Лекция 6
Обработка экспериментальных данных

Лектор

Ст. преподаватель Купо А.Н.

1. Общие понятия теории измерений

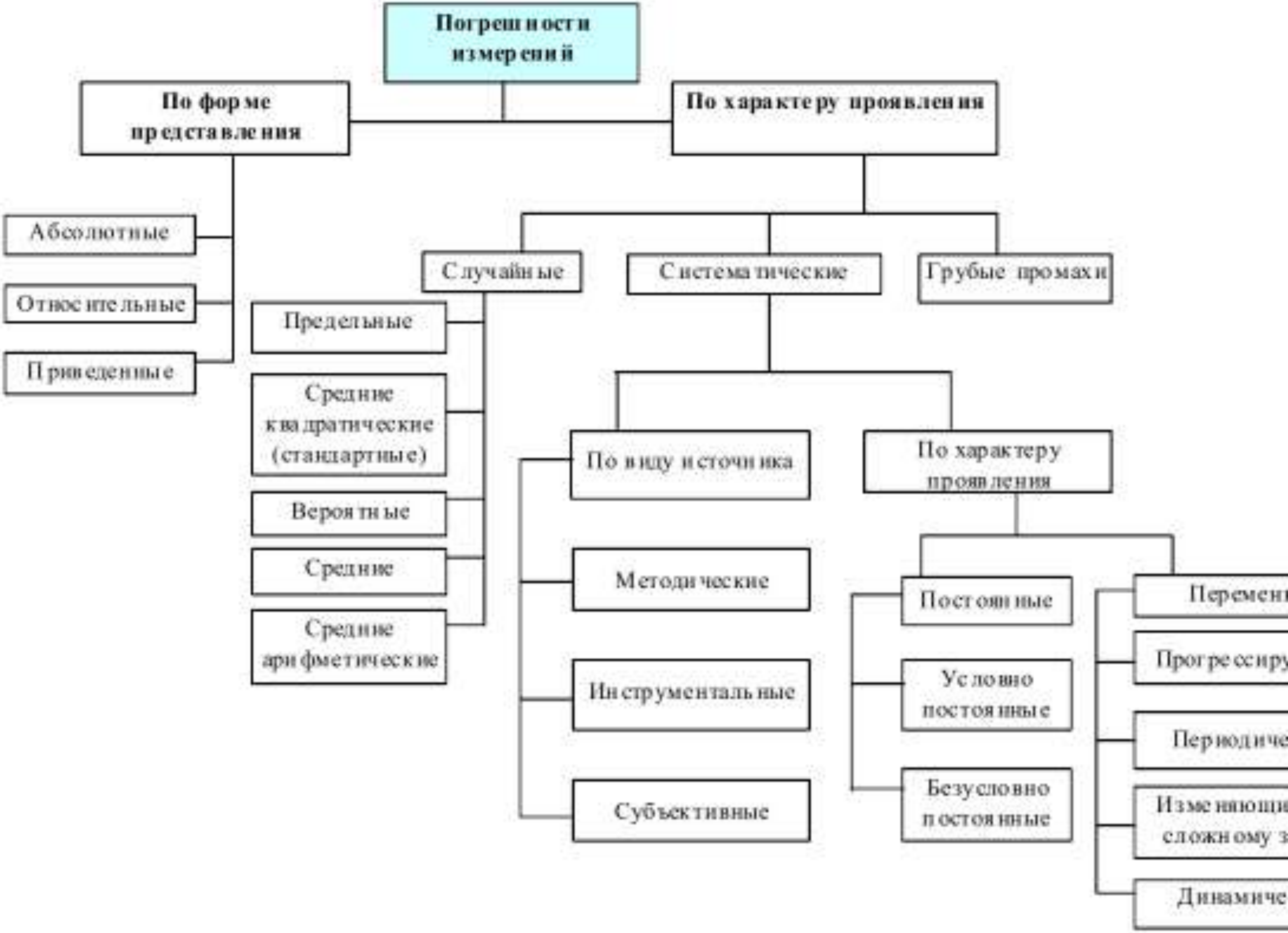
2. Постановка задачи об определении погрешности. Алгоритмы математической обработки результатов измерений.

