Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 4(25), 2004

УДК 517.977

Использование сопровождающей задачи минимизации интенсивности управления для стабилизации математического маятника с двумя нелинейностями

Е. А. Ружицкая

1. Введение. Проблема стабилизации является одной из центральных в теории управления движением [1]. В классических подходах к ее решению были использованы разнообразные достаточные условия асимптотической устойчивости движения [2], которые позволяли оценить и качество переходных процессов [3]. С созданием математической теории оптимальных процессов [4] появилась возможность построения оптимальных ограниченных стабилизирующих обратных связей [5, 6].

Линейные теории составляют основу многих нелинейных теорий. Однако ими невозможно ограничиться, если иметь в виду нелокальные поведения нелинейных систем. Из-за огромного многообразия нелинейных систем рассчитывать на создание общих эффективных численных методов стабилизации нелинейных систем не приходится. Каждая нелинейная система в своем роде уникальна, поэтому общими для разных нелинейных систем могут быть лишь некоторые принципы.

В работе [7] описан один метод стабилизации нелинейной системы с двумя нелинейностями. При этом для построения стабилизирующей обратной связи использовалась вспомогательная задача минимизации расхода топлива. Цель данной работы — развить подход, предложенный в [7] и построить стабилизирующую обратную связь для нелинейной системы с двумя нелинейностями, используя вспомогательную задачу минимизации интенсивности управления.

2. Постановка задачи. Математический маятник — классический объект нелинейной механики. Задача его стабилизации в малом инерционным моментом на базе линейной модели и линейно-квадратичной задачи оптимального управления решена в [1]. При стабилизации в большом с помощью приложенного к оси подвеса момента линеаризованной модели уже недостаточно и приходится рассматривать нелинейное уравнение [8]

$$\ddot{x} + a\sin x = u. \tag{1}$$

Задача стабилизации значительно усложняется, если поведением маятника управлять с помощью горизонтальных перемещений оси подвеса. Пусть в этом случае уравнение движения маятника в области $X \subset R^n$ имеет вид:

$$\ddot{x} = \sin x - u\cos x,\ x \in X, \tag{2}$$

где x – угол отклонения маятника от вертикального верхнего положения, u — ускорение точки подвеса. Уравнение (2) в отличие от (1) содержит две нелинейности и при больших возмущениях ($\cos x_0 = 0$) неуправляемо. Состояние $(\pi, 0)$ является устойчивым нижним положением равновесия системы (2), а состояние $(0, 0)$ — неустойчивым верхним положением равновесия.

Задача подъема маятника из нижнего положения равновесия $x = 0$ в верхнее $x = \pi$ с последующей стабилизацией около нового положения исследовалась в [9, 10]. В этих работах решение задачи построения стабилизирующих обратных связей разбивалось на два этапа. На первом этапе решалась задача подъема маятника в окрестность верхнего положения с помощью накачки энергии, на втором — осуществлялась стабилизация с помощью решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления.

В данной работе задача стабилизации динамической системы (2) как единая, решается методом, разработанным в [7].

Функцию
$$u = u(x),\ x \in X, \tag{3}$$
назовем дискретной (с периодом квантования $h > 0$) стабилизирующей обратной связью, если: 1) $u(0) = 0$; 2) траектория замкнутой системы $\ddot{x} = sinx - u(x)cosx,\ x(0) = x_0 \in X$, представляет непрерывное решение уравнения $\ddot{x} = sinx - u(t)cosx,\ x(0) = x_0$, с управлением $u(t) = u(kh),\ t \in [kh, (k+1)h[,\ k = 0, 1, 2, ...$; 3) нулевое решение $x(t) \equiv 0,\ t \geqslant 0$, уравнения асимптотически устойчиво и X — область притяжения состояния равновесия $x = 0$. Требуется построить стабилизирующую обратную связь (3), которая удовлетворяет ограничению
$$|u(x)| \leqslant L,\ 0 < L < \infty, x \in X. \tag{4}$$

Такие стабилизирующие обратные связи будем называть ограниченными стабилизирующими обратными связями.

