \text{form}Z_p$ для $s \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \{p\}$ и $m(p) = (1)$, где m — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{M}$. Очевидно, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^2$. Поэтому по лемме 21.3 [2] длина локальной формации $\mathfrak{M}$ равна сумме длин формаций, являющихся значениями экрана m. Поскольку $|\pi(\mathfrak{M})| = 3$, а так же formZ_p и (1) — формации длины 2 и 1 соответственно, то длина $\mathfrak{M}$ равна 5. Следовательно, $\mathfrak{F}$ — локальная формация длины 6. Так как при этом $|\pi(\mathfrak{F})| = 3$, то в силу следствия леммы 8 нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 3. Теорема доказана.

Summary

V.G. Safonov. On local formations of the nilpotent defect 3 // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15) Problems in Algebra. — P. 78–84

All considered groups are finite.

Let $\mathfrak{S}$ be the formation of all soluble groups. A local formation $\mathfrak{F}$ is called a minimal local non-soluble formation, if $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}$ and each proper local subformation of $\mathfrak{F}$ belongs to $\mathfrak{S}$.

Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be some local formations. If the lattice $\mathfrak{F}/_l\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ of local formations $\mathfrak{X}$ with $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ has a finite length k, then k is called $\mathfrak{H}$-defect of local formation $\mathfrak{F}$. If $\mathfrak{H}$ is the formation of all nilpotent groups, then $\mathfrak{H}$-defect of local formation $\mathfrak{F}$ is called nilpotent defect of $\mathfrak{F}$.

Classification problem of local formations with nilpotent defect 3 was discussed in the book by L.A.Shemetkov and A.N.Skiba "Formations of algebraic systems"Moscow. Nauka, 1989 (problem 20.9). In 1996 the author gave the solution of this problem in the class of all soluble groups.

In this paper we prove the following theorem.

Theorem. Let $\mathfrak{F}$ be a minimal non-soluble local formation. Nilpotent defect of $\mathfrak{F}$ equals 3 if and only if $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$, where G is a monolitic group, $Soc(G)$ is a non-abelian group, $G/Soc(G)$ is an elementary abelian p-group, $p \in Soc(G)$ and $|\pi(G)| = 3$.

Литература

1. *Скиба А.Н., Таргонский Е.А.* Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 // Матем. заметки. 1987. Т. 41. № 4. С. 490–499.

2. *Шеметков Л.А., Скиба А.Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука. 1989. 256 с.

3. *Сафонов В.Г.* О разрешимых локальных формациях нильпотентного дефекта 3 // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1996. № 3. С. 8–12.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 01.03.99