

УДК 512.542

О сверхразрешимости одного класса конечных групп

Аль-Шейхахмад Ахмад

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Одним из естественных обобщений понятия максимальной подгруппы является следующее введенное в работе [1] определение: Пусть H — собственная подгруппа группы G . Тогда H называется примитивной подгруппой G , если пересечение всех тех подгрупп из G , которые содержат H собственным образом, снова отлично от H . В качестве элементарного примера примитивной подгруппы, которая не является максимальной подгруппой, можно отметить инвариантную подгруппу порядка 3 в группе $G = S_3 \times Z_3$, где S_3 — симметрическая группа третьей степени и Z_3 — порядка 3. Группа G является и примером сверхразрешимой группы, в которой для любых двух примитивных подгрупп H и T с $H_G = T_G$ множества простых делителей индексов $|G : H|$ и $|G : T|$ совпадают. В данной работе мы докажем, что любая группа, обладающая этим свойством сверхразрешима.

Но прежде мы докажем новый критерий разрешимости группы, представляющий и самостоятельный интерес.

Напомним, что подгруппа H группы G называется s -нормальной в G [2], если G имеет такую нормальную подгруппу T , что $HT = G$ и $T \cap H \subseteq H_G$.

Лемма 1. [2] Пусть H — подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $K \trianglelefteq G$ и $K \subseteq H$. Тогда H/K является s -нормальной в G/K подгруппой в том и только в том случае, когда H — s -нормальная в G подгруппа.
2. Если $H \leq T$ и H — s -нормальная в G подгруппа, то — s -нормальная в T подгруппа.

Теорема 1. Группа G разрешима тогда и только тогда, когда для любых ее двух не s -нормальных в G максимальных подгрупп H и T с $H_G = T_G$ имеет место $\pi(|G : H|) = \pi(|G : T|)$.

В этой теореме $\pi(n)$ обозначает множество всех простых делителей числа n .

Доказательство. Если группа G разрешима, то согласно известной теореме Оре [3] любые ее две максимальные подгруппы H и T с $H_G = T_G$ сопряжены, значит, $\pi(|G : H|) = \pi(|G : T|)$.

Предположим теперь, что для любых двух не s -нормальных в G максимальных подгрупп H и T из G с $H_G = T_G$ имеет место $\pi(|G : H|) = \pi(|G : T|)$. Покажем, что G — разрешимая группа. Предположим, что это не так и пусть G — контрпример минимального порядка.

Пусть R — минимальная нормальная подгруппа группы G . Ввиду леммы 1 легко видеть, что условие теоремы переносится на G/R . Следовательно, R — неабелева группа и $R = \text{Soc}(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Следовательно, поскольку подгруппа Фраттини группы G нильпотентна, то $\Phi(G) = 1$. Пусть M — такая максимальная в G подгруппа, что $R \not\subseteq M$. Тогда $G = RM$ и поэтому $|G : M| = |R : M \cap R|$. Пусть p — произвольный простой делитель числа $|G : M|$ и R_p — силовская p -подгруппа в R . Тогда согласно аргументу Фраттини $G = RN_G(R_p)$. Поскольку R — неабелева группа, то $R_p \neq R$ и поэтому $N_G(R_p) \neq G$. Пусть T — такая максимальная в G подгруппа, что $N_G(R_p) \subseteq T$. Тогда $G = RT$ и поэтому $M_G = T_G = 1$. Нетрудно показать, что обе подгруппы T и M не являются s -нормальными в G . Значит, по условию, p одновременно делит числа $|G : M|$ и $|G : T|$. Заметим, что если G_p —

силовская p -подгруппа в G , то $G_p \cap R = R_p \trianglelefteq G_p$ и поэтому $G_p \subseteq N_G(R_p) \subseteq T$. Таким образом, $p \nmid |G : T|$. Вновь полученное противоречие завершает доказательство данной теоремы.

