Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(32), 2005

УДК 517.9+621.3

О синхронизации автоколебательных систем на обертонах при полигармоническом внешнем воздействии

С. П. Жогаль, С. И. Жогаль, И. В. Сафонов

Эффективным средством достижения большего постоянства частоты автоколебаний является внешняя синхронизация, то есть подача на генератор синхронизирующего напряжения от другого генератора, который обладает большей степенью стабильности частоты, хотя и малой мощностью [1, 2]. При этом осуществляется захват частоты колебаний и, следовательно, ее стабилизация. Когда частота внешней силы приблизительно в целое число раз меньше частоты автоколебаний, указанное явление называется синхронизацией на обертонах (гармониках).

Во многих работах исследуются задачи синхронизации автоколебательных систем на обертонах внешних периодических воздействий. Однако одновременное взаимное влияние нескольких частот на автоколебательные системы изучено недостаточно.

Так, в монографии [1] исследована задача синхронизации на обертонах внешних сил при наличии лишь одного периодического воздействия на частоте $\omega=\omega_0/n$, $n=2,\ 3$, где ω_0 – частота свободных автоколебаний системы.

Рассмотрим нелинейные автоколебательные системы при одновременном воздействии на них N гармоник внешних сил. Математической моделью таких автоколебательных систем может служить следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x}-\mu f(x,\dot{x})+\omega_0^2 x=\sum_{k=2}^{N+1}\frac{k^2-1}{k^2}\omega_0^2 F_k\cos\omega_k t, \tag{1}$$

где F_k – амплитуда вынужденных колебаний в порождающей системе ($\mu=0$) при $\omega_k=\omega_0/k$, $k=\overline{2,N+1}$.

Следуя [1], проведем замену переменных, выделив слагаемые, описывающие вынужденные колебания на частотах внешних сил:

$$x=y+\sum_{k=2}^{N+1}F_k\cos\omega_k t. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), для переменной y получаем уравнение:

$$\begin{gathered}\ddot{y}+\frac{1}{N}\sum_{k=2}^{N+1}k^2\omega_k^2 y=\mu f\left(y+\sum_{k=2}^{N+1}F_k\cos\omega_k t,\dot{y}-\sum_{k=2}^{N+1}\omega_k F_k\sin\omega_k t\right)-\\ -2\omega_0\sum_{k=2}^{N+1}\Delta_k\left(\frac{y}{N}+F_k\cos\omega_k t\right),\end{gathered} \tag{3}$$

где $\Delta_k=\dfrac{\omega_0^2-k^2\omega_k^2}{2\omega_0}$ – расстройка k-й частоты.

Если $|\mu|<<\omega_0, |\Delta_k|<<\omega_0$, то для решения уравнения (3) можно применять метод усреднения[1; 2].

Полагая $y=A\cos\left(\sqrt{\dfrac{1}{N}\sum_{k=2}^{N+1}k^2\omega_k^2}\,t+\varphi\right)$, для амплитуды A и фазы φ автоколебаний получим следующие укороченные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{A} = -\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=2}^{N+1}\omega_k^2 k^2}} \underset{t}{M}\left\{\Phi(t)\sin\left(\sqrt{\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=2}^{N+1}\omega_k^2 k^2}\, t + \varphi\right)\right\}, \\ \dot{\varphi} = -\dfrac{1}{A\sqrt{\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=2}^{N+1}\omega_k^2 k^2}} \underset{t}{M}\left\{\Phi(t)\cos\left(\sqrt{\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=2}^{N+1}\omega_k^2 k^2}\, t + \varphi\right)\right\}, \end{cases} \tag{4}$$

где *Φ(t)* – правая часть уравнения (3), $\underset{t}{M}$ – оператор усреднения по явно входящему времени *t*.

Полученные таким методом приближенные уравнения (4) дают возможность исследования явления синхронизации при одновременном воздействии на систему N гармоник как в случае медленного прохождения через резонансы, так и для случая стационарного режима. Для определения стационарных амплитуд и фаз колебаний в синхронном режиме полагаем в уравнениях (4) $\dot{A} = 0,\ \dot{\varphi} = 0$.

Чтобы убедиться в реальной возможности существования определенного таким образом стационарного режима, необходимо еще в каждом отдельном случае исследовать его устойчивость.

Рассмотрим осциллятор Ван-дер-Поля при одновременном воздействии на него двух гармоник внешних сил. Для этого положим в (1) $N=2$ и $f(x,\dot{x}) = \left(1 + \beta x - \alpha x^2\right)\dot{x}$.

В этом случае, согласно (4), для амплитуды и фазы колебаний получим уравнения:

$$\begin{cases} \dot{A} = \dfrac{A\mu}{2}\left(1 - \dfrac{1}{4}\alpha A^2 - \dfrac{1}{2}\alpha F_2^2 - \dfrac{1}{2}\alpha F_3^2\right) + \dfrac{\beta\mu}{8}F_2^2\cos\varphi - \dfrac{\alpha\mu}{24}F_3^3\cos\varphi, \\ \dot{\varphi} = \dfrac{1}{2}(\Delta_2 + \Delta_3) - \dfrac{\beta\mu F_2^2\sin\varphi}{8A} + \dfrac{\alpha\mu F_3^3\sin\varphi}{24A}. \end{cases} \tag{5}$$

Полагая $\dot{A} = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$, приходим к системе алгебраических уравнений для определения стационарных значений A и φ, из которой, исключая φ, несложно найти уравнение для определения амплитуд стационарных автоколебаний в синхронном режиме:

$$\left[\left(1 - \frac{1}{4}\alpha A^2 - \frac{1}{2}\alpha F_2^2 - \frac{1}{2}\alpha F_3^2\right)^2 + \frac{(\Delta_2 + \Delta_3)^2}{\mu^2}\right]A^2 = \left(\frac{1}{4}\beta F_2^2 - \frac{1}{12}\alpha F_3^3\right)^2. \tag{6}$$

Графики зависимости A^2 от Δ_2 и Δ_3 при $\alpha=4,\ \beta=2,\ \mu=0{,}5$ и различных значениях амплитуд внешних сил, показаны на рис. 1–2.

