Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(37), 2006

УДК 624.154

Компактный одношаговый алгоритм метода суперэлементов

В. Е. Быховцев

Метод суперэлементов основывается на той же теоретической основе, что и метод конечных элементов (МКЭ), только предварительно ещё используется метод декомпозиции, т.е. вся расчётная область разбивается на отдельные макроэлементы, называемые суперэлементами. Все суперэлементы в определённом порядке имеют общую границу. Эта граница так же условна, как и границы между конечными элементами при дискретизации области [1, 2]. Всякий суперэлемент подлежит дискретизации конечными элементами. При этом дискретизация производится так, чтобы в пределах одного элемента участок среды можно было бы рассматривать как однородный. Причем любой другой элемент, оставаясь также однородным, может характеризоваться свойствами, отличными от соседних элементов. Для каждого суперэлемента составляется своя конечноэлементная задача [1, 2], но, в отличие от обыкновенной конечноэлементной задачи, в каждом суперэлементе граница, по которой происходит стыковка с другим суперэлементом, явно не определена. При конечноэлементной дискретизации суперэлемента не ставится вопрос количества внутренних узлов [3]. Представляет интерес такая конечноэлементная дискретизация суперэлемента, когда внутренних узлов не существует, т.е. по одному из координатных направлений происходит *одношаговая дискретизация суперэлемента*. В общем случае дискретизация расчётной области нерегулярная, т.е. количество узлов дискретизации на граничных линиях или плоскостях суперэлементов может быть различным. С физической точки зрения при такой дискретизации расчётная область делится на слои, не содержащие внутренних узлов. При таком подходе получается компактный алгоритм, который легко программируется. Алгоритм суперэлементного решения строится следующим образом:

1) определяется область существования исследуемой системы и граничные условия;

2) производится суперэлементная дискретизация расчётной области таким образом, чтобы по выбранному координатному направлению размер суперэлемента равнялся одному шагу дискретизации;

3) контактная граница первого суперэлемента выражается аналитически через перемещения впереди находящихся узлов;

4) рассматривается второй суперэлемент, для которого ситуация будет подобна первому суперэлементу;

5) указанный процесс продолжается до последнего суперэлемента, в итоге получим разрешимую систему линейных алгебраических уравнений. Далее в обратной последовательности вычисляются все необходимые перемещения.

В методе суперэлементов, также как и в методе конечных элементов, составляется своё глобальное основное уравнение метода:

$$[\mathrm{K}]^{\Gamma}\{\delta\}^{\Gamma} = \{\mathrm{P}\}^{\Gamma}, \qquad \text{где } [\mathrm{K}]^{\Gamma} = \sum_{C=1}^{M} [K]^{C}, \quad [\mathrm{K}]^{C} = \sum_{e=1}^{N} [K]^{e},$$

$[\mathrm{K}]^{\Gamma}$ − глобальная суперэлементная матрица жёсткости расчётной области,

$[\mathrm{K}]^{C}$ – матрица жёсткости одного суперэлемента,

$[\mathrm{K}]^{e}$ − матрица жёсткости единичного конечного симплекс-элемента в двумерном или трёхмерном пространстве,

$\{\delta\}^{\Gamma}$, $\{\mathrm{P}\}^{\Gamma}$ − векторы узловых перемещений и внешних сил,

M – количество суперэлементов в расчётной области,

N – количество конечных элементов дискретизованной области суперэлемента.

Матрица жёсткости для двумерного симплекс-элемента имеет следующий общий вид [2]:

$$[K]^e = \frac{\rho}{4S}\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jk} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} \end{bmatrix};$$

где $k_{ij} = k_{ji}^{T}$,

$$k_{m,n} = \begin{bmatrix} b_m b_n + \frac{1-\mu}{2} c_m c_n & \mu b_m c_n + \frac{1-\mu}{2} c_m b_n \\ \mu c_m b_n + \frac{1-\mu}{2} b_m c_n & c_m c_n + \frac{1-\mu}{2} b_m b_n \end{bmatrix},$$

$m, n = i, j, k$; $\rho = E / (1 - \mu^2)$;

E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона;

$b_i = y_j - y_k$; $b_j = y_k - y_i$; $b_k = y_i - y_j$;

$c_i = -(x_j - x_k)$; $c_j = -(x_k - x_i)$; $c_k = -(x_i - x_j)$,

S – площадь активного симплекс-элемента с вершинами i,j,k; x, y, z – координаты узлов i,j,k.