Следствие 1. [2] *Группа разрешима, если все ее максимальные подгруппы c -нормальны в G .*

Следствие 2. [4] *Группа разрешима тогда и только тогда когда любые ее две максимальные подгруппы с одинаковым ядром сопряжены.*

Лемма 2. [1] *Пусть H — подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Пусть $K \trianglelefteq G$ и $K \subseteq H$. Тогда H/K является примитивной в G/K подгруппой в том и только в том случае, когда H — примитивная в G подгруппа.*

2. *Если $H \leq T$ и H — примитивная в T подгруппа, то в G найдется такая примитивная подгруппа X , что $H = T \cap X$.*

Теорема 2. *Группа G сверхразрешима, если для любых ее двух примитивных подгрупп H и T с $H_G = T_G$, из которых по крайней мере одна не является c -нормальной в G , имеет место $\pi(|G : H|) = \pi(|G : T|)$.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и G — контрпример минимального порядка. Согласно теореме 1 группа G разрешима.

Пусть R — минимальная нормальная подгруппа группы G . Пусть H/R и T/R — примитивные в G/R подгруппы. Тогда согласно лемме 2 H и T — примитивные в G подгруппы. Если одна из подгрупп H или T c -нормальна в G , то ввиду леммы 1 одна из подгрупп H/R или T/R c -нормальна в G/R . Предположим теперь, что обе подгруппы H и T не являются c -нормальными в G . Тогда поскольку $H_G = T_G$, то по условию $\pi(|G : H|) = \pi(|G : T|)$. Но $|G : H| = |G/R : H/R|$, $|G : T| = |G/R : T/R|$ и поэтому условие теоремы верно для G/R . Значит, по выбору группы G факторгруппа G/R сверхразрешима. Поскольку класс всех сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, то $R = Soc(G)$ — единственная минимальная нормальная в G подгруппа и $R \not\subseteq \Phi(G)$.

Пусть $C = C_G(R)$ и M — такая максимальная в G подгруппа, что $R \not\subseteq M$. Тогда $M_G = 1$, $G = RM$ и поэтому $C = C \cap RM = R(C \cap M)$. Но, как нетрудно заметить, $C \cup M \trianglelefteq G$. Следовательно, $C \cap M = 1$ и поэтому $C = R(C \cap M) = R$.

Пусть R_1 — максимальная в R подгруппа. Тогда R_1 — примитивная в R подгруппа. Согласно лемме 2 в G найдется такая примитивная подгруппа X , что $X \cap R = R_1$. Поскольку $|R : X \cap R| = |R : R_1| = |XR : X|$, то $p \mid |G : X|$. Понятно также, что $X_G = M_G = 1$ и что X не является c -нормальной подгруппой в G . Значит, $\pi(|G : M|) = \pi(|R|) = \pi(|G : X|) = \{p\}$. Но $R_1 = R \cap X \trianglelefteq X$. Поэтому для любой максимальной в R подгруппы R_1 индекс ее нормализатора $G : N_G(R_1)$ — натуральная степень числа p . Значит, если n — число всех максимальных в R подгрупп, то $p \mid n$, что противоречит [5; III, 8,5]. Теорема доказана.

Следствие 3. [6] *Группа сверхразрешима, если любые ее две примитивные подгруппы с одинаковым ядром сопряжены.*

Abstract

It is proved that a finite group G is supersoluble if for every two its primitive subgroups H and T with $H_G = T_G$ where at least one of the subgroups H or T is not c -normal in G the following holds $\pi(|G : H|) = \pi(|G : T|)$.

Литература

1. D.L.Johnson, A note on supersoluble groups. *Canad. J. Math.*, 1971. — V. 23. — N 3. — P. 562–564.
2. Y. Wang, c-normality of groups and its properties, *J. Algebra*, (1996). — V. 180. — P. 954–965.
3. O.Ore, Contributions to the theory of groups of finite order. — *Duke Math. J.*, 1939. — V. 5. — C. 431–450.
4. Ja.G.Berkovich, On solvable groups of finite order. *Mat.Sbornik*, 1967. — V. 3. — № 1. — C. 69–83.
5. Huppert B. *Endliche Gruppen I*. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967. — 793 s.
6. Скиба А.Н. Критерий принадлежности конечной группы локальной формации, в сб. научных трудов "Конечные группы", Мн. "Наука и техника", 1978. — С. 166–169.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 12.04.04

РЕПОЗИТОРИЙ ГТУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