Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №3(18), 2003

УДК 517.9+534

Компьютерный анализ точности приближенных методов исследования явлений синхронизации в слабонелинейной колебательной системе

И.В.Сафонов

Введение

Большинство реальных колебательных систем различной природы принципиально нелинейно, и поэтому, как правило, они не интегрируются в квадратурах. В теории и приложениях нелинейной динамики применяются различные методы, позволяющие с той или иной степенью точности и при определенных допущениях находить приближенные решения таких систем: метод малого параметра, метод гармонического баланса, метод прямой линеаризации и ряд других.

Наиболее широко при исследовании слабонелинейных колебательных систем применяются асимптотический метод Крылова-Боголюбова-Митропольского [1] и методы линеаризации, например, метод линеаризации по функции распределения [2, 3].

Исследуем вопрос о точности приближенных решений, полученных методом линеаризации по функции распределения и методом Крылова-Боголюбова-Митропольского, для следующей нелинейной системы, подверженной влиянию внешнего бигармонического воздействия

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = h_1 \cos\omega_1 t + h_2 \cos\omega_2 t, \tag{1}$$

где α, β, h_1, h_2 – положительные постоянные, γ – вещественная постоянная любого знака.

При компьютерном моделировании динамических систем в большинстве современных прикладных исследований используется такой достаточно точный численный метод, как метод Рунге-Кутта. Поэтому сравним приближенные результаты исследования системы (1) по методам Крылова-Боголюбова-Митропольского и линеаризации по функции распределения с результатами непосредственного численного интегрирования методом Рунге-Кутта, принимая последний в качестве эталонного [4, с. 104].

1. Метод Крылова-Боголюбова-Митропольского

Для применимости асимптотического метода Крылова-Боголюбова-Митропольского мы должны предположить, что в (1) $\alpha << \sqrt{\beta}$, $\gamma << \sqrt{\beta}$, $h_k << \beta$, $k = 1,2$. При $\gamma>0$ имеем систему с «жесткой» восстанавливающей силой, при $\gamma<0$ – систему с «мягкой» восстанавливающей силой.

Решение уравнения (1) для установившегося режима колебаний в первом приближении метода ищем в виде

$$x(t) = a_1(t)\cos[\omega_1 + \varphi_1(t)] + a_2(t)\cos[\omega_2 + \varphi_2(t)],$$

где $a_1(t)$, $a_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – медленно изменяющиеся функции времени, которые определяются из системы уравнений:

$$\frac{da_1}{dt} = P_1(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2), \quad \frac{da_2}{dt} = P_2(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2),$$
$$\frac{d\varphi_1}{dt} = Q_1(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2), \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = Q_2(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2).$$

На основании [1], определяя функции P_1, P_2, Q_1, Q_2, для амплитуд и фаз получаем систему уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{da_1}{dt} = -\frac{1}{2\omega_1}\{\alpha\omega_1 a_1 + h_1 \sin\varphi_1\}, \\
\frac{da_2}{dt} = -\frac{1}{2\omega_2}\{\alpha\omega_2 a_2 + h_2 \sin\varphi_2\}, \\
\frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{1}{2\omega_1 a_1}\left\{\frac{3\gamma}{4} a_1\left(a_1^2 + 2a_2^2\right) + \left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)a_1 - h_1 \cos\varphi_1\right\}, \\
\frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{1}{2\omega_2 a_2}\left\{\frac{3\gamma}{4} a_2\left(a_2^2 + 2a_1^2\right) + \left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)a_2 - h_2 \cos\varphi_2\right\}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Начальные условия определяем из системы:

$$\begin{gathered}
\alpha\omega_1 a_1^0 + h_1 \sin\varphi_1^0 = 0; \\
\alpha_2^0\omega_2 a_2^0 + h_2 \sin\varphi_2^0 = 0; \\
a_1^0(\omega_0^2 - \omega_1^2) - h_1 \cos\varphi_1^0 = 0; \\
a_2^0(\omega_0^2 - \omega_2^2) - h_2 \cos\varphi_2^0 = 0.
\end{gathered}$$

После задания численных значений параметров α, β, γ, ω_i, h_i, $i=1,2$ систему (2) интегрируем одним из известных численных методов.

