Лекция 8
Численное дифференцирование и интегрирование

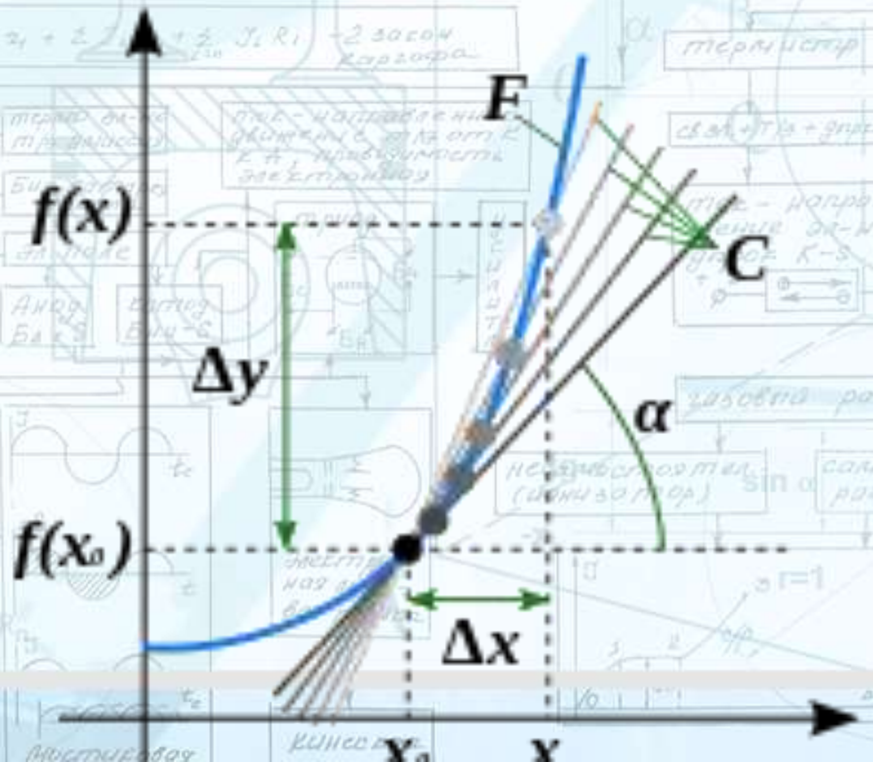
Лектор

Ст. преподаватель Купо А.Н.

1. Математическое и численное дифференцирование и интегрирование.
2. Формулы для конечно-разностных производных.
3. Интегрирование методами центральных прямоугольников, трапеций, парабол.
4. Программная реализация численных методов интегрирования в Mathcad

Произво́дная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке). Процесс вычисления производной называется **дифференци́рованием**. Обратный процесс — нахождение первообразной —интегрирование.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$



$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = \mathrm{D}f(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \dot{y}(x_0).$$

$C' = 0$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x' = 1$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{arcsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{arcch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

