

Конечные группы с модулярными подгруппами порядка 4

В.А. ВАСИЛЬЕВ

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G , если выполняются следующие условия:

- (1) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$, таких, что $X \leq Z$, и
- (2) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$, таких, что $M \leq Z$.

Рассматриваются группы с модулярными подгруппами порядка 4 силовских подгрупп.

Ключевые слова: максимальная подгруппа, минимальная подгруппа, силовская подгруппа, модулярная подгруппа, ХФ-гиперцентр.

All groups considered are finite. A subgroup M of a group G is a modular subgroup in G , if the following conditions are true:

- (1) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ for all $X \leq G, Z \leq G$ with $X \leq Z$, and
- (2) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ for all $Y \leq G, Z \leq G$ with $M \leq Z$.

Groups with modular subgroups of order 4 of Sylow subgroups are studied.

Keywords: maximal subgroup, minimal subgroup, Sylow subgroup, modular subgroup, ХФ-hypercenter.

Введение. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Пусть G – группа. Напомним, что подгруппа H из G называется 2-максимальной (второй максимальной) подгруппой в G , если H является максимальной подгруппой некоторой максимальной подгруппы M из G . Аналогично определяются 3-максимальные подгруппы и так далее. С изучением 2-максимальных, 3-максимальных, n -максимальных подгрупп связано большое количество исследований (см., например, [1]–[10]).

В последние двадцать лет началось активное изучение аналогов максимальных и вторых максимальных подгрупп – минимальных и вторых минимальных (2-минимальных) подгрупп. Напомним, что подгруппа из G простого порядка называется минимальной подгруппой. Подгруппа группы G порядка pq , где p и q – обязательно различные простые числа, называется второй минимальной подгруппой. Особый интерес в изучении структуры группы G представляет вопрос о том, как минимальные подгруппы могут быть вложены в группу G . Ито [11] доказал, что если G – группа нечетного порядка и все минимальные подгруппы из G лежат в центре группы G , то G нильпотентна. Развитием результата Ито является следующее утверждение [12]: если для нечетного простого числа p , каждая подгруппа из G порядка p лежит в центре группы G , то G является p -нильпотентной группой. Если все элементы из G порядка 2 и 4 лежат в центре группы G , то G является 2-нильпотентной группой. Бакли [13] доказал, что если G – группа нечетного порядка и все минимальные подгруппы из G нормальны в G , то G сверхразрешима. Далее эти результаты были расширены другими авторами (например, Асаад [14], Дерр, Дескинз и Мукхерджи [15] и Йокояма [16]). Также стоит отметить следующий известный результат Гашюца [12] в этом направлении: если каждая минимальная подгруппа группы G является нормальной в G , то коммутатор G' группы G является 2-замкнутым. Баллестер-Болинше, Естебан-Ромеро и Янминг Ли [17] исследовали группы с заданным вложением вторых минимальных подгрупп силовских подгрупп.

Вместе с тем, остается открытым следующий вопрос: что можно сказать о группе G , если все ее вторые минимальные подгруппы или хотя бы все ее подгруппы порядка 4 обладают заданным свойством вложения?

В данной работе мы доказываем следующий новый результат в этом направлении:

Теорема. Пусть E – нормальная подгруппа группы G , P – силовская 2-подгруппа из E с $|P| > 4$. Предположим, что каждая подгруппа H из P порядка 4, не имеющая 2-нильпотентного добавления в G , является модулярной в G . Тогда $E/O_2(E) \leq Z_\infty(G/O_2(E))$.

Используемая в статье терминология стандартна, при необходимости можно обратиться к монографиям [18], [19].

Определения и некоторые предварительные результаты. Напомним, что подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G , если выполняются следующие условия:

- (1) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$, таких, что $X \leq Z$, и
- (2) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$, таких, что $M \leq Z$.

Отметим, что модулярная подгруппа является модулярным элементом (в смысле Куроша, [20]) решетки всех подгрупп группы. Следующие известные свойства модулярных подгрупп будут использованы в данной работе.

Лемма 1 [20]. Пусть M – модулярная подгруппа в группе G . Тогда:

- (1) $H \cap M$ является модулярной подгруппой в H для всех $H \leq G$.
- (2) Если N нормальна в G , то MN/N модулярна в G/N .
- (3) Если M_1 и M_2 модулярные подгруппы в G , то $\langle M_1, M_2 \rangle$ также модулярная подгруппа в G .

