Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(25), 2004

УДК 519.2

Мультипликативность стационарного распределения открытой СеМО, описываемой процессом захватов и катастроф

Ж. А. Черноус

В теории сетей массового обслуживания значительное место занимает класс мультипликативных сетей. Необходимость изучения данного класса сетей очевидна, т.к. ни одна из современных методик, используемых приложениями теории вероятностей, не позволяет найти стационарное распределение немультипликативной сети. С проблемой мультипликативности стационарного распределения тесно связано понятие квазиобратимости. Это понятие лежит в основе большинства результатов по данной проблеме. Определение квазиобратимости цепи Маркова впервые было представлено Ф.П. Келли [1], затем расширено в работе [2] и модифицировано в [3].

Теорема Келли. *Если в Марковской сети все узлы квазиобратимы, то стационарное распределение вероятностей состояний представляется в форме произведения сомножителей, характеризующих отдельные узлы.*

Согласно этой теореме, нахождение стационарного распределения сети сводится к установлению квазиобратимости узлов сети. Таким образом, цель данного исследования – установить квазиобратимость рассматриваемого узла для возможности представления стационарного распределения сети в мультипликативной форме. Существуют различные способы, с помощью которых можно установить квазиобратимость цепи Маркова. В настоящей работе использован метод разложения интенсивности перехода на составляющие, который представлен в [3]. Данный метод основан на том, что интенсивность перехода из некоторого состояния x цепи Маркова с непрерывным временем, имеющей счетное пространство состояний S и счетное множество T типов заявок, в некоторое состояние y этой же цепи осуществляется с интенсивностью $q(x,y)$, которая представляется как:

$$q(x,y)=q^I(x,y)+\sum_{t\in T}\left[q^A(t,x,y)+q^D(t,x,y)+\sum_{s\in T}q^{AD}(s,t,x,y)\right], \qquad (1)$$

где $t,s\in T$ – типы заявок, $q^A(t,x,y)$ и $q^D(t,x,y)$ – интенсивности перехода из состояния x в состояние y за счёт поступления и ухода заявки типа t соответственно, $q^{AD}(s,t,x,y)$ – интенсивность перехода из состояния x в состояние y за счёт поступления заявки типа s, которое одновременно является и уходом заявки типа t (разрешение подобных переходов, так называемых AD – событий, и расширило первоначальное определение квазиобратимости), $q^I(x,y)$ – интенсивность внутреннего перехода из состояния x в состояние y, $x\neq y$. Следует отметить то, что при таком подходе физическая интерпретация интенсивностей q^I, q^A, q^D и q^{AD} не имеет существенного значения. Если $x=y$, будем считать, что происходят переходы из состояния $x\in S$ в это же состояние. Используя введённое разбиение интенсивностей переходов, для всех $x\in S$ и $t\in T$ определяют

$$\alpha(t,x)=\sum_{y\in S}\left[q^A(t,x,y)+\sum_{s\in T}q^{AD}(s,t,x,y)\right], \qquad (2)$$

$$\beta(t,x)=\sum_{y\in S}\frac{p(y)}{p(x)}\left[q^D(t,y,x)+\sum_{s\in T}q^{AD}(s,t,y,x)\right], \qquad (3)$$

где $\{p(x), x \in S\}$ – стационарное распределение рассматриваемой цепи. Выражения в правых частях (2) и (3) есть интенсивности поступлений типа t в прямом и обращённом времени соответственно.

Цепь квазиобратима, если для всех $t \in T$ $\alpha(t, x)$ и $\beta(t, x)$ не зависят от x (в этом случае пишут $\alpha(t)$ и $\beta(t)$). Такую цепь называют также квазиобратимым узлом.

Анализ изолированного узла

Рассмотрим цепь Маркова с пространством состояний $Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и интенсивностями переходов

$q(n, n+1) = a$, $n > 0$

$q(0, 1) = c$,

$q(n, 0) = b$, $n > 0$

$q(n, m) = 0$ в остальных случаях.

Стационарное распределение $\{p(n), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ для данной цепи находится по формуле:

$$p(n) = \frac{c}{a+b}\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-1} p(0), \tag{4}$$

где $p(0) = \dfrac{b}{b+c}$.

Условием эргодичности данной цепи является условие $\dfrac{a}{a+b} < 1$.