3. Аппроксимация функций. Регрессия.

4. Метод наименьших квадратов. Полиномиальная аппроксимация.

5. Встроенные функции для линейной регрессии.

Технические
Лабораторные (исследовательские)
С точным оцениванием погрешнос
С приближенным оцениванием по
По точности оценки
ократные
ократные
По числу измерений величины
По воздействию на объект
Бесконт
Контакт
ходимые
ыточные
По степени достаточности измерений
Виды измерений
По методу
Непосредст
Сравнения
Дополнения
Противопос
Дифференц
Нулевой
Замещения
По способу получения результата
По характеру результата измерений
По условиям измерений
Прямые (непосредственны
Косвенные
Совокупные
Совместные
Динамические
Абсолютные
ковые (пороговые)
Относительные
Равноточные
Неравноточные


Погрешности измерений
По форме представления
По характеру проявления
Абсолютные
Относительные
Приведенные
Случайные
Систематические
Грубые промахи
Предельные
Средние квадратические (стандартные)
Вероятные
Средние
Средние арифметические
По виду источника
По характеру проявления
Методические
Инструментальные
Субъективные
Постоянные
Условно постоянные
Безусловно постоянные
Перемен
Прогрессиру
Периодиче
Изменяющи
сложному з
Динамиче

При любом измерении неизбежно возникают ошибки (погрешности измерений), приводящие к отклонению измеренного значения x от истинного значения x_0 измеряемой величины X. Поэтому при записи результата измерений или вычислений принципиально важна оценка точности полученного числа. В физическом эксперименте результат представляется в виде:

$$X = (54,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-2}\ \text{м} \qquad \alpha = 0,7.$$

Такое представление означает, что истинное значение величины X с вероятностью 70% находится в диапазоне от $54,1 \cdot 10^{-2}$ м до $54,5 \cdot 10^{-2}$ м на числовой оси.

Чтобы охарактеризовать точность измерения, вводят относительную погрешность:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}\ .$$

Как следует из теории погрешностей [1], за наиболее вероятное значение измеряемой величины X обычно принимают ее среднее арифметическое значение, вычисленное по результатам n равноточных измерений:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,, \qquad (3)$$

при этом n должно быть достаточно большим.

Отклонения измеренных значений от среднего $\overline{x} - x_i$ носят случайный характер и подчиняются статистическим закономерностям. Как известно из опыта, для большого числа n равноточных измерений распределение случайных ошибок измерений $\Delta x_i = \overline{x} - x_i$ подчиняется нормальному или «гауссовскому» закону. Т.е. ошибки измерений могут принимать непрерывный ряд значений; при большом числе равноточных измерений ошибки одинаковой величины, но противоположного знака встречаются одинаково часто; малые ошибки более вероятны, чем большие.

Задавая значение доверительной вероятности α, рассчитывают случайную погрешность Δx_α и определяют, таким образом, доверительный интервал $\left[\overline{x} - \Delta x_\alpha, \overline{x} + \Delta x_\alpha\right]$.

Случайная погрешность определяется по формуле:

$$\Delta x_\alpha = t_{\alpha n} \cdot S_x \qquad (4)$$

S_x называется средней квадратической погрешностью и вычисляется по формуле:

$$S_x = \left[\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\overline{x} - x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

величина $t_{\alpha n}$ называется коэффициентом Стьюдента и определяется по таблице для заданных значений α и n [1] .

Табл. 1. Коэффициенты Стьюдента.

n	α									
	0,10	0,20	0,30	0,40	0.50	0,60	**0,70**	0,80	0,90	0,99
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	63,7
3	0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	9,9
4	0,14	0,28	0,42	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	5,8
5	0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	**1,2**	1,5	2,1	4,6
6	0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	4,0
7	0,13	0,27	0,40	0,55	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	3,7
8	0,13	0,26	0,40	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	3,5
9	0,13	0,26	0,40	0,54	0,71	0,89	1,1	1,4	1,9	3,4
10	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	3,3
….										
40	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,7

Систематические ошибки, связанные с ограниченной точностью приборов, подлежат учету.

