Лекция 2
Решение линейных и нелинейных уравнений в средах MS Excel и Mathcad

Лектор

Ст. преподаватель Купо А.Н.

1. Решение уравнений с одним неизвестным. Дихотомия.
2. Метод хорд. Метод касательных. Метод секущих.
3. Метод простой итерации для алгебраических и трансцендентных уравнений.
4. Встроенные функции Mathcad для решения нелинейных уравнений.
5. Построение и оформление графиков функций в системе Mathcad. Управление формой графика. Инструменты для обработки графика.

Общие сведения о решении нелинейного уравнения

Как правило, нелинейное уравнения общего вида $f(x)=0$ невозможно решить аналитически. Для практических задач достаточно найти приближенное значение x, в определенном смысле близкое к точному решению уравнения $x_{точн}$.

В большинстве случаев поиск приближенного решения включает два этапа. На первом этапе *отделяют* корни, т. е. находят такие отрезки, внутри которых находится строго один корень. На втором этапе *уточняют* корень на одном из таких отрезков, т.е. находят его значение с требуемой точностью.

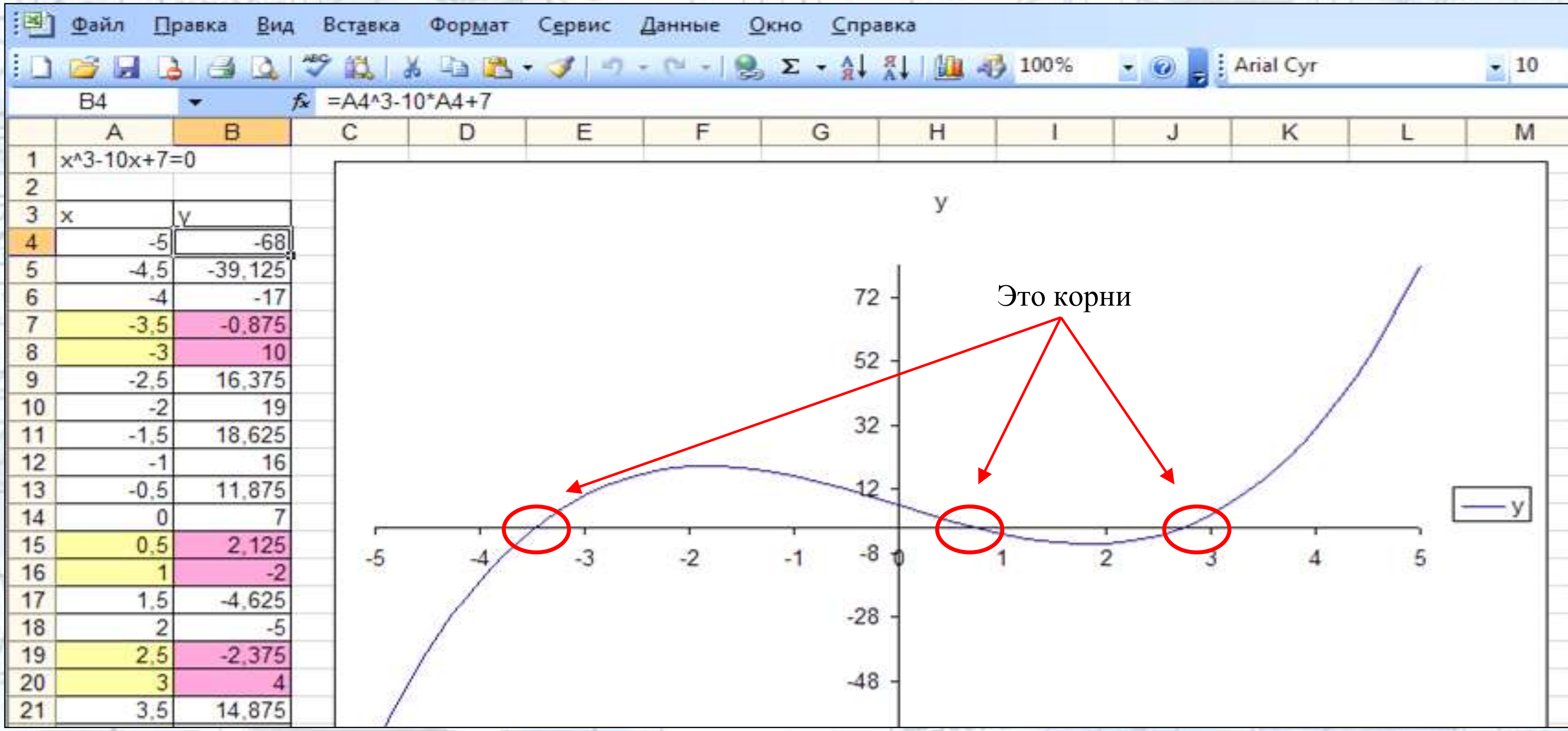
Достигнутая точность может оцениваться либо «по функции» (в найденной точке x, функция достаточно близка к 0, т.е. выполняется условие $|f(x)|\le \varepsilon_f$, где ε_f требуемая точность по оси ординат), либо «по аргументу» (найден достаточно маленький отрезок $[a,b]$, внутри которого находится корень, т.е. $|b–a|\le \varepsilon_x$, где ε_x требуемая точность по оси абсцисс).

