Лекция 1
Вычислительные (численные) методы и математические модели

Лектор

Ст. преподаватель Купо А.Н.

1. Математические модели и моделирование.
2. Этапы численного решения задач.
3. Виды погрешностей решения задач.
4. Оценка погрешностей результатов действий над приближенными значениями чисел.
5. Основы работы в Mathcad

Вычислительные (или численные) методы – это методы решения математических задач в численном виде. Отличительной чертой численных методов является то, что исходные данные в задаче задаются в виде числа или набора чисел, и решение получается также в виде числа или набора чисел.

В отличие от численных методов существуют **аналитические методы** решения математических задач на компьютере. Исходные данные сформулированы в аналитическом (символьном) виде, и результаты решения также получаются в символьном виде.

Математические модели и моделирование

Использование при проектировании технической системы ее модели называется **моделированием**.

Физическая модель системы воспроизводит реальную техническую систему, но в уменьшенных размерах.

Математическая модель представляет собой математические соотношения, описывающие техническую систему.

Математические модели и моделирование

Анализ физической модели состоит в загрузке построенной установки сырьем, запуске ее в работу и исследовании полученной продукции.

Анализ математической модели заключается в получении общих и частных аналитических решений сформулированной математической задачи и их интерпретации.

Получение частных численных решений сформулированной задачи на основе аналитических решений или с помощью численных методов называют ***имитационным моделированием*** реального процесса.

Этапы численного решения задач на ЭВМ

1) постановка задачи;
2) разработка метода и алгоритма решения задачи;
3) написание компьютерной программы;
4) отладка программы;
5) проведение расчетов и анализ результатов.

Этапы численного решения задач на ЭВМ

Постановка задачи заключается в построении математических зависимостей, адекватно описывающих техническую систему, т.е. в построении математической модели системы. Например, техническая система может быть описана системой линейных или нелинейных уравнений, дифференциальным уравнением и т.д.

Этапы численного решения задач на ЭВМ

Разработка метода и алгоритма решения задачи. Многие задачи не могут быть решены в *аналитическом виде*. Поэтому существует необходимость разработки *численных методов,* представленных в виде *алгоритма*, т.е. в виде упорядоченной последовательности операций, позволяющих из исходных данных получить конечный результат.

Этапы численного решения задач на ЭВМ

Алгоритм записывается на одном из алгоритмических языков в виде *компьютерной* программы. Далее осуществляется *отладка программы*, во время которой выявляются ошибки, и проверяется правильность решения задачи на *тестовых данных*. После того как программа отлажена выполняются расчеты по исследованию составленной модели.

Виды погрешностей решения задач

1)погрешность математической модели;

2)погрешность исходных данных;

3)погрешность численного метода;

4)погрешность округления.

Виды погрешностей решения задач

Погрешность математической модели зависит от допущений при получении математической модели физического процесса.

Погрешность математической модели – это вопрос, относящийся к проблеме *адекватности* математической модели

Виды погрешностей решения задач

Погрешность исходных данных появляется из-за неточности измерений, грубых просмотров или невозможности представить исходные данные конечной десятичной дробью. Погрешность результата, вызванная погрешностью исходных данных, называется *неустранимой*. Если неустранимая погрешность является недопустимо большой, то задача называется *некорректно поставленной*.

Виды погрешностей решения задач

Погрешность численного метода связана с тем, что точные операторы заменяются приближенными, например, интеграл заменяется суммой, функция – многочленом, или строится бесконечный итерационный процесс, который обрывается после конечного числа итераций. *Численный метод необходимо подбирать таким образом, чтобы погрешность метода была в 2 – 5 раз меньше погрешности исходных данных.*

Виды погрешностей решения задач

Погрешность округления связана с округлением чисел, участвующих в операциях, поскольку числа в памяти компьютера хранятся с удержанием лишь конечного числа их значащих цифр.

