Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 5(32), 2005

УДК 517.977

Реализация оптимальной обратной связи для малых колебаний в одной нелинейной системе четвертого порядка

Е. А. Ружицкая

1. Введение. В последнее время получила большое развитие теория оптимальных процессов в управляемых динамических системах. Среди проблем оптимального управления важное место занимает проблема стабилизации динамических систем [1]. Классические подходы к ее решению опирались на разнообразные достаточные условия асимптотической устойчивости движения [2]. С созданием математической теории оптимальных процессов [3] появилась возможность построения оптимальных ограниченных стабилизирующих обратных связей [4, 5].

В работе [6] описан метод стабилизации нелинейной системы второго порядка с одной нелинейностью. Цель данной работы — развить подход, предложенный в [6], и построить стабилизирующую обратную связь для нелинейной системы четвертого порядка, описывающей поведение двух маятников, соединенных упругой связью. Особенностями данной задачи являются, во-первых, нелинейности обоих маятников, во-вторых, многомерное стабилизирующее управляющее воздействие. При построении обратной связи используется вспомогательная задача минимизации интенсивности управления.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу стабилизации около верхнего неустойчивого положения равновесия с помощью ограниченных обратных связей двух мятников, связанных упругой связью, при малых начальных отклонениях. Математическая модель такой системы с приложенным к оси подвеса управляющим моментом $u = (u_1, u_2) \in R^2$, при $t \geqslant 0$, имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}\sin(x_1 + x_2) + \frac{1}{ml^2}u_1, \\ \ddot{x}_2 = \frac{g}{l}\sin x_2 - \frac{k}{m}\sin(x_1 + x_2) + \frac{1}{ml^2}u_2. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь m – масса маятников, l – длина маятников, k – коэффициент упругости пружины, связывающей маятники, x_1, x_2 – углы отклонения первого и второго маятников от вертикального верхнего положения равновесия, $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ – угловые ускорения маятников, $t \geqslant 0$ – время.

Обозначим $x = (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) \in R^4$. Пусть $X \subset R^4$ — область притяжения состояния равновесия $x = 0$.

Функцию

$$u = u(x) = (u_1(x), u_2(x)),\ x \in X, \tag{2}$$

назовем ограниченной дискретной (с периодом квантования $h > 0$) стабилизирующей обратной связью, если:

1) $u(0) = (u_1(0), u_2(0)) = 0$;

2) $|u_1(x)| \leqslant L,\ |u_2(x)| \leqslant L,\ 0 < L < \infty, x \in X$;

3) траектория замкнутой системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}\sin(x_1 + x_2) + \frac{1}{ml^2}u_1(x), \\ \ddot{x}_2 = \frac{g}{l}\sin x_2 - \frac{k}{m}\sin(x_1 + x_2) + \frac{1}{ml^2}u_2(x). \end{cases} \tag{3}$$

представляет непрерывное решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}\sin(x_1 + x_2) + \frac{1}{ml^2}u_1(t), \\ \ddot{x}_2 = \frac{g}{l}\sin x_2 - \frac{k}{m}\sin(x_1 + x_2) + \frac{1}{ml^2}u_2(t). \end{cases}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

при $x(0) = x_0$, с управлением $u(t) = u(kh),\ t \in [kh, (k+1)h[,\ k = 0, 1, 2, ...;$

4) нулевое решение $x(t) \equiv 0,\ t \geqslant 0$, замкнутой системы (3) асимптотически устойчиво и X.

3. Вспомогательная задача оптимального управления. Выберем число $0 < \Theta = Nh < \infty$ (параметр метода), критерий качества $J(u) = \min\limits_{u(t)\in[0,\Theta]} \max |u(t)|$, и класс доступных дискретных управлений $u(t) = u(kh),\ t \in [kh, (k+1)h[,\ k = \overline{0, N-1}$.

Предположим, что для каждого начального состояния $x(0) = x_0 \in X$ существует дискретное управление $|u_1(t)| \leqslant L,\ |u_2(t)| \leqslant L,\ 0 \leqslant t \leqslant \Theta < \infty$, которое переводит систему (1), при $x(0) = x_0$, в момент $t = \Theta$ в состояние равновесия $x = 0$.