Докажем, что рассматриваемая цепь квазиобратима. Для этого:

– положим, что в цепи возможны переходы только одного типа,

– разрешим переходы из любого состояния $n \geq 1$ системы в себя (интенсивность таких переходов положим равной c),

– разобьем интенсивности переходов следующим образом:

$$q^A(0, 1) = c, \tag{5}$$

$$q^I(n, n+1) = a, \quad n > 0, \tag{6}$$

$$q^D(n, 0) = b, \quad n > 0, \tag{7}$$

$$q^{AD}(n, n) = c, \quad n > 0. \tag{8}$$

Преобразованная таким образом цепь представляет собой модель блуждающих заявок, пытающихся захватить узел. Они могут захватить пустой узел, но должны двигаться дальше, если он уже занят. В пределах узла состояние цепи Маркова увеличивается за счёт внутренних изменений, происходящих с интенсивностью a (возможно моделирование рождения других заявок), до тех пор, пока не произойдёт катастрофа (интенсивность b).

Найдем интенсивности $\alpha(n)$ поступлений заявок в очередь из n заявок. Используя равенства (2), (5) и (8), имеем:

$$\alpha(n) = \begin{cases} q^{AD}(n, n), & n > 0 \\ q^A(0, 1), & n = 0 \end{cases} = c.$$

Найдем также интенсивности $\beta(n)$ поступлений заявок в обращенном времени в очередь из n заявок. Используя равенства (3), (7) и (8), получаем:

$$\beta(n) = \frac{p(n)}{p(n)} q^{AD}(n, n) = c, \quad n > 0;$$

$$\beta(0)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p(j)}{p(0)}q^{D}(j,0)=b\frac{c}{a+b}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{a}{a+b}\right)^{j-1}=c.$$

Квазиобратимость установлена, а значит, согласно теореме Келли узел может принадлежать сети с мультипликативным стационарным распределением.

Стационарное распределение сети

Предположим, что имеется N квазиобратимых узлов со структурой, определенной выше (с учетом разбиения интенсивностей переходов). Рассмотрим сеть, состоящую из этих N узлов с неограниченным числом мест для ожидания. В сеть поступает простейший поток заявок интенсивности c. Каждая заявка независимо от других заявок с вероятностью p_{oi} ($i=\overline{1,N}$) поступает в i-й узел, $\sum_{i=1}^{N}p_{oi}=1$. Это поступление эквивалентно поступлению N независимых пуассоновских потоков с параметрами $c_i=cp_{oi}$, где c_i – поток заявок, направленный в i-й узел извне. Времена обслуживания заявок в различных узлах независимы и имеют распределение с параметрами b_i, $i=\overline{1,N}$. Заявки, завершающие обслуживание в i-м узле, сгруппировавшись, мгновенно переходят в j-й узел с вероятностью p_{ij} или с вероятностью p_{io} покидают сеть, $p_{io}+\sum_{j=1}^{N}p_{ij}=1$, $i=\overline{1,N}$. Состояние сети будем описывать вектором $n=(n_1,n_2,\ldots,n_N)$, где n – количество заявок в сети, n_i – количество заявок на i-м узле, $n=\sum_{i=1}^{N}n_i\geq 0$. Пространство состояний сети обозначим через $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_N$, где X_i – пространство состояний i-го узла, $X=Z_+\times Z_+\times\ldots\times Z_+=Z_+^N$.

Все возможные переходы в сети имеют следующие интенсивности:

$$q(n,[n_i+1])=c_i\mathrm{I}_{\{n_i=0\}}, \tag{9}$$

$$q(n,[n_i+1])=a_i\mathrm{I}_{\{n_i\neq 0\}}, \tag{10}$$

$$q([n_i+k,n_j-1],n)=b_i\mathrm{I}_{\{n_i=0\}}p_{ij}I_{\{n_j=1\}}, \tag{11}$$

$$q(n,n)=c, \tag{12}$$

$$q([n_i+k],n)=b_i\mathrm{I}_{\{n_i=0\}}p_{io}, \tag{13}$$

$$q([n_i+k,n_j],n)=b_i\mathrm{I}_{\{n_i=0\}}p_{ij}. \tag{14}$$

В равенствах (9)–(14):