Оценка погрешностей результатов действий над приближенными значениями чисел

Абсолютная погрешность $\Delta_x = x - \tilde{x}$

Относительная погрешность $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta_x}{\tilde{x}}$

Оценка погрешностей результатов действий над приближенными значениями чисел

Абсолютная погрешность суммы равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых

$$z = x + y = \tilde{x} + \Delta_x + \tilde{y} + \Delta_y = (\tilde{x} + \tilde{y}) + (\Delta_x + \Delta_y) = \tilde{z} + \Delta_z$$

$$\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y$$

Аналогично для вычитания получаем

$$\Delta_{x-y} = \Delta_x - \Delta_y$$

Оценка погрешностей результатов действий над приближенными значениями чисел

Для операции умножения

$$z = xy = (\tilde{x} + \Delta_x)(\tilde{y} + \Delta_y) = \tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x}\Delta_y + \tilde{y}\Delta_x + \Delta_x\Delta_y$$

$$z = xy \approx \tilde{x}\tilde{y} + (\tilde{x}\Delta_y + \tilde{y}\Delta_x)$$

$$\Delta_{xy} \approx \tilde{x}\Delta_y + \tilde{y}\Delta_x$$

Абсолютная погрешность деления

$$\Delta_{x/y} \approx \frac{\tilde{y}\Delta_x - \tilde{x}\Delta_y}{\tilde{y}^2}$$

Оценка погрешностей результатов действий над приближенными значениями чисел

Для относительных погрешностей арифметических операций

$$\delta_{x+y} = \frac{\Delta_{x+y}}{\tilde{x}+\tilde{y}} = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{\tilde{x}+\tilde{y}} = \frac{\Delta_x}{\tilde{x}+\tilde{y}} + \frac{\Delta_y}{\tilde{x}+\tilde{y}} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}+\tilde{y}}\frac{\Delta_x}{\tilde{x}} + \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}+\tilde{y}}\frac{\Delta_y}{\tilde{y}}$$

$$\delta_{x+y} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}+\tilde{y}}\delta_x + \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}+\tilde{y}}\delta_y$$

$$\delta_{xy} \approx \frac{\Delta_{xy}}{\tilde{x}\tilde{y}} = \frac{\tilde{x}\Delta_y}{\tilde{x}\tilde{y}} + \frac{\tilde{y}\Delta_x}{\tilde{x}\tilde{y}} = \delta_x + \delta_y$$

$$\delta_{x-y} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{y}}\delta_x - \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}-\tilde{y}}\delta_y$$

$$\delta_{x/y} \approx \frac{\Delta_{x/y}}{\tilde{x}/\tilde{y}} = \frac{\dfrac{\Delta_x}{\tilde{y}} - \dfrac{\tilde{x}}{\tilde{y}^2}\Delta_y}{\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{y}}} = \frac{\tilde{y}\Delta_x - \tilde{x}\Delta_y}{\tilde{x}\tilde{y}} = \delta_x - \delta_y$$

Основы работы в Mathcad

MathCAD – один из самых популярных математических пакетов, который позволяет проводить различные вычисления, в принятых в математике обозначениях. Используя MathCAD, можно решать следующие задачи в символьном и численном виде:

- простейшие расчеты по формулам, используя MathCAD, как инженерный калькулятор;
- решение нелинейных уравнений и систем;
- решение задач линейной алгебры;
- решение задач оптимизации, в том числе задач математического программирования;
- дифференцирование и интегрирование;
- задачи обработка экспериментальных данных (интерполяция и аппроксимация, метод наименьших квадратов);
- задачи математической статистики и теории вероятностей;
- финансовые расчеты;
- решение обыкновенных дифференциальных уравнений и систем;
- решение дифференциальных уравнений в частных производных.

Кроме того, в MathCAD предоставляет широкие возможности по созданию и редактированию различных графиков.

Пакет математических вычислений MathCAD позволяет обмениваться данными с другими приложениями Excel, Matlab, Axum и др.