Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(25), 2004

УДК 519.6:539.3

Математическое моделирование деформаций элемента армирования грунтового основания

Л. А. Цурганова

Введение и постановка задачи

В практике промышленного и гражданского строительства армирование грунтовых оснований фундаментов применяют с целью повышения его несущей способности. Техники армирования могут быть различные: армирование может производиться стержневыми элементами и пленками, изготовленными из различных материалов. Эти факторы определяют эффективность армирования: коэффициент повышения несущей способности грунтового основания и стоимость армирования. Одним из возможных подходов решения возникающих задач является математическое моделирование состояния всей исследуемой системы. Учитывая сложность структуры и свойств исследуемой системы, её математическую модель целесообразно строить на основе энергетических принципов [2, 3]. Полная энергия деформируемой системы равна

$$П = Э_{гр} + Э_{аи} + Э_{ар} + Э_{тр} - A, \tag{1}$$

где $Э_{гр}$ – потенциальная энергия деформации грунта, $Э_{аи}$, $Э_{ар}$, $Э_{тр}$ – потенциальная энергия деформации арматуры при изгибе, растяжении и энергия трения арматуры о грунт. На основании принципа стационарности полной энергии деформируемой системы

$$\frac{\partial П}{\partial \{U\}} = 0,$$

где $\{U\} = \{u, v, w\}$– вектор перемещений,

$$A = \{U\}^T \{P\}, \tag{2}$$

$\{P\}$ – вектор внешних сил.

В настоящей работе рассматривается потенциальная энергия деформации армирующих элементов при прогибе и растяжении с целью оценки их энергоёмкости.

Энергия деформации выделенного объёма упругого тела будет равна

$$Э = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV. \tag{3}$$

В соответствии с законом Гука

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}, \tag{4}$$

где [D] – матрица упругих констант материала, $\{\varepsilon\}$, $\{\sigma\}$ – векторы деформаций и напряжений.

Энергия прогиба армирующего стержня

Для того чтобы из (3) получить выражение для энергии прогиба и других видов деформаций армирующего одномерного стержня необходимо деформации выразить через прогиб. Тогда горизонтальная составляющая вектора перемещения будет равна [2,3]:

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}.$$

В случае одномерного стержня

$$\{\varepsilon\} = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{5}$$

и

$$\{\sigma\} = \sigma_x = E_c \cdot \varepsilon_x = -\ z E_C\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где w – прогиб, E_c – модуль упругости материала стержня. Подставим (5) и (6) в (3), при этом учтём, что для одномерного элемента [D] = E.

$$Э = \frac{E_C}{2}\int_V \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ z^2\, dx\, dy\, dz = \frac{E_C J}{2}\int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\, dx, \tag{7}$$

т.к. $\iint z^2\, dy\, dz = J_x \equiv J$ – осевой момент инерции сечения. Для армирующего элемента с плоским поперечным сечением

$$J = \frac{F h^2}{12},$$

где h – толщина элемента.

Из приведенных выкладок очевидно, что функция прогиба w = f (x), должна быть непрерывна в подобласти (в конечном элементе) и, по крайней мере, дважды дифференцируема. Примем это минимальное требование за основное, тогда

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2, \tag{8}$$

что соответствует одномерному единичному элементу с двумя узлами i, j. Длина элемента равна $\underline{a}$. Коэффициенты α_1, α_2, α_3 определим из граничных условий:

$$w(0) = \alpha_1 = W_i,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} = \alpha_2 = \frac{W_i - W_j}{a},$$

т.к. угол поворота элемента стержня $\Theta = -\dfrac{\partial w}{\partial x}$;

$$w(a) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot a + \alpha_3 \cdot a^2 = W_j,$$

откуда получим $\alpha_3 = \dfrac{2(W_j - W_i)}{a^2}$.