Отделение корней

Отделение корней может производиться сочетанием графического и аналитического исследования функции. Такое исследование опирается на теорему Вейерштрасса, в соответствии с которой для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ и любого числа y, отвечающего условию $f(a) \le y \le f(b)$, существует на этом отрезке точка x, в которой функция равна y. Следовательно, для непрерывной функции достаточно найти отрезок, на концах которого функция имеет разные знаки, и можно быть уверенным, что на этом отрезке есть корень уравнения $f(x)=0$.

Для ряда методов уточнения желательно, чтобы найденный на первом этапе отрезок содержал только один корень уравнения. Это условие выполняется, если функция на отрезке монотонна. Монотонность, можно проверить либо по графику функции, либо по знаку производной.

__Пример__ Найти с точностью до целых __все__ корни нелинейного уравнения $y(x)=x^3 - 10x + 7=0$ а) построив таблицу и б) построив график. Найти корень уравнения на выделенном отрезке, используя опции «Подбор параметра» и «Поиск решения».



	A	B
1	x^3-10x+7=0	
2		
3	x	y
4	-5	-68
5	-4,5	-39,125
6	-4	-17
7	-3,5	-0,875
8	-3	10
9	-2,5	16,375
10	-2	19
11	-1,5	18,625
12	-1	16
13	-0,5	11,875
14	0	7
15	0,5	2,125
16	1	-2
17	1,5	-4,625
18	2	-5
19	2,5	-2,375
20	3	4
21	3,5	14,875

Во всех методах уточнения корней необходимо задать начальное приближение, которое затем и будет уточняться. Если уравнение имеет несколько корней, в зависимости от выбранного начального приближения будет найден один из них. При неудачно выбранном начальном приближении решение может и не быть найдено. Если в результате первого этапа расчетов уже выделен отрезок, содержащий единственный корень уравнения, в качестве начального приближения можно взять любую точку этого отрезка.

В Mathcad для уточнения корней уравнения можно использовать функцию *root(....)* или блок решения. Пример использования функции root(…) приведен на рисунке 4, а блока решения на рисунке 5. Следует обратить внимание, что в блоке решения (после заголовка блока *Given*) между левой и правой частями уравнения должен стоять жирный знак равенства (тождества), который можно получить выбором из соответствующей палитры инструментов, либо нажатием одновременно клавиши *Ctrl* и =.

$$f(x) := x^3 - 10 \cdot x + 7$$

$$x := -3.5$$

$$f(r) = -0.00000000000009$$

$$r = -3.46685999$$

$$r := \mathrm{root}(f(x), x)$$

$$f(r) = -0.00000000000001$$

$$f(x) := x^3 - 10 \cdot x + 7$$

$$x := -3.5$$

Giver $\quad f(x) = 0 \quad r := \mathrm{find}(x)$

$$r = -3.46685999$$

Далее рассмотрены несколько наиболее распространенных методов.