Дискретизация трёхмерного суперэлемента должна быть согласованной и проводится в два этапа. Вначале разбиение производится на параллелепипеды, каждый из которых разбивается на шесть равновеликих тетраэдров. В объёме параллелепипеда противоположные грани должны быть гомеоморфными, что является основным условием согласованной дискретизации суперэлементов системы твёрдых тел. Получаемая при этом матрица жёсткости деформируемой системы будет ленточная, симметричная и минимальной ширины. Такой двухступенчатый подход к процессу дискретизации является достаточно удобным и гибким, т.к. позволяет сравнительно легко строить дискретизованную область нерегулярной структуры. При этом исключаются возможные при других подходах ошибки согласования пространственной дискретизации и ориентации конечных элементов, исключаются ошибки формирования глобальной матрицы жёсткости исследуемой системы, достигается минимальный объём обрабатываемой информации и обеспечивается высокая точность решаемых задач.

Матрица жёсткости для тетраэдра в общем случае имеет вид [1]:

$$[K]^e = \frac{1}{36V}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix},$$

где V – объём элемента,

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} b_i b_j \rho + (c_i c_j + d_i d_j)G & b_i c_j \lambda + c_i b_j G & b_i d_j \lambda + d_i b_j G \\ c_i b_j \lambda + b_i c_j G & c_i c_j \rho + (b_i b_j + d_i d_j)G & c_i d_i \lambda + d_i c_j G \\ d_i b_j \lambda + b_i d_j G & d_i c_j \lambda + c_i d_j G & d_i d_j \rho + (c_i c_j + b_i b_j)G \end{bmatrix},$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}; \qquad \lambda = \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} E;$$

G, λ – модуль сдвига и коэффициент Ламе,

i – номер узла, связанного с узлами j; $i, j=1,2,3,4$; $\rho = 2G + \lambda$;

b_i, b_j, c_i, c_j – функции координат узлов дискретизации, как и в двумерном случае.

Всякий суперэлемент рассматривается как обыкновенная конечноэлементная задача.

Матрица жесткости суперэлемента строится в следующем порядке:

$$[K]^C = \sum_{e=1}^{N} [K]^e . \tag{1}$$

Суммирование в (1) производится, учитывая номера конечных элементов и узлов в суперэлементе. Матрицу жесткости суперэлемента получим следующим образом:

1) формируем глобальное матричное поле, пока не заполненное (двумерный массив);

2) рассматриваем i-й конечный элемент и для него вычисляем по формулам матрицы жёсткости, которые прибавляем к глобальной матрице на позиции, определяемые глобальными номерами рассматриваемых узлов и конечных элементов (верхние индексы). Следовательно, соблюдая глобальную нумерацию узлов дискретизации, для первого суперэлемента получим:

$$[K]_I = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

В (2) матрица A_{11} выражает связи узлов левой границы суперэлемента между собой, матрица A_{12} выражает связи узлов левой границы с узлами правой границы, матрица A_{21} выражает связи узлов правой границы с узлами левой границы ($A_{12}^T = A_{21}$), матрица A_{22} выражает связи узлов правой границы между собой. Таким образом, для первого суперэлемента основное уравнение в матричной форме примет вид:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2' \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

$$\text{где } F_2' + F_2'' = F_2 , \tag{4}$$

F_1, F_2 – известные внешние силы,

δ_1, δ_2 – узловые перемещения на границе суперэлемента.