3. Алгоритм решения задачи. Выберем число $0 < \Theta = Nh < \infty$ (параметр метода), критерий качества $J(u) = \min\limits_{u(t) \in [0,\Theta]} \max |u(t)|$, и класс доступных дискретных управлений $u(t) = u(kh),\ t \in [kh, (k+1)h[,\ k = \overline{0, N-1}$.

Предположим, что для каждого начального состояния $x(0) = x_0 \in X$ существует дискретное управление $|u(t)| \leqslant L,\ 0 \leqslant t \leqslant \Theta < \infty$, которое переводит систему (2), $x(0) = x_0$, в момент $t = \Theta$ в состояние равновесия $x = 0$.

В классе доступных управлений рассмотрим вспомогательную (сопровождающую) задачу оптимального управления
$$V_\Theta(z) = \min_u \rho,$$
$$\ddot{x} = sinx - ucosx,\ x(0) = z,\ x(\Theta) = 0,\ |u(t)| \leqslant \rho,\ t \in T = [0, \Theta]. \tag{5}$$

Пусть $u^0_\Theta(t|z),\ t \in T,$ — оптимальное программное управление задачи (5), X_Θ — множество $z \in X$, для которых существует решение задачи (5).

Функцию
$$u^0_\Theta(z) = u^0_\Theta(0|z),\ z \in X_\Theta, \tag{6}$$
назовем оптимальным (стартовым) управлением типа обратной связи.

Можно показать, что функция (6) является ограниченной стабилизирующей дискретной обратной связью [7].

Получить в общем случае аналитическое решения (явную формулу) для построения ограниченной стабилизирующей обратной связи невозможно. Поэтому в работе обобщается подход [5], разработанный для линейного варианта системы (2), который заключается в решении задачи стабилизации для кусочно-линейной аппроксимации системы (2):
$$\ddot{x} = a_q(x) + b_q(x)u, \tag{7}$$
где $a_q(x),\ x \in X,$ — кусочно-линейная функция, аппроксимирующая функцию $sinx,\ x \in X$; $a_q(x),\ x \in X$, линейна в каждой из областей X_i : $intX_i \bigcap intX_j = \oslash,\ i \neq j$; $\bigcup\limits_{i=1}^{q} X_i = X$; $b_q(x),\ x \in X$, — кусочно-постоянная функция, аппроксимирующая функцию $cosx,\ x \in X$; она постоянна в каждой области $X_i,\ i = \overline{1, q}$.

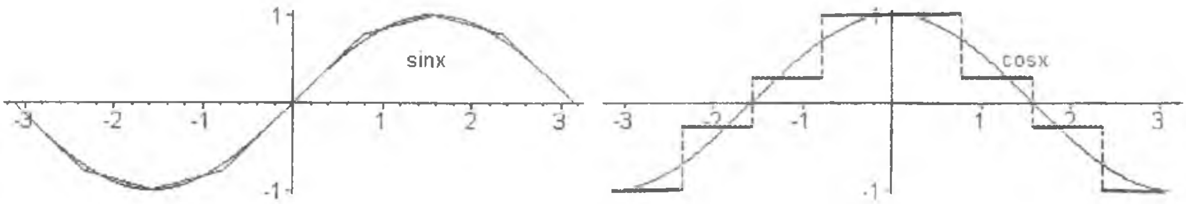

Рис. 1. Аппроксимация функций $\sin x$, $\cos x$.

Точность аппроксимации характеризуется числом

$$\delta = \max\left\{\max_{x\in X}\left[\frac{||sinx - a_q(x)||}{||sinx||}\right]; \max_{x\in X}\left[\frac{||cosx - b_q(x)||}{||cosx||}\right]\right\}.$$

Быстрые (прямые и двойственные) алгоритмы решения нескольких типов сопровождающих задач, разработанные в [11] для линейных систем, можно обобщить на кусочно-линейную систему (7). Это позволяет, следуя [12], реализовать оптимальные обратные связи в режиме реального времени, т.е. решить задачу стабилизации динамической системы (7). В качестве X возьмем область:

