Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(25), 2004

УДК 517.5

Приближение алгебраическими многочленами функций с данным К-М обобщённым модулем гладкости производной

Г. Н. Казимиров

Для 2π-периодических функций хорошо известны прямая и обратная теоремы теории приближений о связи между модулями гладкости функции и её наилучшими приближениями тригонометрическими полиномами. При рассмотрении непериодических функций уже не удаётся получить такие же связи между модулями гладкости функции и её наилучшими приближениями алгебраическими многочленами. Однако, если обычный модуль гладкости заменить некоторым обобщённым модулем гладкости, то остаются справедливыми прямая и обратная теоремы теории приближений. Некоторые из таких обобщённых модулей, определяемых при помощи операторов обобщённого сдвига были предложены Потаповым М.К. В настоящей работе рассматривается обобщённый модуль гладкости, определяемый при помощи оператора обобщённого сдвига Якоби и доказывается неравенство Джексона об оценке наилучших приближений алгебраическими многочленами функций, имеющих данный порядок k-го обобщённого модуля гладкости производной.

Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1,1]$ и $\|f\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty$, а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_\infty = \max_{-1 \le x \le 1} |f(x)|$.

Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций f, что $f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \in L_p$ и $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\|_p$.

Для $\nu > (-1/2)$ определим оператор обобщённого сдвига Якоби

$$T_h(f,x,\nu) = \frac{1}{\gamma(\nu)} \int_{-1}^{1} f(x\cos h + y\sin h\sqrt{1-x^2} - (1-y^2)(1-x)\sin^2\frac{t}{2}) \times$$
$$\times (1-y^2)^{\nu-(1/2)} dy,$$

где $\gamma(\nu) = \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\nu-(1/2)} dy$.

Обозначим через $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ при помощи алгебраических многочленов P_n степени не выше, чем n-1, в метрике $L_{p,\alpha,\beta}$, т.е.

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{P_n \in P} \|P_n(x) - f(x)\|_{p,\alpha,\beta},$$

где P – множество алгебраических многочленов степени не выше, чем n-1, n=1,2,....

Введём обозначения:

$$\Delta_h^1(f,x,\nu)=T_h(f,x,\nu)-f(x),\ \Delta^r_{h_1,\dots,h_r}(f,x,\nu)=\Delta^1_{h_r}(\Delta^{r-1}_{h_1,\dots,h_{r-1}}(f,x,\nu),x,\nu)$$

для r=2,3,…,

$$\widetilde{\omega}_r(f,\delta,\nu)_{p,\alpha,\beta}=\sup_{|h_i|\le\delta,i=1,\dots,r}\left\|\Delta^r_{h_1,\dots,h_r}(f,x,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Теорема 1. *Пусть даны числа* p,ν,r *такие, что* $1\le p\le\infty$, $\nu>-(1/2), r=1,2,3,\dots$. *Пусть числа* α *и* β *выбраны по правилу:* $\beta=\dfrac{-1}{2p}$, *-(1/2p)<α< ν+(1/2)-(1/2p) при 1<p<∞, 0≤α<ν+(1/2) при p=∞. Тогда для* $f\in L_{p,\alpha,\beta}$ *справедливы неравенства:*

$$C_1E_n(f)_{p,\alpha,\beta}\le\widetilde{\omega}_r(f,\frac{1}{n},\nu)_{p,\alpha,\beta}\le\frac{C_2}{n^{2r}}\sum_{m=1}^{n}m^{2r-1}E_m(f)_{p,\alpha,\beta},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и n(n=1,2,3,…).

Теорема 1 доказана в работе [1].