Для заданной задачи будем считать, что на внешних границах заданы внешние силы F или перемещения δ. На внутренних границах, в их внутренних узлах, заданы внешние силы (как правило, нулевые). При суперэлементной дискретизации эти силы на каждой вертикали представлены в виде (4), где составляющие принадлежат разным суперэлементам. Величины этих составляющих неизвестны. Поэтому в (3) F_2' – неизвестна, неизвестны так же перемещения δ_1 и δ_2, т.е. (3) неразрешима.

Перепишем (3) в виде:

$$\left.\begin{aligned} A_{11}^1\delta_1 + A_{12}^1\delta_2 &= F_1^1 \\ A_{21}^1\delta_1 + A_{22}^1\delta_2 &= F_2' \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Верхний индекс в матричных коэффициентах показывает принадлежность их к некоторому суперэлементу. Для суперэлемента II по аналогии с I можно записать:

$$\left.\begin{aligned} \overset{II}{A}_{22}\,\delta_2 + \overset{II}{A}_{23}\,\delta_3 &= F_2'' \\ \overset{II}{A}_{32}\,\delta_2 + \overset{II}{A}_{33}\,\delta_3 &= F_3'' \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

И так далее.

Проанализируем вторую строчку в (5) и первую в (6) и сложим их:

$$\overset{I}{A}_{22} + \overset{II}{A}_{22} = A_{22},$$

$$A_{21}\,\delta_1 + A_{22}\,\delta_2 + \overset{II}{A}_{23}\,\delta_3 = F_2 .$$

Аналогично для всех последующих суперэлементов. Таким образом, для всей системы в целом можно записать:

$$\left.\begin{array}{l}A_{11}\delta_1 + A_{12}\delta_2 = F_1 \\ A_{21}\delta_1 + A_{22}\delta_2 + A_{23}\delta_3 = F_2 \\ \qquad A_{32}\delta_2 + A_{33}\delta_3 + A_{34}\delta_4 = F_3 \\ \qquad\qquad A_{43}\delta_3 + A_{44}\delta_4 + A_{45}\delta_5 = F_4 \\ \qquad\qquad\qquad A_{54}\delta_4 + A_{55}\delta_5 + A_{56}\delta_6 = F_5 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad A_{M+1,M}\delta_M + A_{M+1,M+1}\delta_{M+1} = F_{M+1}\end{array}\right\}. \tag{7}$$

При постановке исходной задачи на внешней границе могут быть известны δ_1 и δ_{M+1}, но тогда будут неизвестны F_1 и F_{M+1}. Учитывая граничные условия такого вида, из (7) исключаются первая и последняя строки, а вторая и предпоследняя преобразуются вследствие учёта значений δ_1 и δ_6. В итоге получится система типа (7), но порядок её будет меньше на 2. Для решения подобных систем рационально применять метод прогонки.

Ввиду того, что матрица жесткости системы (7) имеет ленточную структуру и симметрична относительно главной диагонали, в памяти ЭВМ достаточно сформировать и хранить элементы верхней или нижней полуленты. Система (7) строится и решается одновременно. Для её построения нужно рассматривать два смежных элемента i и (i +1), на каждом последующем шаге (i+1) элемент становится i, а (i+2) – (i+1). Такой подход сокращает объёмы используемой памяти, формируется текущая матрица невысокого порядка и вместо решения СЛАУ высокого порядка решаются системы, порядок которых ниже в M раз, где M – количество суперэлементов. Приведенный алгоритм для двумерных и трёхмерных задач механики деформируемого твёрдого тела реализован программно в среде DELPHI.

Abstract. The compact single-step algorithm of super-elements method for numerical research of the deformed condition of big and complex systems of deformable firm bodies is offered in the paper.

Литература

1. В. Е. Быховцев, Компактный алгоритм построения матрицы жесткости в методе конечных элементов, Весцi АН БССР, Сер. ф.-м. навук, № 1 (1983), 34–37.

2. О. Зенкевич, Метод конечных элементов в технике, Москва, Мир, 1975.

3. М. Сиратори, Т. Миёси, Х. Мацусита, Вычислительная механика разрушения, Москва, Мир, 1986.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 15.05.06