2. Метод линеаризации по функции распределения

Сущность метода линеаризации по функции распределения [2] заключается в замене нелинейности $f(x) = \beta x + \gamma x^3$ уравнения (1) на некоторую линейную функцию $f^*(x) = qx + f_0$. Для определения параметров колебательного процесса необходимо решить линеаризованное уравнение, полученное при такой замене.

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$x = a_0 + a_1\cos(\omega_1 t + \psi_1) + a_2\cos(\omega_2 t + \psi_2). \tag{3}$$

Коэффициенты линеаризации q и f_0 являются функциями моментных характеристик решения (3), то есть среднего значения a_0, центрального момента второго порядка

$$M_2^{(0)} = \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2\right) \tag{4}$$

и центрального момента четвертого порядка

$$M_4^{(0)} = \frac{3}{2}\left[M_2^{(0)}\right]^2 + \frac{3}{4}a_1^2 a_2^2. \tag{5}$$

Зависимость коэффициентов линеаризации от моментов решения имеет вид

$$f_0 = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2} f\left(a_0 - \sqrt{\varepsilon}\sigma\right) + \frac{1}{2} f\left(a_0 + \sqrt{\varepsilon}\sigma\right) + (\varepsilon - 1) f(a_0)\right]; \tag{6}$$

$$q = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}\left[f\left(a_0 + \sqrt{\varepsilon}\sigma\right) - f\left(a_0 - \sqrt{\varepsilon}\sigma\right)\right], \tag{7}$$

где $\sigma = \sqrt{M_2^{(0)}}$, $\varepsilon = \dfrac{M_4^{(0)}}{\left[M_2^{(0)}\right]^2}$.

Решение линеаризованного уравнения для системы (1)

$$f_0 = 0, \quad a_k = \frac{h_k}{\sqrt{\left(q - \omega_k^2\right)^2 + \alpha^2 \omega_k^2}}, \quad k = 1,2. \tag{8}$$

Из (4)–(8) получаем систему уравнений для определения неизвестных параметров a_0, σ, ε:

$$\frac{1}{2} f\left(a_0 - \sqrt{\varepsilon}\sigma\right) + \frac{1}{2} f\left(a_0 + \sqrt{\varepsilon}\sigma\right) + (\varepsilon - 1) f(a_0) = 0; \tag{9}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{h_1^2}{(q - \omega_1^2)^2 + \alpha^2 \omega_1^2} + \frac{h_2^2}{(q - \omega_2^2)^2 + \alpha^2 \omega_2^2}\right]; \tag{10}$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2} + \frac{3}{4\sigma^2} \frac{h_1^2 h_2^2}{((q - \omega_1^2)^2 + \alpha^2 \omega_1^2)((q - \omega_2^2)^2 + \alpha^2 \omega_2^2)}. \tag{11}$$

3. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения и сравнение полученных результатов

Приведем графики приближенных решений, полученных методом Крылова-Боголюбова-Митропольского и методом линеаризации по функции распределения для следующих значений параметров системы (1): $\alpha = 1$, $\beta = \omega_0^2 = 3600$, $\gamma = 3$, $h_1 = 5$, $h_2 = 1$, $\omega_1 = 55$, $\omega_2 = 65$. Тонкой линией на обоих графиках приведено решение нелинейного дифференциального уравнения (1) с заданными значениями параметров методом Рунге-Кутта.

