

Упругопластический изгиб трехслойного стержня на упругом основании

С. А. СТАРОВОЙТОВ

Введение. Деформирование упругих трехслойных стержней на упругом основании с несжимаемым заполнителем исследовано в работах [1, 2]. Здесь рассматривается трехслойный стержень, материалы несущих слоев которого в процессе деформирования могут проявлять физически нелинейные свойства.

Постановка задачи. Для описания кинематики пакета использованы гипотезы ломаной нормали. Для упругопластических тонких несущих слоев приняты гипотезы Бернулли. В физически нелинейном заполнителе нормаль не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. На внешнюю поверхность стержня действует вертикальная распределенная силовая нагрузка $q(x)$. На торцах стержня могут быть приложены заданные усилия $N_0^{(k)}$, $Q_0^{(k)}$, $M_0^{(k)}$, $N_l^{(k)}$, $Q_l^{(k)}$, $M_l^{(k)}$. Искомыми функциями являются сдвиг, прогиб $w(x)$ и продольное перемещение $u(x)$ срединной плоскости заполнителя. Все размеры отнесены к длине стержня l . Деформации в слоях можно связать с искомыми перемещениями, исходя из принятых геометрических гипотез:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(1)} &= u_{,x} + c\psi_{,x} - zw_{,xx}; & \varepsilon_x^{(1)} &= 0 & (c \leq z \leq c + h_1); \\ \varepsilon_x^{(3)} &= u_{,x} + z\psi_{,x} - zw_{,xx}; & \varepsilon_x^{(3)} &= \frac{1}{2}\psi & (-c \leq z \leq c); \\ \varepsilon_x^{(2)} &= u_{,x} - c\psi_{,x} - zw_{,xx}; & \varepsilon_x^{(2)} &= 0 & (-c - h_2 \leq z \leq -c).\end{aligned}$$

где c – половина толщины заполнителя, h_1 , h_2 – толщина несущих слоев стержня, z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Физические соотношения, связывающие напряжения и деформации в слоях принимаются в соответствии с теорией малых упругопластических деформаций Ильюшина:

$$s_x^{(k)} = 2G^{(k)}(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\varepsilon_x^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = K^{(k)}\theta^{(k)},$$

где $s_x^{(k)}$, $\varepsilon_x^{(k)}$ – девиаторы, $\sigma^{(k)}$, $\theta^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G^{(k)}$, $K^{(k)}$ – сдвиговой и объемный модули деформации материалов; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функция пластичности материала k -го слоя, которую при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_T^{(k)}$ следует положить равной нулю; $\varepsilon_u^{(k)}$, $\varepsilon_T^{(k)}$ – интенсивность деформаций и деформационный предел текучести материала k -го слоя.

Уравнения равновесия получены из вариационного принципа Лагранжа. В перемещениях они имеют вид:

$$\begin{aligned}a_1 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} &= p_\omega; & a_2 u_{,xx} + a_4 \psi_{,xx} - a_6 w_{,xxx} - a_5 \psi &= h_\omega; \\ a_3 u_{,xxx} + a_6 \psi_{,xxx} - a_7 w_{,xxxx} - \kappa w &= q_\omega - q_0.\end{aligned} \quad (1)$$

Здесь в слагаемые с индексом “ ω ” включены все нелинейные добавки; коэффициенты $a_1, \dots, a_7$ определяются геометрическими и механическими параметрами слоев; κ – коэффициент постели (жесткости упругого основания).

Примем условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие граничные условия для перемещений при $x = 0$; l имеют вид:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k=1, 2). \quad (2)$$

Уравнения (1) и граничные условия (2) являются нелинейными относительно неизвестных перемещений. Поэтому для решения краевой задачи применим метод упругих решений Ильюшина [3], согласно которому система (1) переписывается в итерационном виде:

$$\begin{aligned} a_1 u_{,xx}^{(n)} + a_2 \psi_{,xx}^{(n)} - a_3 w_{,xxx}^{(n)} &= p_{\omega}^{(n-1)}; \quad a_2 u_{,xx}^{(n)} + a_4 \psi_{,xx}^{(n)} - a_6 w_{,xxx}^{(n)} - a_5 \psi^{(n)} = h_{\omega}^{(n-1)}; \\ a_3 u_{,xxx}^{(n)} + a_6 \psi_{,xxx}^{(n)} - a_7 w_{,xxxx}^{(n)} - \kappa w^{(n)} &= q_{\omega}^{(n-1)} - q_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь n – номер приближения; величины $p_{\omega}^{(n-1)}$, $h_{\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$ на первом шаге ($n=1$) полагаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения. Таким образом, на каждом шаге приближения имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными "внешними" нагрузками $p_{\omega}^{(n-1)}$, $h_{\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$.

Решение системы дифференциальных уравнений получим, представив искомые перемещения $w(x)$, $\psi(x)$, $u(x)$ в виде:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin \frac{\pi m x}{l}; \quad \psi = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m \cos \frac{\pi m x}{l}; \quad u = \sum_{m=1}^{\infty} U_m \cos \frac{\pi m x}{l}, \quad (4)$$

где W_m , Ψ_m , U_m – неизвестные амплитуды перемещений.