Подставим полученные значения коэффициентов в (8) и после несложных преобразований получим:

$$w = \left(1 + \frac{x}{a} - \frac{2x^2}{a^2}\right) W_i + \left(-\frac{x}{a} + \frac{2x^2}{a^2}\right) W_j, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{4}{a^2} W_i + \frac{4}{a^2} W_j = \frac{4}{a^2}[-1,\quad 1]\{W\} = \frac{4}{a^2}[B]\{W\}, \tag{10}$$

где $\{W\} = \begin{Bmatrix} W_i \\ W_j \end{Bmatrix}$ – вектор узловых значений прогиба.

Подставим (10) в (7) и после ряда преобразований получим:

$$Э_{аи} = \frac{16EJ}{2a^4}\int_0^a \{W\}^T [B]^T [B]\{W\}dx ,$$

$$\frac{\partial Э_{аи}}{\partial\{W\}} = \frac{16EJ}{a^3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\{W\}.$$

Выражение

$$\frac{16EJ}{a^3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [K_{аи}] \quad (11)$$

называется матрицей жёсткости элемента при изгибе.

Энергия растяжения стержня

Для линейно-упругого стержня его растяжение может быть представлено линейной функцией

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (12)$$

Рассматривая элемент дискретизации стержня с двумя узлами на его концах, значения коэффициентов в (12) определим через узловые перемещения, в итоге получим

$$U = \frac{1}{a}\left[(x_j - x)U_i + (x - x_i)U_j\right]. \quad (13)$$

Потенциальная энергия растяжения стержня при его прогибе в одной плоскости может быть получена из (3) и будет иметь следующий вид:

$$Э_{ар} = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_x^T \sigma_x \, dV = \frac{E}{2}\int_V \varepsilon_x^T \varepsilon_x \, dV = \frac{EF}{2} t \int_0^a \varepsilon_x^T \varepsilon_x \, dx , \quad (14)$$

F – площадь поперечного сечения армирующего элемента,
t – коэффициент вида деформации.

При плоской деформации $t = \dfrac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$.

Для рассматриваемого случая

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a}(-U_i + U_j) = \frac{1}{a}[-1 \quad 1]\begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

где a – длина единичного элемента стержня.
Подставим в (14) (15) и после ряда несложных преобразований будем иметь

$$\frac{\partial Э_{ар}}{\partial\{U\}} = \frac{tFE}{a}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\{U\} = \frac{tFE}{a}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\{U\}.$$

Здесь матрица жёсткости будет равна

$$\left[K_{ар}\right] = \frac{tFE}{a}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{tFE}{a}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}.$$

Матрица жёсткости деформации элемента армирования будет равна сумме матриц жёсткости при растяжении и прогибе и будет иметь следующий вид

$$[K]=\frac{E}{a}\begin{bmatrix} tF & 0 & -tF & 0 \\ 0 & \frac{16J}{a^2} & 0 & -\frac{16J}{a^2} \\ -tF & 0 & tF & 0 \\ 0 & -\frac{16J}{a^2} & 0 & \frac{16J}{a^2} \end{bmatrix},$$

$\{W\}=\begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \\ U_j \\ W_j \end{Bmatrix}$ – вектор перемещений.

Соотношение энергий деформирования при растяжении и прогибе определится отношением соответствующих коэффициентов матрицы жёсткости [K]

$$n = \frac{16J}{a^2} : tF = \frac{16J}{tFa^2} = \frac{4\ h^2}{3ta^2}.$$

Как правило, $h << a$, $t \approx 1$, следовательно, $n << 1$, т.е. энергией изгиба можно пренебречь при компьютерном моделировании системы армирования грунтовых оснований.

Abstract

The author considers a mathematical modeling of strains of an reinforcing element of the ground foundation.

Литература

1. Быховцев В.Е. Компактный алгоритм построения матрицы жесткости в методе конечных элементов. – Изд. АН БССР, серия физ.– мат., №1, Наука, 1983, – С.34–37.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир,1975, 540 с.
3. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981, 688 с.
4. Сеськов В.Е., Быховцев В.Е., Феофилов Ю.В. Рекомендации по армированию песчаных намывных и насыпных оснований // Госстрой БССР, НИИС, Мн. – 1984. – 12 с.
5. Цытович Н.А.. Механика грунтов. – М: Стройиздат, 1963. – 542с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 12.04.04