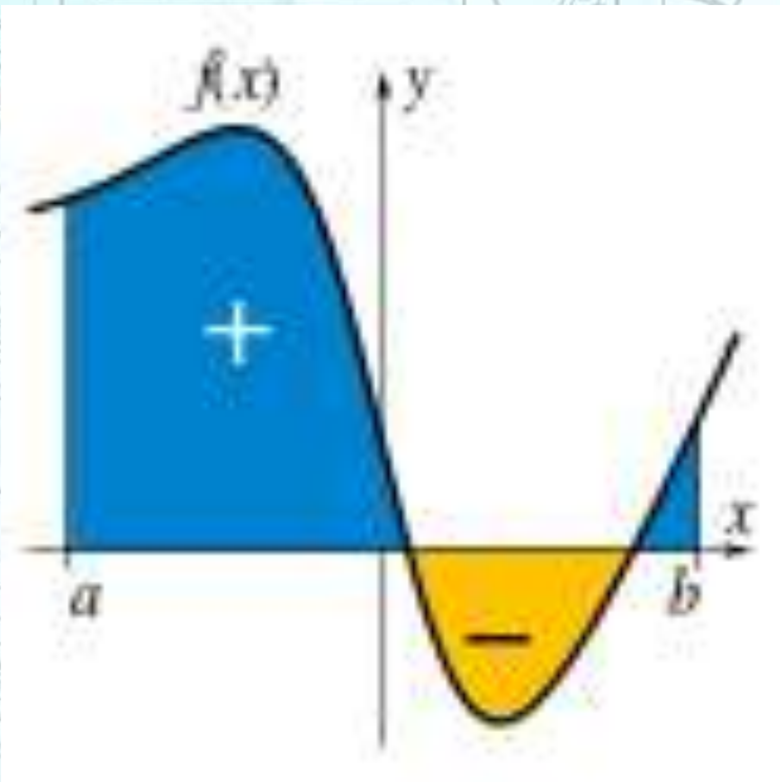
Правила дифференцирования

1.(k·f(x))′=k· f ′(x).
2.(f(x)+g(x))′=f′(x)+g′(x).
3.(f(x)·g(x))′=f′(x)·g(x)+f(x)·g′(x).
4.Производная сложной функции. Если y=F(u), а u=u(x), то функция y=f(x)=F(u(x)) называется сложной функцией от x. Равна y′(x)=Fu′·ux′.
5.Производная неявной функции. Функция y=f(x) называется неявной функцией, заданной соотношением F(x,y)=0, если F(x,f(x))≡0.
6.Производная обратной функции. Если g(f(x))=x, то функция g(x) называется обратной функцией для функции y=f(x).
7.Производная параметрически заданной функции. Пусть x и y заданы как функции от переменной t: x=x(t), y=y(t). Говорят, что y=y(x) параметрически заданная функция на промежутке x∈(a;b), если на этом промежутке уравнение x=x(t) можно выразить в виде t=t(x) и определить функцию y=y(t(x))=y(x).
8.Производная степенно-показательной функции. Находится путем логарифмирования по основанию натурального логарифма.

Интегра́л фу́нкции — аналог суммы бесконечно большого количества бесконечно малых слагаемых. В простейшем случае[1] имеется в виду разбиение области интегрирования, являющейся отрезком, на бесконечно малые отрезки, и сумма произведений значения функции аргумента, принадлежащего каждому отрезку, и длины соответствующего бесконечно малого отрезка области интегрирования, в пределе, при бесконечно мелком разбиении:

$$S = \sum_i f(x_i)\Delta x_i \to \int f(x)dx.$$

Неформально, определенный интеграл является площадью между графиком функции и осью абсцисс в пределах интегрирования, то есть площадью криволинейной трапеции.
(В случае интегрирования функции двух переменных или функции двумерной переменной по двумерной области, это будет объем под поверхностью, являющейся графиком функции; аналогично и для бо́льших размерностей).
Процесс нахождения интеграла называется ***интегрированием***.
Согласно основной теореме анализа, интегрирование является операцией, обратной дифференцированию, чем помогает решать дифференциальные уравнения.



Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

1. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C,$

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$

3. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

4. $\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \quad (a > 0),$

5. $\int e^{x} dx = e^{x} + C,$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C,$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C,$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1,$

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$

13. $\int \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + C,$

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots$ – точки действительной прямой и $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,$ – значения функции $f(x)$ в этих точках. Назовем значения $f(x_i)$ **конечными разностями нулевого порядка** функции $f(x)$. Конечными **разностями первого порядка** функции $f(x)$ называются приращения

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i),\ i = 0,1,\ldots\ .$$

Конечные разности второго порядка определяются как конечные разности от конечных разностей первого порядка:

$$\Delta^{(2)} f(x_i) = \Delta(\Delta f(x_i)) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) =$$

$$= f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) - f(x_{i+1}) + f(x_i) = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i),\ i = 0,1,\ldots\ .$$

Конечные разности третьего порядка определяются как конечные разности от конечных разностей второго порядка:

$$\Delta^{(3)} f(x_i) = \Delta(\Delta^{(2)} f(x_i)),\ i = 0,1,\ldots\ .$$

Введем понятие **разделенных разностей** функции $f(x)$. Назовем значения $f(x_i)$ в точках x_i, $i=0,1,\ldots$, **разделенными разностями нулевого порядка функции** $f(x)$. **Разделенными разностями первого порядка** функции $f(x)$ называются отношения