$$[n_i+k]=(n_1,n_2,\ldots,n_{i-1},n_i+k,n_{i+1},\ldots,n_N),$$

$$[n_i+k,n_j-1]=(n_1,\ldots,n_i+k,\ldots,n_j-1,\ldots,n_N),\ k=\overline{1,\infty},$$

$$\mathrm{I}_{\{n_i=0\}}=\begin{cases}0, & n_i\neq 0\\ 1, & n_i=0\end{cases},\ \mathrm{I}_{\{n_i\neq 0\}}=\begin{cases}0, & n_i=0\\ 1, & n_i\neq 0\end{cases},\ \mathrm{I}_{\{n_j=1\}}=\begin{cases}0, & n_j\neq 1\\ 1, & n_j=1\end{cases},\ i,j=\overline{1,N}.$$

Интенсивность (9) есть интенсивность перехода из состояния n в состояние $[n_i+1]$, т. е. интенсивность поступления заявки в пустой i-й узел. Интенсивность (10) аналогична интенсивности (9) лишь с тем различием, что заявка поступает в i-й узел, в котором уже есть хотя бы одна заявка. Интенсивность (11) есть интенсивность перехода из состояния $[n_i+k,n_j-1]$ в состояние n, при котором заявки, обслужившиеся прибором i-го узла, сгруппировавшись, переходят в пустой j-й узел. Интенсивность (12) – интенсивность перехода из любого состояния сети в себя. Интенсивность (13) есть интенсивность перехода из состояния $[n_i+k]$ в состояние n, при котором заявки, обслужившиеся прибором i-го узла, сгруппировавшись, покидают сеть. Интенсивность (14) – интенсивность перехода из состояния $[n_i+k, n_j]$ в состояние n, при котором заявки, обслужившиеся прибором i-го узла, сгруппировавшись, переходят в j-й узел

Согласно вышеизложенному стационарное распределение изолированного узла (i-го узла сети) находится по формуле

$$p_i(n_i)=\frac{\alpha_i}{a_i+b_i}\frac{b_i}{b_i+\alpha_i}\left(\frac{a_i}{a_i+b_i}\right)^{n_i-1},\ n_i\ge 1,\ i=\overline{1,N}, \tag{15}$$

где α_i есть интенсивность суммарного потока заявок на i-й узел в стационарной сети ($i=\overline{1,N}$). Интенсивности α_i будут удовлетворять следующему закону сохранения заявок:

$$\alpha_i=c_i+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j p_{ji},\ i=\overline{1,N}.$$

Рассматриваемая сеть квазиобратимых узлов, согласно теореме Келли, будет иметь мультипликативное стационарное распределение

$$p(n)=\prod_{i=1}^{N}p_i(n_i),$$

где $p_i(n_i)$ есть стационарное распределение изолированного квазиобратимого i-го узла, которое находится по формуле (15).

Т.к. $\{p(n), n=0,1,2,\ldots\}$ является распределением вероятностей, то можно показать, что условие

$$\frac{a_i}{a_i+b_i}<1,\ i=\overline{1,N}, \tag{16}$$

является необходимым для существования стационарных вероятностей. Достаточность условия (16) легко доказать, используя эргодическую теорему Фостера [4]. Согласно этой же теореме существует единственное стационарное распределение, которое совпадает с эргодическим (предварительно необходимо показать, что сеть является неприводимой). Таким образом, условие (16) является условием эргодичности.

Abstract

The author considers a multiplicativity of the stationary distribution of an open network of the mass service described by the process of captures and accidents.

Литература

1. Kelly F.P. Networks of Queues // Adv. Appl. Probab. – 1976. – V.8, No 2. – P.416-432.
2. Henderson W., Pearce C.E.M., Pollett P.K., Taylor P.G. Connecting Internally-Balanced Quasireversible Markov Processes // Adv. Appl. Prob. – 1992. – V.24. – P.934–959.
3. Chao X., Miyazawa M.A. Probabilistic Decomposition Approach to Quasi-Reversibility and its Application in Coupling of Queues // Preprint: New Jercy Inst. of Technology, Science Univercity of Tokyo. – 1996. – P.1–18.
4. Foster F.G. On stochastic matrices assosiated with certain queueing process // Ann. Math. Statist. – 1953. – V.24. No 2. – P.355–360.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 07.05.04