Будем обозначать:

$$D_{x,\nu}=(1-x)^{-\nu}(1+x)^{1/2}\frac{d}{dx}(1-x)^{\nu+1}(1+x)^{1/2}\frac{d}{dx},\ D^0_{x,\nu}=I,$$

где I-тождественный оператор, $D^1_{x,\nu}=D_{x,\nu}$ и для k=2,3,… $D^k_{x,\nu}=D^1_{x,\nu}(D^{k-1}_{x,\nu})$. Через $AD^r(\nu)_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций g, что g имеет абсолютно непрерывную на каждом [a,b]⊂(-1,1) 2r-1 производную и $D^l_{x,\nu}g\in L_{p,\alpha,\beta}$ для l=0,1,2,…,r.

Цель работы – доказать следующую теорему

Теорема 2. *Пусть даны числа* p,ν,k,r *такие, что* $1\le p\le\infty$, $\nu>-(1/2), r=1,2,3,\dots$ $k=1,2,3,\dots$. *Пусть числа* α *и* β *выбраны по правилу:* $\beta=\dfrac{-1}{2p}$, *-(1/2p)<α< ν+(1/2)-(1/2p) при 1<p<∞, 0≤α<ν+(1/2) при p=∞.*

Тогда для функции $f\in AD^r(\nu)_{p,\alpha,\beta}$ *справедливо неравенство*

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta}\le\frac{C_5}{n^{2r}}\widetilde{\omega}_k(D^r_{x,\nu}f,\frac{1}{n},\nu)_{p,\alpha,\beta},$$

где положительная постоянная C_5 *не зависит от f и n(n=1,2,3, …).*

Доказательству теоремы предпошлём несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть даны числа* p,ν *такие, что* $1\le p\le\infty$, $\nu>-(1/2)$. *Пусть числа* α *и* β *выбраны по правилу:* $\beta=\dfrac{-1}{2p}$, *-(1/2p)<α< ν+(1/2)-(1/2p) при 1<p<∞, 0≤α<ν+(1/2) при p=∞. Тогда если* $f\in L_{p,\alpha,\beta}$ *то и* $T_t(f,x,\nu)\in L_{p,\alpha,\beta}$ *и* $\|T_t(f,x,\nu)\|_{p,\alpha,\beta}\le C_6\|f\|_{p,\alpha,\beta}$, *где положительная постоянная* C_6 *не зависит от f и t.*

Лемма 1 доказана в [2].

Для $0<h\le\dfrac{\pi}{2}$ рассмотрим оператор

$$L_h(f,x,\nu) = = \frac{1}{\varphi(h)}\int_0^h (\sin\frac{\omega}{2})^{-2\nu-1}\int_0^\omega (\sin\frac{u}{2})^{2\nu+1} T_u(f,x,\nu)dud\omega,$$

где $\varphi(h) = \int_0^h (\sin\frac{\omega}{2})^{-2\nu-1}\int_0^\omega (\sin\frac{u}{2})^{2\nu+1} dud\omega$

Пусть $L_h^1(f,x,\nu) = L_h(f,x,\nu)$, а для l=2,3,…

$$L_{h_1,...,h_l}^l(f,x,\nu) = L_{h_l}(L_{h_1,...,h_{l-1}}^{l-1}(f,x,\nu),x,\nu).$$

Лемма 2. *Пусть даны числа* p,ν,l *такие, что* $1 \le p \le \infty$, $\nu > -(1/2), l = 1,2,3,...$. *Пусть числа* α *и* β *выбрано по правилу:* $\beta = \frac{-1}{2p}$, *-(1/2p)<α< ν+(1/2)-(1/2p) при 1<p<∞, 0≤α<ν+(1/2) при p=∞. Тогда если* $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ *то при любых* $h_1,...,h_l \in (0,\frac{\pi}{2}]$ $L_{h_1,...,h_l}^l(f,x,\nu) \in AD^l(\nu)_{p,\alpha,\beta}$ *и справедливо равенство:*

$$D_{x,\nu}^l L_{h_1,...,h_l}^l(f,x,\nu) = \frac{1}{\varphi(h_1)\cdot ...\cdot \varphi(h_l)}\Delta_{h_1,...,h_l}^l(f,x,\nu).$$

Лемма 2 доказывается почти дословным повторением леммы 11 из [1], стр.30.