При подобном представлении перемещений граничные условия (4) выполняются автоматически. Внешнюю нагрузку $q(x)$ разложим в ряд синусов:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{\pi m x}{l}; \quad q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q_0(x) \sin \left(\frac{\pi m x}{l} \right) dx. \quad (5)$$

Дополнительные нагрузки также разложим в ряды:

$$p_{\omega} = \sum_{m=1}^{\infty} p_{\omega m} \cos \frac{\pi m x}{l}; \quad h_{\omega} = \sum_{m=1}^{\infty} h_{\omega m} \cos \frac{\pi m x}{l}; \quad q_{\omega} = \sum_{m=1}^{\infty} q_{\omega m} \sin \frac{\pi m x}{l}, \quad (6)$$

$$\text{где } p_{\omega m} = \frac{2}{l} \int_0^l p_{\omega} \cos \frac{\pi m x}{l} dx; \quad h_{\omega m} = \frac{2}{l} \int_0^l h_{\omega} \cos \frac{\pi m x}{l} dx; \quad q_{\omega m} = \frac{2}{l} \int_0^l q_{\omega} \sin \frac{\pi m x}{l} dx.$$

Подставив (4), (5), (6) в (3), получим систему алгебраических уравнений относительно амплитуд искомых перемещений:

$$\begin{aligned} a_1 U_m^{(n)} + a_2 \Psi_m^{(n)} - a_3 \frac{\pi m}{l} W_m^{(n)} &= \frac{l^2}{\pi^2 m^2} p_{\omega m}^{(n-1)}; \\ a_2 U_m^{(n)} + \left(a_4 + a_5 \frac{l^2}{\pi^2 m^2} \right) \Psi_m^{(n)} - a_6 \frac{\pi m}{l} W_m^{(n)} &= \frac{l^2}{\pi^2 m^2} h_{\omega m}^{(n-1)}; \\ a_4 U_m^{(n)} + a_6 \Psi_m^{(n)} - \left(a_7 + \kappa \frac{l^3}{\pi^3 m^3} \right) W_m^{(n)} &= \frac{l^3}{\pi^3 m^3} (q_{\omega m}^{(n-1)} - q_{0m}^{(n)}). \end{aligned} \quad (7)$$

Далее система (7) решается любым численным методом, например, в определителях.

Численные результаты получены для трехслойного стержня с материалами слоев Д16Т – фторопласт – Д16Т [3], $h_1 = 0,04$, $h_2 = 0,02$, $c = 0,09$, величина нагрузки $q_0 = 10^7$ МПа принималась таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов проявились в достаточной степени. На всех рисунках номер кривой соответствует номеру итерации.

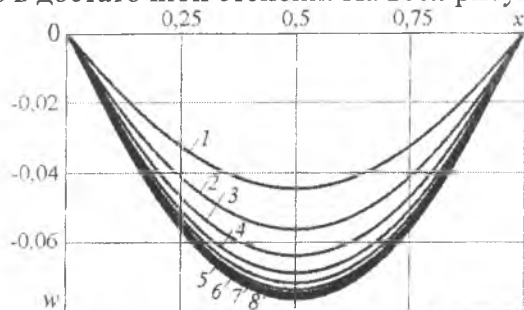


Рис. 1

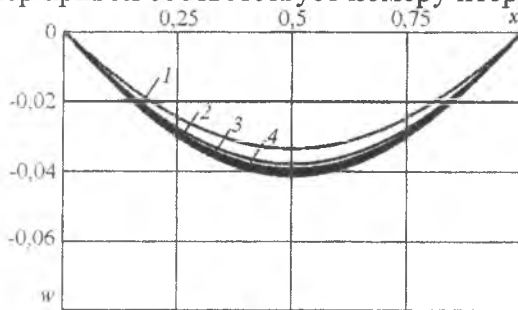


Рис. 2

На рис. 1 на примере прогиба показана сходимость метода упругих решений, при основании малой жесткости ($\kappa = 1$ МПа/м). Здесь второе приближение отличается от первого на 21,1 %. За искомое решение принято 8-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1 %. Результирующий прогиб физически нелинейного стержня превосходит упругий прогиб на 41,3 %.

При основании средней жесткости (рис. 2, $\kappa = 100$ МПа/м) сходимость убыстряется и уже 4-е приближение принято за искомое. Оно отличается от начального на 18,5 %.

Если основание имеет высокую жесткость ($\kappa = 10^5$ МПа/м), то величина прогиба упругопластического стержня мало отличается от упругого прогиба. Поэтому за искомое принято 2-е приближение.

Вывод: метод упругих решений позволяет быстро и с достаточной для применения на практике точностью получать решение краевой задачи о деформировании физически нелинейного трехслойного стержня, покоящегося на упругом основании.

Abstract. Formulation of the problem of the bending of metal-polymer rod on elastic foundation has been suggested. Analytic solution has been obtained in iterations. Numerical results are presented for the simply supported rod.

Литература

1. С. А. Старовойтов, *Моделирование поведения трехслойного стержня на упругом основании*, Сборник трудов молодых ученых Национальной академии наук Беларуси, 4, Минск, ИП Логвинов, 2004, 134–137.
2. А. В. Яровая, С. А. Старовойтов, *Трехслойный стержень на упругом основании*, Материалы, технологии, инструменты, 8, № 2 (2003), 9–11.
3. Э. И. Старовойтов, *Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости*, Учебник для студентов строительных специальностей вузов, Гомель, БелГУТ, 2001.