Символом $Z_U(G)$ обозначают наибольшую нормальную подгруппу группы G , у которой все G -главные факторы циклически ($Z_U(G) = 1$, если в G нет неединичных нормальных подгрупп с таким свойством).

Лемма 2 [20]. Если подгруппа M модулярна в группе G , то $M^G/M_G \leq Z_U(G/M_G)$.

В работе [21] было введено следующее понятие:

Определение. Пусть $Z_{\text{ХФ}}$ – произведение всех нормальных подгрупп группы G , у которых нефраттиниевы G -главные факторы X -центральны в G . Тогда $Z_{\text{ХФ}}$ называется **ХФ-гиперцентром** группы G .

Лемма 3 [21]. Пусть $Z = Z_{\text{ХФ}}(G)$ и N и T – нормальные подгруппы группы G . Если $TN/N \leq Z_{\text{ХФ}}(G/N)$ и $(|T|, |N|) = 1$, тогда $T \leq Z$.

Доказательство теоремы. Предположим, что теорема не верна, и рассмотрим контрпример (G, E) , для которого произведение $|G||E|$ минимально.

(1) Если X – холлова подгруппа из E , то условие теоремы выполняется для (X, X) . Если к тому же X нормальна в G , то условие теоремы также выполняется для $(G/X, E/X)$.

Пусть X – холлова подгруппа из E , P – нециклическая силовская 2-подгруппа из X . По условию теоремы каждая подгруппа H из P порядка 4 имеет 2-нильпотентное добавление T в G или является модулярной подгруппой в G . В первом случае $X = X \cap HT = H(X \cap T)$, и поэтому $X \cap T$ является 2-нильпотентным добавлением к H в X . Во втором случае H является модулярной подгруппой в X по лемме 1(1). Таким образом, условие теоремы выполняется для (X, X) .

Пусть теперь X – холлова подгруппа из E , которая нормальна в G . Пусть P^*/X – нециклическая силовская 2-подгруппа из E/X , P – силовская 2-подгруппа из P^* , такая, что $P^* = PX$. Тогда P является нециклической силовской 2-подгруппой из E , и поэтому по условию теоремы каждая подгруппа H из P порядка 4 имеет 2-нильпотентное добавление T в G или является модулярной подгруппой в G . Пусть H^*/X – подгруппа из P^*/X порядка 4. Тогда $H^* = [X]H$, где H является силовской 2-подгруппой из H^* . Ясно, $|H| = 4$, и поэтому либо $H^*/X = HX/X$ имеет 2-нильпотентное добавление $TX/X \square T/T \cap X$ в G/X либо является модулярной подгруппой в G/X по лемме 1(2). Поэтому условие теоремы выполняется для $(G/X, E/X)$.

(2) $O_2(E) = 1$.

Предположим, что $O_2(E) \neq 1$. Согласно (1) условие теоремы выполняется для $(G/O_2(E), E/O_2(E))$. Следовательно, по выбору (G, E) теорема верна для $(G/O_2(E), E/O_2(E))$, и значит, для (G, E) . Получили противоречие с выбором (G, E) .

(3) Если $E \neq G$, то $E = P$.

Предположим, что $E \neq G$. Согласно (1) условие теоремы остается верным для (E, E) , поэтому E является 2-нильпотентной по выбору (G, E) . Но согласно (2), $O_2(E) = 1$. Значит, $E = P$.

(4) $O_2(G) = 1$.

Предположим, что $V = O_2(G) \neq 1$. Тогда согласно (2) и (3) $E = P$. Согласно (1) условие теоремы остается верным для $(G/V, EV/V)$. Значит, теорема верна для $(G/V, EV/V)$ по выбору (G, E) . Теперь согласно (2) и по лемме 3 мы заключаем, что теорема верна для (G, E) , что противоречит выбору (G, E) .

(5) $|P| > 8$.

Ввиду выбора группы G , это утверждение вытекает из [23].

(6) G не имеет нормальной максимальной подгруппы M с $|G:M| = 2$ и $MP = G$.

В противном случае условие теоремы выполняется для $(G, E \cap M)$. Следовательно, теорема верна для $(G, E \cap M)$ по выбору (G, E) . С другой стороны, из G -изоморфизма $G/M \cong E/M \cap E$ заключаем, что $E/M \cap E$ является центральным главным фактором группы G . Значит, теорема верна для (G, E) . Получили противоречие.

(7) Если $E = P$, то P является силовской 2-подгруппой группы G .