На графиках жирной линией отмечены резонансные кривые, соответствующие случаям отсутствия внешнего воздействия на одной из частот, которые совпадают с кривыми, полученными в [1].

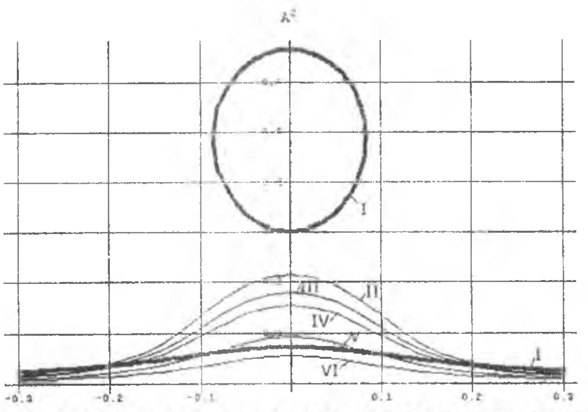

Рис. 1. Резонансные кривые при синхронизации на втором и третьем обертонах при $F_2 = \sqrt{0.24}$, $\Delta_3=0$; I – $F_3 = 0$; II – $F_3 = \sqrt{0.24}$; III – $F_3 = \sqrt{0.26}$; IV – $F_3 = \sqrt{0.275}$; V – $F_3 = \sqrt{0.315}$; VI – $F_3 = \sqrt{0.345}$

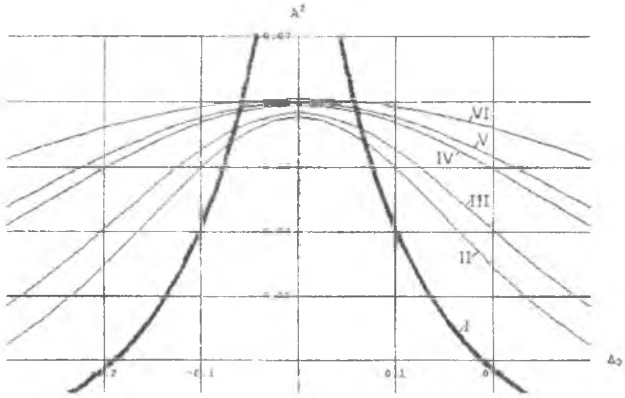

Рис. 2. Резонансные кривые при синхронизации на втором и третьем обертонах при $F_3=\sqrt{0.345}$, Δ_2=0; I – $F_2=0$; II – $F_2=\sqrt{0.355}$; III – $F_2=\sqrt{0.405}$; IV – $F_2=\sqrt{0.55}$; V – $F_2=\sqrt{0.6}$; VI – $F_2=\sqrt{0.8}$

Для исследования вопроса о физической реализуемости стационарного режима, соответствующего (6), нами была выписана система уравнений для отклонений от стационарного состояния. Составляя характеристическое уравнение системы и применяя критерий Рауса-Гурвица, получаем следующие условия устойчивости:

$$\begin{cases} A^2 \ge \left(\dfrac{2}{\alpha}-F_2^2-F_3^2\right), \\ \left(1-\dfrac{3}{4}\alpha A^2-\dfrac{1}{2}\alpha F_2^2-\dfrac{1}{2}\alpha F_3^2\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\alpha A^2-\dfrac{1}{2}\alpha F_2^2-\dfrac{1}{2}\alpha F_3^2\right)+\dfrac{(\Delta_2+\Delta_3)^2}{\mu^2}\ge 0. \end{cases} \quad (7)$$

Неравенства (7) позволяют выделить области устойчивости синхронного режима при различных значениях параметров α, μ, расстроек Δ_2 и Δ_3, а также при различных значениях амплитуд F_2, F_3 вынужденных колебаний.

Из приведенных результатов видно, что полученные аналитические соотношения для амплитуды автоколебаний обобщают результаты [1] на случай одновременного воздействия на частотах ω_0/n, $n=2, 3$. Можно сделать вывод о том, что совместное воздействие таких внешних сил приводит к значительному уменьшению амплитуды на частоте автоколебаний. Рост F_3 при постоянном F_2 приводит вначале к резкому падению амплитуды автоколебаний, а затем к незначительному ее повышению до некоторого предельного уровня, который все же пренебрежимо мал.

Из (6) следует, что в области малых расстроек при $\Delta_3=-\Delta_2$ совместное воздействие на двух частотах аналогично случаю, когда $\Delta_3=\Delta_2=0$.

Таким образом, как в случае одного внешнего воздействия, так и при одновременном воздействии на частотах ω_0/n, $n=2, 3$, при возрастании амплитуд внешних сил колебания на основном тоне практически полностью гасятся, и в системе остаются почти чисто вынужденные колебания.

Abstract. The synchronization problem on the overtons of a self-oscillating systems under polyharmonic external action by the averaging method has been investigated. On the basis of the proposed approach we have considered synchronization of the overtons of external forces in the Van-der-Pol oscillator.

Литература

1. П. С. Ланда, *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы*, Москва, Наука, 1980.

2. М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, Москва, Наука, 1984.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 06.09.05