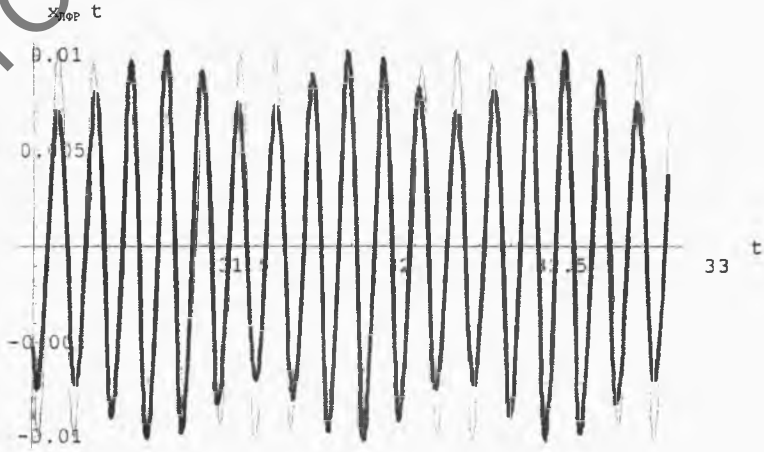

Рис. 1. Метод Рунге-Кутта и метод линеаризации по функции распределения

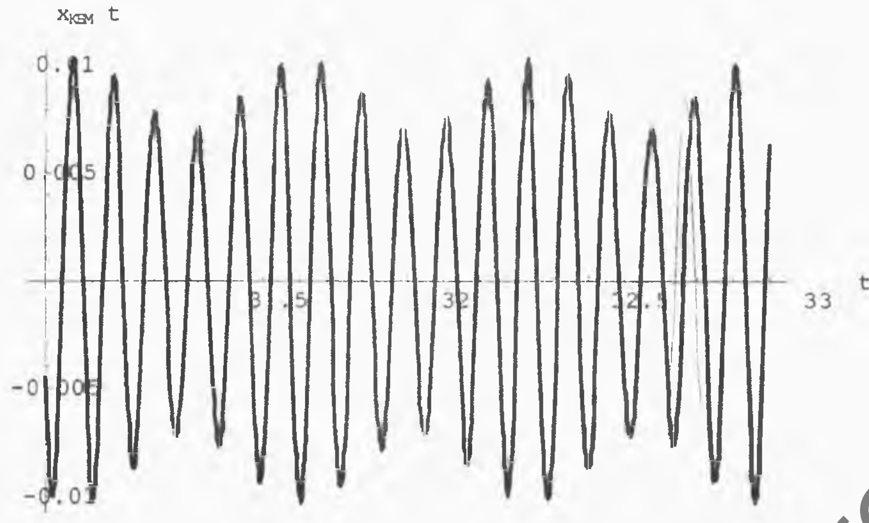

Рис. 2. Метод Рунге-Кутта и метод Крылова-Боголюбова-Митропольского

Для численной оценки точности методов введем в рассмотрение величины

$$\Delta_{MET} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x^{i}_{PK}(t) - x^{i}_{MET}(t)\right)^{2}, \tag{12}$$

где $x^{i}_{PK}(t)$ – компонента решения по методу Рунге-Кутта, $x^{i}_{MET}(t)$ – компонента решения по методу *MET* (в нашем случае это либо метод Крылова-Боголюбова-Митропольского, либо метод линеаризации по функции распределения), N – количество точек, в которых вычисление проводилось.

Для N=600 получены следующие оценки:

$$\Delta_{КБМ} = 1.70835\times10^{-12}, \quad \Delta_{ЛФР} = 5.00253\times10^{-6}.$$

Дальнейший анализ показал, что вблизи резонансных областей вида $\omega_0 \approx \frac{p_i}{q_i}\omega_i$, где p_i q_i – небольшие положительные целые числа, большей точностью обладает метод Крылова-Боголюбова-Митропольского ($\Delta_{КБМ} \in \left[10^{-17};10^{-11}\right]$, $\Delta_{ЛФР} \in \left[10^{-10};10^{-4}\right]$). В то же время, когда собственная частота колебаний системы и частоты внешних воздействий несоизмеримы, оба метода показывают практически одинаковые результаты (обе погрешности порядка 10^{-17}). Также следует отметить большую устойчивость точности метода Крылова-Боголюбова-Митропольского к изменениям параметров системы.

Таким образом, подтвердилось предположение о том, что асимптотический метод нелинейной механики, разработанный Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым и Ю.А.Митропольским, представляет собой одно из наиболее мощных средств приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений. Кроме того, на основе системы (2) этот метод позволяет проводить качественный анализ процессов, протекающих в динамических системах колебательного типа.

Abstract

A system with small nonlinear friction and with nonlinear elasticity and restoration force subjected to biharmonic disturbing force is investigated. Analysis of accuracy of the asymptotical Krylov-Bogolubov-Mitropolsky method and of the method of linearization by frequency function of the system is given.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 4-е. М.: Наука, 1974. – 504 с.

2. Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем. М.: Наука, 1966. – 317 с.

3. Колебания нелинейных механических систем. – Т. 2 // Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Под ред. И. И. Блехмана. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.

4. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990. – 312 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 10.04.03