Лекция 7 Дифференциальные уравнения. Задача Коши

Лектор

Ст. преподаватель Купо А.Н.

1. Дифференциальные уравнения. Задача Коши для ОДУ-1.
2. Явный метод Эйлера, его точность и устойчивость.
3. Методы Рунге-Кутта.
4. Программная реализация методов численного решения ОДУ-1.
5. Встроенные функции Mathcad для систем ОДУ-1

Соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где F – некоторая функция независимой переменной x, функции $y = y(x)$ и ее производных $y' = y'(x) = \dfrac{dy(x)}{dx}$, $y'' = y''(x) = \dfrac{dy^2(x)}{dx^2}$, …, $y^{(n)} = \dfrac{d^n y(x)}{dx^n}$, называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Решить уравнение – значит найти функцию, превращающую равенство (6.1) в тождество. Существует понятие *общего* и *частного* решения этого дифференциального уравнения. *Общее* решение (общий интеграл) – это формула, дающая все решения данного уравнения. Обычно общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка (6.1) зависит от n постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, которые могут выбираться произвольно. Решение, которое не зависит от произвольных постоянных, называется *частным* решением дифференциального уравнения (частным интегралом).

График каждого частного решения называется *интегральной кривой*. Чаще всего для обыкновенного дифференциального уравнения (6.1) формулируется так называемая ***задача Коши***, когда дополнительно к уравнению (6.1) задают значения функции и ее производных до $(n-1)$-го порядка в некоторой точке x_0. Эти дополнительные данные называются начальными условиями. Наличие начальных условий позволяет получить частное решение дифференциального уравнения.

Процесс решения дифференциального уравнения называется его *интегрированием*. Интегрирование дифференциального уравнения вовсе не означает, что этот процесс сводится к вычислению интеграла. Если же решение дифференциального уравнения действительно свелось к вычислению интеграла, то говорят, что уравнение решено *в квадратурах*.

Методы решения дифференциальных уравнений бывают точные, приближенные и численные. Точные методы дают решение, которое можно выразить через элементарные функции. Получить точное решение дифференциального уравнения можно не всегда. Например, решение уравнения $y' = x^2 + y^2$ не выражается через элементарные функции. Приближенные методы дают решение в виде некоторой последовательности функций $y_m(x)$, сходящейся к решению $y(x)$ при $m \to \infty$. Численные методы дают решение в виде таблицы значений функции $y(x)$. Мы будем заниматься численными методами решения дифференциальных уравнений.

рассмотрим методы решения дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{6.2}$$

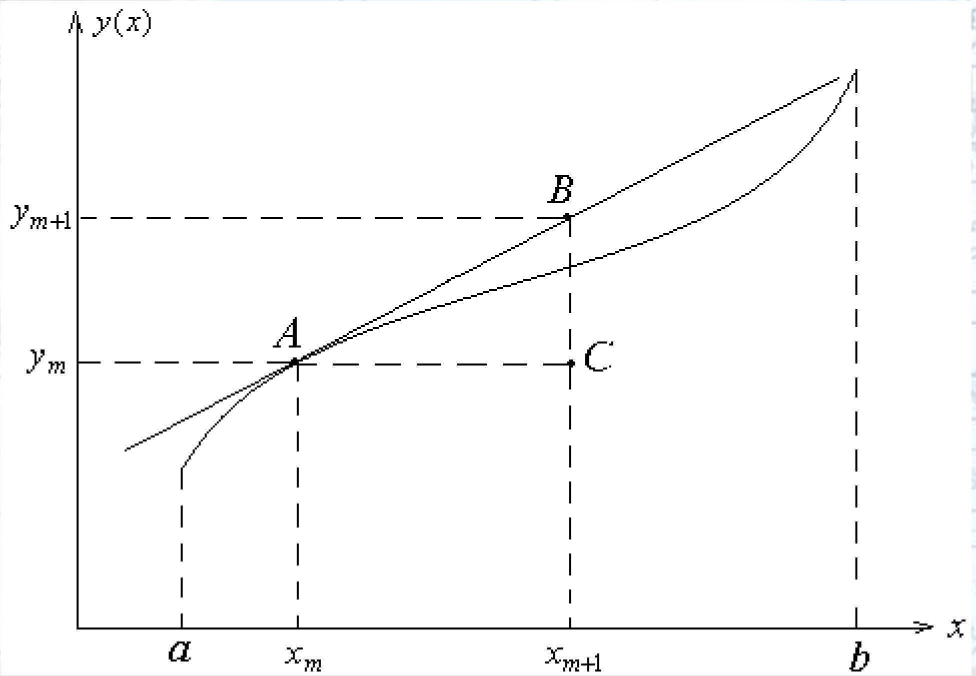
с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Метод Эйлера

Этот метод решения уравнения (6.2) состоит в последовательных расчетах по формуле

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m), \tag{6.8}$$

начиная с точки (x_0, y_0), заданной начальными условиями x_0, $y(x_0) = y_0$. Здесь h – шаг интегрирования по независимой переменной x.



Метод Рунге-Кутта 2-го порядка

Этот метод состоит в том, чтобы организовать последовательные расчеты по формулам

$$k_1 = f(x_m, y_m),$$

$$k_2 = f(x_m + b_1 h, y_m + b_2 h k_1), \tag{6.9}$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(a_1 k_1 + a_2 k_2),$$

начиная с начальных условий (x_0, y_0). Здесь $h = x_{m+1} - x_m$ – шаг по переменной x, постоянный при всех m, a_1, a_2, b_1, b_2 – некоторые коэффициенты, которые надлежит выбрать. Обычно коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 выбираются путем сравнения формул (6.9) по точности с формулами метода рядов Тейлора.

одну из этих неизвестных можно выбрать произвольно. Выберем, например,

$$a_2 = \lambda \neq 0, \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Тогда

$$a_1 = 1 - \lambda,$$

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2\lambda}.$$

Соотношения (6.9) теперь примут вид

$$k_1 = f(x_m, y_m),$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2\lambda}, y_m + \frac{h}{2\lambda} k_1), \tag{6.16}$$

$$y_{m+1} = y_m + h\big((1-\lambda)k_1 + \lambda k_2\big).$$

Формулы (6.16) обеспечивают погрешность порядка h^3 при любом $0 < \lambda \leq 1$.

При $\lambda = \frac{1}{2}$ получаем следующую наиболее употребительную форму метода Рунге-Кутта 2-го порядка:

$$k_1 = f(x_m, y_m),$$

$$k_2 = f(x_m + h, y_m + hk_1), \tag{6.17}$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).$$

При $\lambda = 1$ получаем следующую форму метода Рунге-Кутта 2-го порядка:

$$k_1 = f(x_m, y_m),$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} k_1), \tag{6.17}$$

$$y_{m+1} = y_m + hk_2.$$

При $\lambda = \frac{2}{3}$ будем иметь формулы

$$k_1 = f(x_m, y_m),$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{3}{4} h, y_m + \frac{3}{4} hk_1), \tag{6.17}$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(k_1 + 2k_2),$$

которые обеспечивают наименьший верхний предел погрешности.