В классе доступных управлений рассмотрим вспомогательную (сопровождающую) задачу оптимального управления

$$V_\Theta(z) = \min_{u_1,u_2} \rho,$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \tfrac{g}{l}\sin x_1 - \tfrac{k}{m}\sin(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{ml^2}u_1(t), \\ \ddot{x}_2 &= \tfrac{g}{l}\sin x_2 - \tfrac{k}{m}\sin(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{ml^2}u_2(t). \end{aligned} \tag{4}$$

$$x(0) = z,\ x(\Theta) = 0,\ |u_1(t)| \leqslant \rho,\ |u_2(t)| \leqslant \rho,\ t \in T = [0, \Theta].$$

Пусть $u^0_\Theta(t|z),\ t \in T$, — оптимальное программное управление задачи (4), X_Θ — множество $z \in X$, для которых существует решение задачи (4).

Функцию

$$u^0_\Theta(z) = u^0_\Theta(0|z),\ z \in X_\Theta, \tag{5}$$

назовем оптимальным (стартовым) управлением типа обратной связи.

Можно показать, что функция (5) является ограниченной стабилизирующей дискретной обратной связью [6].

При малых начальных отклонениях заменим нелинейную характеристику системы $\sin x$ линейной функцией $-x$. Тогда задача (4) эквивалентна следующей линейной задаче оптимального управления:

$$V_\Theta(z) = \min_{u_1,u_2} \rho,$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\tfrac{g}{l}x_1 + \tfrac{k}{m}(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{ml^2}u_1, \\ \ddot{x}_2 &= -\tfrac{g}{l}x_2 + \tfrac{k}{m}(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{ml^2}u_2. \end{aligned} \tag{6}$$

$$x(0) = z,\ x(\Theta) = 0,\ |u_1(t)| \leqslant \rho,\ |u_2(t)| \leqslant \rho,\ t \in T.$$

Опишем алгоритм работы оптимального регулятора, который в каждом процессе стабилизации способен в режиме реального времени вычислять текущие значения оптимальной обратной связи.

Задача (6) — задача оптимального программного управления, в ней все элементы известны, и поэтому для начального состояния $x(0) = z$ она может быть решена заранее любым методом, не обращая внимание на затраты машинного времени. Однако с точки зрения последующего синтеза, задачу (6) целесообразно решить адаптивным (прямым или двойственным) методом [7], который кроме оптимального программного управления $u^0(t|x(0)),\ t \in T$, доставляет оптимальную опору $K^0_{on}(0)$.

В соответствии с (5) значение $u^0(0|x(0))$ используем в качестве начального сигнала $u^*(0) = u^0(x(0))$ стабилизирующей обратной связи на промежутке времени $[0, h]$. Предположим, что стабилизатор проработал на промежутке времени $[0, \tau = lh[$ и замкнутая система (3) в текущий момент времени $\tau = lh$ оказалась в состоянии $x^*(\tau)$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

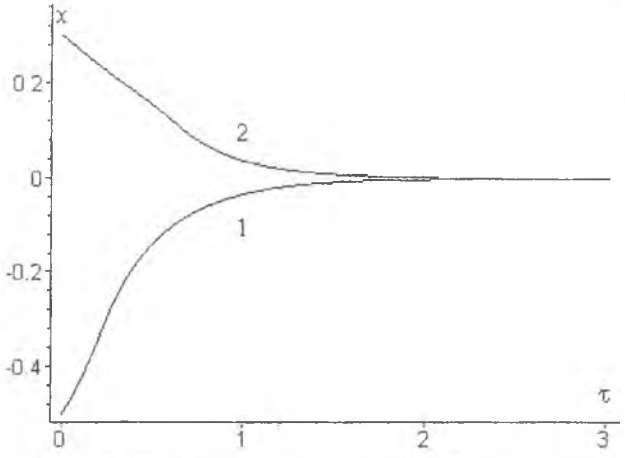

Рис. 1: Траектории замкнутой системы.