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \; i = 0,1,2,\ldots \, .$$

Разделенными разностями второго порядка функции $f(x)$ называются отношения

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} \; i = 0,1,2,\ldots \, .$$

Вообще, **разделенные разности** n **-го порядка** определяются через разделенные разности $(n-1)$-го порядка с помощью рекуррентного соотношения

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}) - f(x_i, \ldots, x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}, \; n = 1,2,\ldots, \; i = 0,1,2,\ldots \, .$$

Разделенные разности $f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n})$ **являются симметричными** функциями своих аргументов, т.е. не меняются при их перестановке. Например,

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = f(x_{i+1}, x_i).$$

Если $P_n(x)$ – полином степени n, то можно показать, что его **разделенная разность** $(n+1)$**-го порядка тождественно равна нулю**,

$$P_n(x, x_0, x_1, ..., x_n) = 0,$$

для любой системы попарно различных точек $x, x_0, x_1, ..., x_n$.

В случае равноотстоящих на величину h точек $x_0, x_1, x_2, \ldots$ **разделенные разности можно выразить через конечные разности**. Действительно, легко видеть, что

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{\Delta f(x_i)}{h}, \quad i = 0,1,2,\ldots,$$

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{\Delta^{(2)} f(x_i)}{2!\,h^2}, \quad i = 0,1,2,\ldots.$$

Вообще справедлива формула

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \frac{\Delta^{(n-i)} f(x_i)}{(n-i)!\,h^{n-i}}, \quad i = 0,1,2,\ldots,$$

которая при $i = 0$ приобретает вид

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\Delta^{(n)} f(x_0)}{n!\,h^n}. \qquad (3.8)$$

Из приведенного изложения можно видеть, что **конечные и разделенные разности являются прообразами производных**. Действительно, производная n-го порядка получается при равномерном шаге h из конечной разности n-го порядка путем предельного перехода

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta^{(n)} f(x)}{h^n}.$$

Задача численного интегрирования состоит в том, чтобы найти численное значение определенного интеграла

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx, \qquad (4.1)$$

где $f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке интегрирования $[a,b]$. Формулы для решения этой задачи называются квадратурными. Квадратурная формула позволяет вместо точного значения интеграла (4.1) найти некоторое его приближенное значение $\tilde{I}$. Разность точного и приближенного значений интеграла называется абсолютной погрешностью квадратурной формулы (или численного метода),

$$R = I - \tilde{I}\ .$$

Квадратурные формулы используют для вычисления интеграла (4.1) значения функции $f(x)$ в ряде точек отрезка $[a,b]$. Рассмотрим различные квадратурные формулы и их погрешности.

Разобьем отрезок интегрирования $[a,b]$ на n *частей* точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, как это показано на рис. 4.1. Заменим площадь криволинейной трапеции суммой площадей прямоугольников, построенных на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, как на основаниях. Если высоту i-го прямоугольника взять равной значению функции $f(x)$ в левой точке основания прямоугольника, т.е. принять

$$s_i = f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = y_i h_i,$$

то мы получим квадратурную формулу левых прямоугольников

$$\widetilde{I} = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} y_i h_i .$$

Для равноотстоящих на величину h узлов,

$$h = \frac{b-a}{n},$$

формула левых прямоугольников имеет вид

$$\widetilde{I} = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}).$$

Если интеграл на i-м отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ заменить площадью прямоугольника с высотой, равной значению функции $f(x)$ в правой точке основания прямоугольника, т.е. принять

$$s_i = f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) = y_{i+1}h_i,$$

то мы получим квадратурную формулу правых прямоугольников

$$\tilde{I} = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}h_i .$$

Для равноотстоящих на величину h узлов формула правых прямоугольников имеет вид:

$$\tilde{I} = h\sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} = h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \tag{4.3}$$

Абсолютная погрешность метода прямоугольников для равномерной сетки значений аргумента оценивается неравенством

$$|R| \le M_1 \frac{b-a}{2} h,$$

где $M_1 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ – максимальное по модулю значение первой производной подынтегральной функции $f(x)$ на отрезке интегрирования $[a,b]$.