При прочих равных условиях <u>тот метод</u> уточнения корней будет более эффективен, в котором результат с той же погрешностью найден с <u>меньшим</u> числом вычислений функции *f(x)* (при этом достигается и максимальная точность при одинаковом числе вычислений функции).

Метод деления отрезка пополам

В этом методе на каждом шаге отрезок делится на две равные части. Затем сравнивают знаки функции на концах каждой из двух половинок (например, по знаку произведения значений функций на концах), определяют ту из них, в которой содержится решение (знаки функции на концах должны быть разные), и. сужают отрезок, перенося в найденную точку его границу (a или b). Условием окончания служит малость отрезка, где содержится корень («точность по x»), либо близость к 0 значения функции в средине отрезка («точность по y»). Решением уравнения считают середину отрезка, найденного на последнем шаге.

<u>Пример</u>. Построить таблицу для уточнения корня уравнения $x^3 - 10x+7=0$ на отрезке $[-4, -3]$ методом деления отрезка пополам. Определить сколько шагов надо сделать методом деления отрезка пополам и какая при этом достигается точность по x, для достижения точности по y, равной 0,1; 0,01; 0, 001.

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

B28 f_x =ЕСЛИ(E27*F27>0;C27;B27)

	A	B	C	D	E	F	G	H
26	№	a	c	b	f(a)	f(c)	f(b)	ε
27	1	-4	-3,5	-3	-17	-0,875	10	0,5
28	2	-3,5	-3,25	-3	-0,875	5,171875	10	0,25
29	3	-3,5	-3,375	-3,25	-0,875	2,306641	5,171875	0,125
30	4	-3,5	-3,4375	-3,375	-0,875	0,756104	2,3	
31	5	-3,5	-3,46875	-3,4375	-0,875	-0,049286	0,7	
32	6	-3,46875	-3,45313	-3,4375	-0,04929	0,355938	0,7	
33	7	-3,46875	-3,46094	-3,45313	-0,04929	0,15396	0,3	
34	8	-3,46875	-3,46484	-3,46094	-0,04929	0,052496	0,	
35	9	-3,46875	-3,4668	-3,46484	-0,04929	0,001644	0,0	
36	10	-3,46875	-3,46777	-3,4668	-0,04929	-0,023811	0,0	
37	11	-3,46777	-3,46729	-3,4668	-0,02381	-0,011081	0,0	
38	12	-3,46729	-3,46704	-3,4668	-0,01108	-0,004717	0,0	
39	13	-3,46704	-3,46692	-3,4668	-0,00472	-0,001536	0,0	
40	14	-3,46692	-3,46686	-3,4668	-0,00154	0,0000541	0,0	

$$f(x) := x^3 - 10 \cdot x + 7$$

$$a_0 := -4 \quad b_0 := -3 \quad x_0 := \frac{a_0 + b_0}{2} \qquad N := 10 \quad k := 0..10$$

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ x_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} := \text{if}\left[f(a_k)\cdot f(x_k) \le 0, \begin{pmatrix} a_k \\ \dfrac{a_k + x_k}{2} \\ x_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_k \\ \dfrac{x_k + b_k}{2} \\ b_k \end{pmatrix} \right]$$

$a_k =$	$x_k =$	$b_k =$	$f(x_k) =$	$\frac{b_k - a_k}{2} =$
-4.0000	-3.5000	-3.0000	-0.8750	0.5000
-3.5000	-3.2500	-3.0000	5.1719	0.2500
-3.5000	-3.3750	-3.2500	2.3066	0.1250

Метод хорд

В этом методе нелинейная функция *f(x)* на отделенном интервале [*a,b*] заменяется линейной – уравнением хорды, т.е. прямой соединяющей граничные точки графика на отрезке. Условие применимости метода – монотонность функции на начальном отрезке, обеспечивающая единственность корня на этом отрезке. Расчет по методу хорд аналогичен расчету методом деления отрезка пополам, но теперь на каждом шаге новая точка x внутри отрезка $[a,b]$ рассчитывается по любой из следующих формул:

$$x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a) = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(b) = \frac{f(b)a - f(a)b}{f(b)-f(a)}$$