Пусть G_2 – силовская 2-подгруппа из G . Предположим, что $E = P \neq G_2$, и пусть Q – силовская q -подгруппа из G , где $q \neq 2$. Тогда $|PQ| < |G|$, и по лемме 1(1) условие теоремы выполняется для (PQ, P) . Значит, $P \leq Z_\Phi(PQ)$. Поэтому PQ nilпотентна. Следовательно, $Q \leq C_G(P)$. Пусть теперь $1 = P_0 \leq P_1 \leq \dots \leq P_t = P$, где P_{i+1}/P_i – главный фактор группы G_2 , $i = 0, 1, \dots, t-1$. Тогда P_{i+1}/P_i – главный фактор группы G . Поэтому $P \leq Z(G)$, что противоречит выбору (G, E) . Значит, $P = G_2$.

Заключительное противоречие.

Если G является 2-нильпотентной группой, то $E/O_2(E)$ – 2-группа и $G_2/O_2(E) \subseteq C_{G/O_2(E)}(E/O_2(E))$, где G_2 – холлова 2'-подгруппа группы G . Значит, $G/O_2(E)/C_{G/O_2(E)}(E/O_2(E))$ – 2-группа и $E/O_2(E) \leq Z_\infty(G/O_2(E))$, что противоречит выбору группы G . Значит, G не 2-нильпотентна. Следовательно, в G существует 2-замкнутая группа Шмидта $H = [H_2]H_q$. Пусть $C = C_G(H_2)$ и $\Phi = \Phi(H_2)$.

Предположим, что H_2 неабелева. Пусть $a, b \in H_2 \setminus \Phi$. Предположим, что $|a| = |b| = 2$ и $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. Рассмотрим вначале случай, когда $A_G = A$. Тогда A нормальна в G . Рассмотрим ряд $\Phi < A\Phi < H_2$. Так как H_2/Φ – главный фактор группы H , то либо $\Phi = A\Phi$, либо $A\Phi = H_2$. Если $\Phi = A\Phi$, то $A \leq \Phi$, что противоречит построению группы A . Так как подгруппа Фраттини состоит из необразующих элементов, то $A\Phi \neq H_2$. Таким образом, случай, когда $A_G = A$, невозможен. Пусть теперь $A_G = 1$. Тогда, применяя лемму 2, получаем $A \leq Z_\infty(H)$. Так как $A\Phi/\Phi \leq H_2/\Phi \cap Z_\infty(H/\Phi)$, то $H_2/\Phi \leq Z_\infty(H/\Phi)$. Следовательно, H/Φ nilпотентна, и поэтому H nilпотентна, что противоречит тому, что H – группа Шмидта. Рассмотрим теперь случай, когда $|A_G| = 2$. Тогда $A_G \leq Z_\infty(H)$, и поэтому $Z_\infty(H/A_G) = Z_\infty(H)/A_G$. Применяя

лемму 2, получаем $A/A_G \leq Z_\infty(H/A_G)$. Значит, $A \leq Z_\infty(H) \cap H_2 = \Phi$, что противоречит построению группы A . Аналогично рассматривается случай, когда $|a|=4$ и $A = \langle a \rangle$.

Предположим, что H_2 абелева. Тогда $\Phi(H_2) = 1$, и поэтому H_2 – минимальная нормальная подгруппа в H . Если $|H_2|=2$, то H_4 нормальна, и поэтому H нильпотентна. Получили противоречие с тем, что H – группа Шмидта. Предположим, что $|H_2|>4$. Пусть $V < H_2$ и $|V|=4$. По условию леммы V является модулярной в G подгруппой. Тогда по лемме 2 получаем, что $V/V_G \leq Z_U(G/V_G)$. Так как H_2 – минимальная нормальная подгруппа в H , то $V_G = 1$. Значит, $V \leq Z_U(G)$. Следовательно, $V \leq Z_U(G) \cap H$. Так как $H \cap Z_U(G)$ является нормальной подгруппой в H , то $H_2 \cap (H \cap Z_U(G)) \neq 1$. Значит, $H_2 \leq H \cap Z_U(G)$, и поэтому $H_2 \leq Z_U(H)$. Следовательно, H/H_2 нильпотентна и поэтому H нильпотентна. Получили противоречие.

Значит, $|H_2|=4$. По условию леммы H_2 модулярная подгруппа в G . По лемме 2 $H_2/H_{2G} \leq Z_U(G/H_{2G})$. Если $H_{2G} = 1$, то $H_2 \leq Z_U(G)$, что, как и выше, приводит к противоречию. Ясно, что $|H_{2G}| \neq 2$. Таким образом, $H_{2G} = H_2$, а это означает, что H_2 нормальна в G .