Метод трапеций

Заменим площадь криволинейной трапеции суммой площадей трапеций, построенных на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, (см. рис. 4.1),

$$\widetilde{I} = \sum_{i=0}^{n-1} s_i ,$$

где

$$s_i = \frac{(f(x_i) + f(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i)}{2} = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} h_i .$$

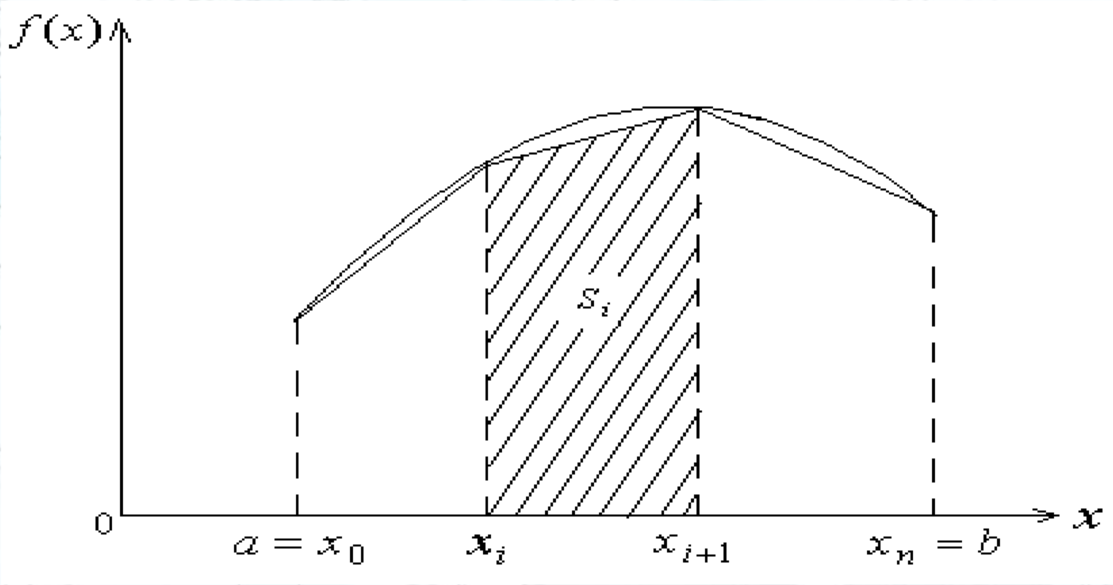


Рис. 4.1

Получим квадратурную формулу трапеций:

$$\widetilde{I} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} h_i .$$

Для равноотстоящих на величину h узлов формула трапеций имеет вид

$$\widetilde{I} = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n). \qquad (4.4)$$

Погрешность метода трапеций оценивается неравенством

$$|R| \le \frac{M_2(b-a)}{12}h^2,$$

где $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ – максимальное по модулю значение второй производной подынтегральной функции $f(x)$ на отрезке интегрирования $[a,b]$.

Метод Симпсона

Разделим точки $x_0, x_1, ..., x_n$, разбивающие отрезок интегрирования $[a, b]$ на частичные отрезки с равномерным шагом h, на тройки точек x_0, x_1, x_2, x_2, x_3, x_4 ,…, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n. Для такого разбиения число n необходимо выбрать четным. На отрезке, определяемом i -й тройкой точек $x_{2i}, x_{2i+1}, x_{2i+2}$, $i = 0,1,2,...,(n-1)/2$, заменим подынтегральную функцию параболой второго порядка $Bx^2 + Cx + D$, проходящей через точки (x_{2i}, y_{2i}), (x_{2i+1}, y_{2i+1}), (x_{2i+2}, y_{2i+2}), и заменим точное значение интеграла на этом отрезке интегралом s_i от полученной параболы. Можно показать, что

$$s_i = \frac{h}{3}(y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}).$$

Приближенное значение интеграла получим как сумму этих частичных интегралов:

$$\widetilde{I} = \sum_{i=0}^{(n-2)/2} s_i = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{(n-2)/2} (y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}) =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \qquad (4.5)$$

Погрешность метода Симпсона оценивается неравенством

$$|R| \le \frac{M_4 (b-a)}{180} h^4,$$

где $M_4 = \max |f^{(4)}(x)|$ – максимальное по модулю значение четвертой