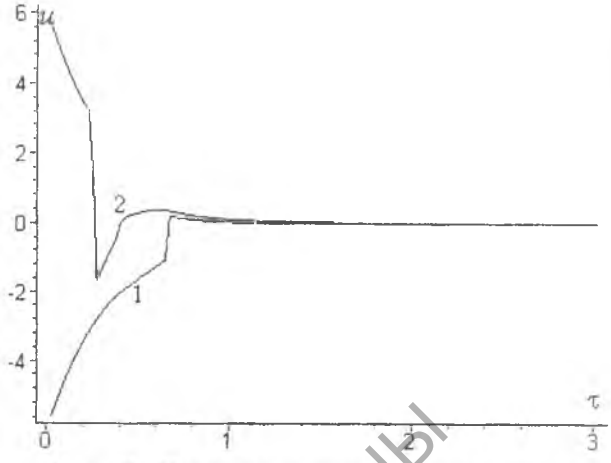

Рис. 2: Реализовавшиеся управления.

Чтобы вычислить текущее значение $u(x^*(\tau))$ стабилизирующей обратной связи, стабилизатору нужно решить задачу (6) с $z = x^*(\tau)$ с учетом того, что в предыдущий момент $\tau - h$, когда система (3) находилась в состоянии $x^*(\tau - h)$, стабилизатор уже решил задачу (6) с $z = x^*(\tau - h)$, построив оптимальную опору $K^0_{on}(\tau - h)$. Задача (6) для соседних моментов τ и $\tau - h$ отличается только начальными условиями $x^*(\tau)$, $x^*(\tau - h)$, и это отличие тем меньше, чем меньше h. Поэтому наиболее эффективным методом решения задачи (6) с $z = x^*(\tau)$ является двойственный метод коррекции опоры $K^0_{on}(\tau - h)$. Построив решение $u^0(t|x^*(\tau))$ задачи (6), при $z = x^*(\tau)$, получаем реализацию $u^*(\tau) = u^0(x^*(\tau)) = u^0(0|x^*(\tau))$ обратной связи на промежутке $[\tau, \tau + h[$. Если время, необходимое для коррекции опоры $K^0_{on}(\tau - h)$, а, значит, и для вычисления $u^*(\tau)$, не превосходит h, то можно говорить о стабилизации системы в режиме реального времени.

Описанная процедура была реализована на ПЭВМ. Для решения задачи (6) были выбраны следующие значения параметров: $m = 1$, $l = 1$, $g = 9.8$, $k = 11.8, \Theta = 0.5, h = 0.025$. В качестве начального состояние было выбрано $x(0) = (-0.5, 0.5, 0.3, -0.3)$.

На рис. 1 показана траектория нелинейной системы (2), замкнутой оптимальной обратной связью, полученной с помощью решения линейной вспомогательной задачи оптимального управления (6). Кривая 1 соответствует состоянию x_1 замкнутой системы (2), кривая 2 — состоянию x_2. На рис. 2 представлены реализовавшееся управления u_1 и u_2 (кривые 1 и 2), соответствующее состояниям x_1 и x_2.

Abstract. The problem of construction of the limited feedback for stabilization of one nonlinear system of the fourth order is investigated. For the solution of the problem the positional solution of an auxiliary optimal control problem is used. The results of stabilizer work has been given.

Литература

1. Н. Н. Красовский, *Проблемы стабилизации управляемых движений* / И. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения*, Москва, Наука, 1966.

2. И. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения*, Москва, Наука, 1966.

3. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Москва, Наука, 1969.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

4. R. Gabasov, F. M. Kirillova, E. A. Ruzhitskaya, *Stabilization of dynamical systems with the help of optimization methods*, Nonsmooth and discontinuous problems of control and optimization, Proceedings volume from the IFAC Workshop, Chelyabinsk, Russia, 1998, 35–41.

5. Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, О. И. Костюкова, *Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче*, Докл. АН СССР, **320**, № 6 (1991), 1294–1299.

6. Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, Е. А. Ружицкая, *Демпфирование и стабилизация маятника при больших начальных возмущениях*, Изв. РАН. Теория и системы управления, № 1 (2001), 29–38.

7. R. Gabasov, F. M. Kirillova, *Real-time construction of optimal closable feedbacks*, 13th World Congress of IFAC International Federation of Automatic Control, V.D., San Francisca, CA, USA. 1996.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 01.09.05

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