$$X = \{(x_1, x_2):\ -\pi \leqslant x_1 \leqslant 5\pi/4\}. \tag{8}$$

Область (8) разобьем на подобласти: $X_1 = \{(x_1, x_2):\ -\pi \leqslant x_1 \leqslant -3\pi/4\}$, $X_2 = \{(x_1, x_2):\ -3\pi/4 \leqslant x_1 \leqslant -\pi/2\}$, $X_3 = \{(x_1, x_2):\ -\pi/2 \leqslant x_1 \leqslant -\pi/4\}$, $X_4 = \{(x_1, x_2):\ -\pi/4 \leqslant x_1 \leqslant \pi/4\}$, $X_5 = \{(x_1, x_2):\ \pi/4 \leqslant x_1 \leqslant \pi/2\}$, $X_6 = \{(x_1, x_2):\ \pi/2 \leqslant x_1 \leqslant 3\pi/4\}$, $X_7 = \{(x_1, x_2):\ 3\pi/4 \leqslant x_1 \leqslant 5\pi/4\}$.

Выберем следующие аппроксимации функций $a_q(x)$ и $b_q(x)$:

$$a_q(x) = \begin{cases} -x - \pi, & x \in X_1 \\ x(1 - 4/\pi) - 3 + \pi/2, & x \in X_2 \\ x(4/\pi - 1) - \pi/2 + 1, & x \in X_3 \\ x, & x \in X_4 \\ x(4/\pi - 1) + \pi/2 - 1, & x \in X_5 \\ x(1 - 4/\pi) + 3 - \pi/2, & x \in X_6 \\ -x + \pi, & x \in X_7 \end{cases} \qquad b_q(x) = \begin{cases} -1, & x \in X_1 \\ 1 - 4/\pi, & x \in X_2 \\ 4/\pi - 1, & x \in X_3 \\ 1, & x \in X_4 \\ 4/\pi - 1, & x \in X_5 \\ 1 - 4/\pi, & x \in X_6 \\ -1, & x \in X_7 \end{cases}$$

На рис. 1 представлены выбранные аппроксимации $a_q(x)$, $b_q(x)$, $x \in X$, функций $sinx$, $cosx$, $x \in X$.

Пусть заданы: начальное состояние $x_0 = (\pi, 0)$, значения Θ, h. Рассмотрим случай, когда оптимальная траектория задачи (5) на фазовой плоскости проходит по четырем областям I: X_7, II: X_6, III: X_5, IV: X_4. Таким образом, маятник находится в нижнем устойчивом состоянии равновесия $(\pi, 0)$. Требуется поднять его в верхнее неустойчивое положение равновесия $(0, 0)$ и удержать его (стабилизировать) в новом положении.

Тогда кусочно-линейная задача оптимального управления (5) в классе дискретных управлений примет вид:

$$V_\Theta(z) = \min_{u,\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3} \rho,$$

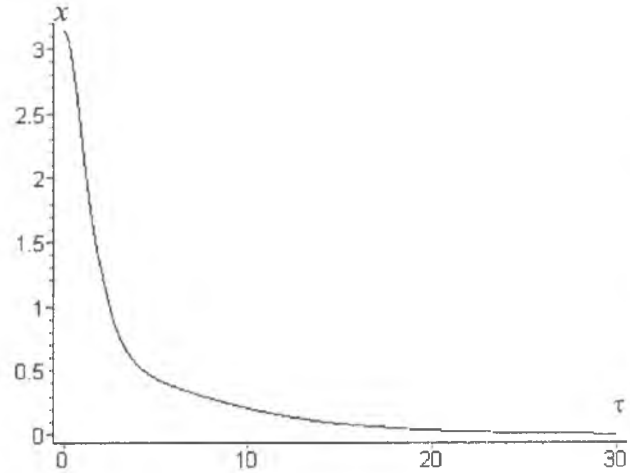

Рис. 2: Траектория замкнутой системы.

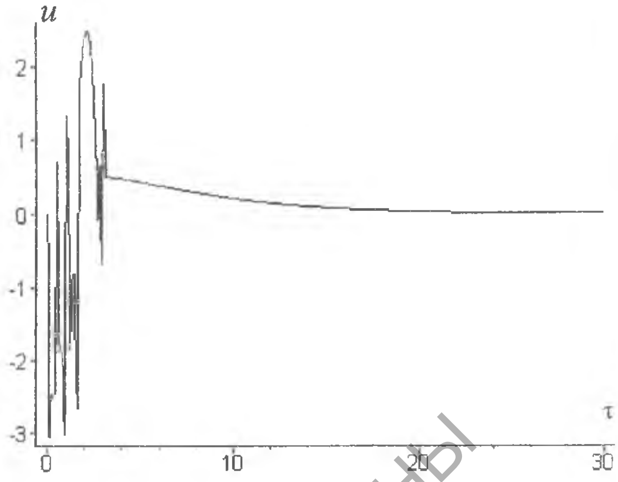

Рис. 3: Реализовавшееся управление.