Характеристики электроизмерительных приборов:

Предел измерения – максимальное значение измеряемой данным прибором величины. У одного прибора может быть несколько пределов измерения.

Цена деления – для равномерной шкалы это величина, равная пределу измерения прибора, деленному на число делений шкалы.

Класс точности – число, равное максимальной относительной погрешности в процентах, которую вносит прибор при измерении на пределе используемой шкалы. Это число определяет максимальную абсолютную погрешность измерения данным прибором. Класс точности электроизмерительных приборов, как правило, указан на лицевой части прибора в виде отдельного числа: 0.2 или 0.5 или 1.0 или 1.5 и т.д.

Рассмотрим миллиамперметр, предел измерения которого равен 150 мА; число делений шкалы 30; цена деления 150:30=5 мА; класс точности 2.0. Максимальная абсолютная погрешность (приборная погрешность):

$$\Delta x_{пр} = \frac{Предел\ измерения \times класс\ точности}{100} = \frac{150 \times 2}{100} = 3\ \text{мА}$$

Вероятность, с которой истинное значение величины X не выйдет за границы интервала $x \pm \Delta x_{пр}$, близка к единице (полагаем при этом, что случайная погрешность не играет роли, и вся погрешность определяется погрешностью прибора). Для удобства сложения приборной и случайной погрешностей доверительную вероятность, для которой вычисляется случайная погрешность, в этом случае желательно брать близкой к единице. Например, $\alpha = 0{,}95$.

Для окончательной записи результата прямых равноточных измерений вычисляется погрешность измерений, учитывающая как случайную, так и систематическую погрешности измерения. В теории ошибок [2] суммарную погрешность прямых измерений определяют по формуле:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\alpha}{}^{2} + \Delta x_{пр}{}^{2}}. \qquad (6)$$

Если одна из погрешностей Δx_{α} или $\Delta x_{пр}$ превышает другую более, чем в 3 раза, меньшей погрешностью можно пренебречь.

Определение погрешности косвенного измерения.

Формулы вычисления погрешностей косвенных измерений основаны на представлениях дифференциального исчисления.

Пусть зависимость величины *Y* от измеряемой величины *Z* имеет простой вид:

$$y = az + b\,.$$

Здесь a и b - постоянные, значения которых известны. Если z увеличить или уменьшить на некоторое число Δz, то y соответственно изменится на $a\Delta z$:

$$\Delta y = a\Delta z$$

$$\Delta y \approx \frac{df(z)}{dz}\Delta z = \frac{dy}{dz}dz$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dz}\cdot\Delta z$$