Лемма 3. *Пусть даны числа* p,ν *такие, что* $1 \le p \le \infty$, $\nu > -(1/2)$. *Пусть числа* α *и* β *выбрано по правилу:* $\beta = \frac{-1}{2p}$, *α< ν+1-(1/p) при 1<p<∞, α<ν+1 при p=∞. Тогда если* $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ *то* $f \in L_{1,\nu,-1/2}$.

Лемма 3 доказана в [1], стр.21.

Лемма 4. *Пусть* $g \in AD^k(\nu)_{1,\nu,-1/2}, \nu > -(1/2)$. *Тогда для почти всех* $x \in [-1,1]$ *и всех* $t_1,...,t_l \in R, k = 1,2,3,...; l = 1,2,3,...$ *справедливо равенство:*

$$D_{x,\nu}^k T_{t_1,...,t_l}^l(g,x,\nu) = T_{t_1,...,t_l}^l(D_{x,\nu}^k g,x,\nu)$$

Лемма 4 доказана в [3], стр.26.

Доказательство теоремы 3: Из определения k-й обобщённой разности, теоремы Лебега о предельном переходе, леммы 2, леммы 3 и леммы 4 имеем

$$\Delta_{h_1,...,h_{r+k}}^{r+k}(f,x,\nu) = \Delta_{h_{k+1},...,h_{r+k}}^r(\Delta_{h_1,...,h_k}^r(f,x,\nu),x,\nu) =$$

$$= \varphi(h_{k+1})\cdot ...\cdot \varphi(h_{k+r}) D_{x,\nu}^r L_{h_{k+1},...,h_{r+k}}^r(\Delta_{h_1,...,h_k}^k(f,x,\nu),x,\nu) =$$

$$= \varphi(h_{k+1})\cdot ...\cdot \varphi(h_{k+r}) L_{h_{k+1},...,h_{r+k}}^r(\Delta_{h_1,...,h_k}^k(D_{x,\nu}^r f,x,\nu),x,\nu).$$

Используя обобщённое неравенство Минковского, Лемму 1 и очевидное неравенство: $|\varphi(h)| \le C_6 h^2$ при $0 < h \le \frac{\pi}{2}$, где C_6 не зависит от h, имеем, что

$$\left\|\Delta_{h_1,...,h_{r+k}}^{r+k}(f,x,\nu)\right\|_{p,\alpha,\beta} \le C_7 h_{k+1}^2 \cdot ...\cdot h_{r+k}^2 \left\|\Delta_{h_1,...,h_k}^k(D_{x,\nu}^r f,x,\nu)\right\|_{p,\alpha,\beta}$$

Из определения k-го обобщённого модуля гладкости получаем, что $\tilde{\omega}_{r+k}(f,\delta,\nu)_{p,\alpha,\beta} \le C_8\delta^{2r}\tilde{\omega}_k(D^r_{x,\nu}f,\delta,\nu)_{p,\alpha,\beta}$

По теореме 1

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le C_9\tilde{\omega}_{r+k}(f,\frac{1}{n},\nu)_{p,\alpha,\beta} \le \frac{C_{10}}{n^{2r}}\tilde{\omega}_k(D^r_{x,\nu}f,\frac{1}{n},\nu)_{p,\alpha,\beta}$$

Теорема 2 доказана.

Abstract

The author considers an approximation by algebraic polynominals of functions with a given K-M generalized module smoothness of a derivative.

Литературы

1. Казимиров Г.Н. О теоремах Джексона для к-го обобщённого модуля гладкости. Деп. в ВИНИТИ РАН 27.12.94, 3054-В94.

2. Потапов М.К. О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения. Труды МИАН СССР, 1975, Том 134, с. 260-277.

3. Казимиров Г.Н. Приближение алгебраическими многочленами функций с данным k-м обобщённым модулем гладкости. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. – Москва, 1995. – 106с.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 07.05.04