$$\ddot{x}^1 = -x^1 + \pi + u,\ x^1(0) = z_1,\ \dot{x}^1(0) = z_2,\ t \in [0, \Theta_1]; \tag{9}$$
$$\ddot{x}^2 = (1 - 4/\pi)x^2 + 3 - \pi/2 - u(1 - 4/\pi),\ t \in [\Theta_1, \Theta_2];$$
$$\ddot{x}^3 = (4/\pi - 1)x^3 + \pi/2 - 1 - u(4/\pi - 1),\ t \in [\Theta_2, \Theta_3];\ \ddot{x}^4 = x^4 - u,\ t \in [\Theta_3, \Theta];$$
$$x^1(\Theta_1) = 3\pi/4,\ x^2(\Theta_2) = \pi/2,\ x^3(\Theta_3) = \pi/4,\ x^4(\Theta) = 0,\ \dot{x}^4(\Theta) = 0;\ |u(t)| \leqslant \rho,\ t \in T.$$

Здесь $\Theta_1^0 = \Theta_1^0(0) = \Theta_1^0(x(0), \dot{x}(0))$, $\Theta_2^0 = \Theta_2^0(0) = \Theta_2^0(x(0), \dot{x}(0))$, $\Theta_3^0 = \Theta_3^0(0) = \Theta_3^0(x(0), \dot{x}(0))$ — оптимальные моменты перехода траектории $x^0(t),\ t \in T$, из областей: I в II; II в III; III в IV.

Алгоритм работы оптимального регулятора, который в каждом процессе стабилизации способен в режиме реального времени вычислять текущие значения оптимальной обратной связи аналогичен описанному в работе [7].

Описанная процедура была реализована на ПЭВМ. Для решения задачи (9) были выбраны следующие значения параметров: $\Theta = 3, h = 0.1$. На рис. 2 показана траектория системы (2), замкнутой оптимальной обратной связью. На рис. 3 представлена полученная ограниченная стабилизирующая обратная связь.

Abstract

The author considers the use of an accompanying problem of minimization of the intensity of the management for stabilization of a mathematical pendulum with two nonlinearities.

Литература

1. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений / Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. — 530 с.

2. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. — 530 с.

3. Четаев Н.Г. О выборе параметров устойчивой механической системы, Прикладная математика и механика, 1951. — Т. 15. — Вып. 2.

4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.

5. R.Gabasov, F.M.Kirillova, E.A.Ruzhitskaya. Stabilization of dynamical systems with the help of optimization methods//Nonsmooth and discontinuous problems of control and optimization. Proceedings volume from the IFAC Workshop, Chelyabinsk, Russia, 1998. — P. 35–41.

6. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче // Докл. АН СССР. 1991. Т.320. №6. С. 1294–1299.

7. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Ружицкая Е.А., Фурута К. Стабилизация в большом перевернутого маятника. // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2003. — № 1. — С. 17–23.

8. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Ружицкая Е.А. Стабилизация перевернутого маятника // Доклады НАН Беларуси. 2000. Т.44, №2. С. 9-12.

9. Furuta K., Yamakita M., Kobayashi S. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback // J. Systems and Control Eng., 1992. — V. 206. — P. 263–269.

10. Astrom K.J., Furuta K. Swinging up a pendulum by energy control // Proc. 13th Triennial World Congress. San Francisco, USA. — P. 37–42.

11. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И., Покатаев А.В. Конструктивные методы оптимизации: Ч. 5. Нелинейные задачи. — Мн.: Унiверсiтэцкае, 1998. — 390 с.

12. Gabasov R., Kirillova F.M. Real-time construction of optimal closable feedbacks // 13th World Congress of IFAC International Federation of Automatic Control, V.D., San Francisca, CA, USA. 1996.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 12.04.04