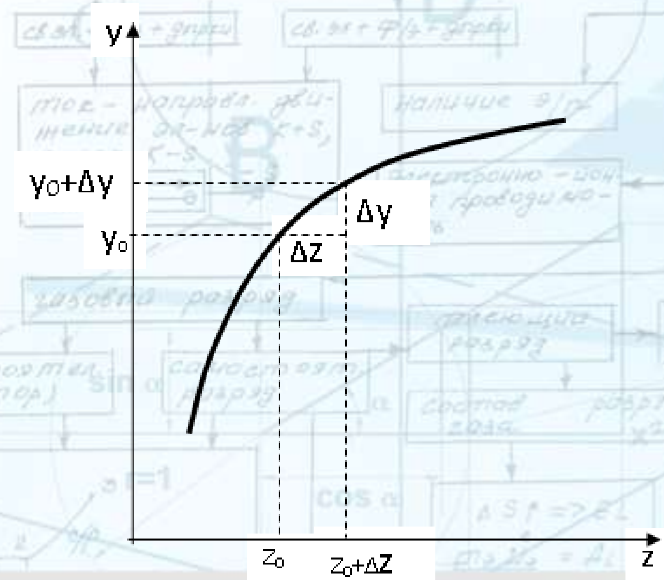


Рис. 1

Если косвенное измерение представляет собой функцию m переменных $y = f\left(z_1, z_2, \ldots z_j, \ldots z_m\right)$, то погрешность косвенного измерения будет зависеть от погрешностей Δz_j прямых измерений z_j. Частную погрешность, связанную с ошибкой измерения аргумента z_j, обозначим Δy_j. Она составляет приращение функции за счет приращения Δz_j при условии, что все остальные аргументы неизменны. Таким образом, частную абсолютную погрешность запишем согласно (10) в следующем виде:

$$\Delta y_j = \frac{\partial y}{\partial z_j} \cdot \Delta z_j \tag{13}$$

Таким образом, чтобы найти частную погрешность косвенного измерения Δy_j, надо, согласно (13), частную производную $\frac{\partial y}{\partial z_j}$ умножить на погрешность прямого измерения Δz_j. При вычислении частной производной функции по z_j остальные аргументы считаются постоянными.

Результирующая абсолютная погрешность Δy косвенного измерения определяется по формуле, в которую входят квадраты частных погрешностей косвенного измерения [1]:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \Delta y_j^2}$$

или с учетом (13)

$$\Delta y = \left[\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial y}{\partial z_j} \cdot \Delta z_j \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

Относительная погрешность косвенного измерения δy определяется по формуле:

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{y} \left[\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial y}{\partial z_j} \cdot \Delta z_j \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Правила округления

Ввиду наличия погрешностей измерений не имеет смысла проводить излишне точные вычисления. Вычисления должны проводиться лишь с такой точностью, которая не увеличивает погрешность измерений, не более того. С учетом этого вводятся правила округления при проведении вычислений.

Окончательный результат лабораторной работы (результат косвенного измерения) рекомендуется округлять следующим образом.

1. В относительной погрешности оставить две значащие цифры. Пример: $\delta R = 0{,}12$.

2. В абсолютной погрешности оставить одну значащую цифру. Пример: $\Delta R = 0{,}03$ кОм.

3. У среднего значения последняя значащая цифра должна находиться в том же десятичном разряде, что и значащая цифра абсолютной погрешности. Пример: $R = (3{,}34 \pm 0{,}03)\cdot 10^3$ Ом.

Промежуточные вычисления делают с одной дополнительной значащей цифрой, что дает возможность точнее округлить окончательный результат. В частности, абсолютные погрешности прямых измерений следует вычислять с двумя значащими цифрами. Промежуточные расчеты физических величин можно рекомендовать выполнять с четырьмя значащими цифрами; такой точности достаточно для всех лабораторных работ, но для большинства работ достаточно и трех значащих цифр.

regress(vx, vy, n) or **regress(Mx, vy, n)** Returns a vector which **interp** uses to find the nth order polynomial that best fits the x and y data values in **vx** and **vy** in the least-squares sense. Can also be used for multivariate regression, where a matrix **Mx** of k independent variables and a vector of dependent values, **vy**, are used to fit an nth order polynomial surface in k dimensions.
interp(vs, vx, vy, x) or **interp(vs, Mx, vy, X)** Returns an interpolated y-value corresponding to x using the output vector **vs** from **regress**. If regress has been used to fit a multidimensional surface, **X** is a vector of independent variables at which to calculate the interpolated y-value.

Arguments:
•**vx** and **vy** are the vectors of real data values with the same length.
•**Mx** is a matrix of real data values. There is one column for each independent variable (k columns). In this case, **vy** has the same number of rows as **Mx**.
•**vs** is a vector generated by **regress**.
•n is a positive integer specifying the order of the polynomial you want to use to fit the data. The order of the polynomial cannot exceed the number of data points. If you want a 4th order polynomial in one variable, you must have at least 4 data points.
•x is the real value of the independent variable at which you want to evaluate the regression curve.
•**X** is the vector of values of the independent variables at which you want to evaluate the regression surface.