Метод Ньютона (касательных)

Идея, на которой основан метод, аналогична той, которая реализована в методе хорд, только на каждом шаге кривая $f(x)$ заменяется касательной к ней, проведенной в предыдущей найденной точке. В качестве начальной точки в зависимости от свойств функции берется или левая граница отрезка, содержащего корень – $x_0 = a$ (если $f(a)\,f''(x) > 0$), или правая его граница: $x_0 = b$ (если $f(b)\,f''(x)>0$). Расчет нового приближения на следующем шаге $i+1$ производится по формуле:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f\left(x_i\right)}{f'\left(x_i\right)}$$

Для оценки «точности по х» нужно отслеживать разницу приближений на предыдущем и последующих шагах, которая связана с разницей между найденным приближением и точным значением корня.

Главным достоинством метода касательных является **квадратичная скорость сходимости**, что во многих случаях может привести к сокращению числа вычислений функции.

Наиболее трудоемким элементом расчетов по методу Ньютона является вычисление производной на каждом шаге.

При определенных условиях может использоваться **упрощенный метод Ньютона**, в котором производная вычисляется только один раз – в начальной точке. При этом используется видоизмененная формула

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_0)}$$

Естественно, что упрощенный метод, как правило, требует большего числа шагов.

Если вычисление производной связано с серьезными трудностями (например, если функция задана не аналитическим выражением, а вычисляющей ее значения программой) используется модифицированный метод Ньютона, получивший название – **метод секущих**. Здесь производная приближенно вычисляется по значениям функции в двух последовательных точках, то есть используется формула

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Комбинированный метод

Можно показать, что если на начальном отрезке у функции *f(x)* сохраняются неизменными знаки первой и второй производных, то методы хорд и Ньютона приближаются к корню с разных сторон. В комбинированном методе для повышения эффективности на каждом шаге использует оба алгоритма одновременно. При этом интервал, где содержится корень, сокращается с обеих сторон, что обусловливает другое условие окончания поиска. Поиск можно прекратить, как только в середине интервала, полученного на очередном шаге значение функции станет по модулю меньшим, чем предварительно заданной погрешности ε_f.

Если, в соответствии со сформулированным выше правилом, метод Ньютона применяется к правой границе отрезка, для вычислений используются формулы:

$$a_{i+1} = a_n - \frac{f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}(b_i - a_i) \qquad b_{i+1} = b_i - \frac{f(b_i)}{f'(b_i)}$$

Метод итераций

Для применения этого метода исходное уравнение $f(x)=0$ преобразуют к виду: $x=\psi(x)$. Затем выбирают начальное значение x_0 и подставляют его в левую часть уравнения, получая, в общем случае, $x_1=\psi(x_0) \neq x_0 \neq \psi(x_1)$, поскольку x_0 взято произвольно и не является корнем уравнения. Полученное значение x_1 рассматривают как очередное приближение к корню. Его снова подставляют в правую часть уравнения и получают следующее значение $x_2=\psi(x_1)$). Расчет продолжают по формуле $x_{i+1}=\psi(x_i)$. Получающаяся таким образом последовательность: x_0, x_1, x_2, x_3 x_4,... при определенных условиях сходиться к корню $x_{точн}$.

Можно показать, что итерационный процесс сходится при условии $|\psi'(x)| < 1$ на $[a, b]$.

Метод итераций

Существуют различные способы преобразования уравнения *f(x)* = 0 к виду $\psi(x) = x$, причем в конкретном случае одни из них приведут к сходящемуся, а другие – к расходящемуся процессу вычислений.

Один из способов, заключается в применении формулы

$$\psi(x) = x - \frac{f(x)}{k},$$

причем *k* следует выбирать так, чтобы $|k| > Q/2$, где $Q = max|f'(x)|$ на отрезке [*a*, *b*] и знак *k* совпадал бы со знаком $f'(x)$ на [*a*, *b*].

Точность вычислений можно оценить из соотношения

$$|x_{точн} - x_n| \le \frac{M^n}{1-M} \cdot |x_1 - x_0|,$$

где $M = \max|\psi'(x)|$ на [*a*, *b*].