Предположим, что $E \neq G$. Тогда $E = P$ и согласно (7) P – силовская 2-подгруппа из G . Согласно (5) H_2 не максимальная подгруппа в P . Так как H – группа Шмидта, то $G \neq C$. Так как $|H_2|=4$ и H_2 нормальна в G , то $G/C \cong B \leq S_3$. Если $|G/C|=2$, то $H_2 \leq Z_\infty(G)$, и, рассуждая так же, как и выше, приходим к противоречию. Если $|G/C|=6$, то $G/C = [G_3C/C]G_2C/C$ и $|G/C : G_3C/C| = 2$, где $G_2 \in \text{Syl}_2(G)$ и $G_3 \in \text{Syl}_3(G)$. Но тогда G_3C нормальная максимальная в G подгруппа, что противоречит (6). Пусть теперь $|G/C|=3$. Так как $O_2(C) \leq O_2(G) = 1$, то $O_2(C) = 1$. Тогда $G = [C]C_3$ является 2-замкнутой группой Шмидта, где C_3 – циклическая группа порядка 3. Рассуждая так же, как и выше, снова приходим к противоречию. Случай, когда $E = G$, рассматривается аналогично. Таким образом, теорема доказана.

Литература

1. Huppert, B. Normalteiler and Maximal Untergruppen Endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – № 60 – P. 409–434.
2. Guo, X.Y. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X.Y. Guo, K.P. Shum // J. Pure and Appl. Algebra. – 2003. – № 181 – P. 297–308.
3. Guo, W. X -Semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – № 315 – P. 31–41.
4. Li, Baojun New characterizations of finite supersoluble groups / Baojun Li, A.N. Skiba // Sci. China Ser. A: Math. – 2008. – № 50(1) – P. 827–841.
5. Guo, W. Finite groups with given s -embedded and n -embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – № 321 – P. 2843–2860.
6. Li, Shirong Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI -groups / Shirong Li // Math. Proc. of the Royal Irish Academy. – 2000. – № 100A (1) – P. 65–71.
7. Guo, W. Finite groups in which every 3-maximal subgroup permutes with all maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba // Math. Notes. – 2009. – № 86 (3) – P. 325–332.
8. Guo, W. On nonnilpotent groups with every two 3-maximal subgroups permutable / W. Guo, Yu.V. Lutsenko, A.N. Skiba // Siberian Math. J. – 2009. – № 50(6) – P. 988–997.
9. Lutsenko, Yu.V. Finite groups with subnormal second and third maximal subgroups / Yu.V. Lutsenko, A.N. Skiba // Math. Notes. – 2012. – № 91(5) – P. 680–688.
10. Mann, A. Finite groups whose n -maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – № 132 – P. 395–409.
11. It ~~Oben~~ eine zur Frattini-Gruppe duale Bildung / N. It // Nagoya Math. J. № 9 – S. 123–127.

12. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert // Berlin etc: Springer, 1967. – 793 s.
13. Buckley, J. Finite groups whose minimal subgroups are normal / J. Buckley // Math. Z. – 1970. – № 116 – P. 15–17.
14. Asaad, M. On the supersolvability of finite groups I / M. Asaad // Acta. Math. Acad. Scient. Hungar. – 1981. – № 38 – P. 57–59.
15. Derr, J.B. The influence of minimal p -subgroups on the structure of finite groups / J.B. Derr, W.E. Deskins, N.P. Mukherjee // Arch. Math. – 1985. – № 45 – P. 1–4.
16. Yokoyama, A. Finite solvable groups whose F -hypercenter contains all minimal subgroups. / A. Yokoyama // Arch. Math. – 1975. – № 26 – P. 123–130.
17. Ballester-Bolinches, A. On second minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups. / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, Li Yangming // Journal of Algebra. – 2011. – № 342 – P. 134–146.
18. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М.: Наука, 1978. – 272 с.
19. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes // Berlin etc: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
20. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt // Berlin etc: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
21. Shemetkov, L.A. On the $X\Phi$ -hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2009. – № 322 – P. 2106–2117.
22. Skiba, A.N. On weakly S -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2007. – № 315 – P. 192–209.
23. Васильев, В.А. Конечные группы с m -добавляемыми максимальными подгруппами силовских подгрупп / В.А. Васильев // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4 (67) – С. 29–37.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 24.03.2014