Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(32), 2005

*УДК 517.925.52*

# Периодические системы, эквивалентные стационарным системам, правая часть которых выражена тригонометрическими функциями

В. А. Германович

Пусть задана система двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x,y,t), \quad \dot{y} = Q(x,y,t), \tag{1}$$

И пусть функции $P(x,y,t)$ и $Q(x,y,t)$ разложимы в тригонометрические ряды Фурье по переменным $x, y$ с переменными по $t$ коэффициентами. Будем рассматривать только несколько последовательных членов таких рядов. Получим тригонометрические многочлены $P^*(x,y,t)$ и $Q^*(x,y,t)$, которые с некоторой степенью точности приближают функции $P(x,y,t)$ и $Q(x,y,t)$ на соответствующем прямоугольнике.

Наша задача состоит в том, чтобы выяснить, когда система

$$\dot{x} = P^*(x,y,t), \quad \dot{y} = Q^*(x,y,t), \tag{2}$$

имеет такую же отражающую функцию, как и некоторая стационарная система. В [1, с. 24] доказано, что такой стационарной системой может быть только система

$$\dot{x} = P^*(x,y,0), \quad \dot{y} = Q^*(x,y,0). \tag{3}$$

В этом случае отображение за период $[-\omega, \omega]$ $2\omega$-периодической системы (2) будет совпадать с отображением за период $[-\omega, \omega]$ стационарной системы (3). Следовательно, система (3) будет приближать систему (2) и систему (1). Т.о., оказывается целесообразным решать задачу о совпадении отражающих функций систем (2) и (3) и проводить качественное исследование системы (3). Тем самым получим возможность качественно охарактеризовать решения исходной системы (1).

В качестве первого приближения рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x} = a\sin y, \quad \dot{y} = b\sin x, \tag{4}$$

где $a,b \in R$. Точки $(x_m, y_n)$, где $x_m = m\pi,\ y_n = n\pi,\ m,n \in Z$, являются особыми точками системы.

Если $ab > 0$, то особые точки $(k\pi; (k-1)\pi + n\pi),\ k,n \in Z$ системы (4) являются центрами, точки $(k\pi; k\pi + n\pi),\ k,n \in Z$ – седла; если же $ab < 0$, то особые точки $(k\pi, (k-1)\pi + n\pi), k,n \in Z$ системы (4) являются седлами, точки $(k\pi; k\pi + n\pi),\ k,n \in Z$ – центры.

Уравнения траекторий на фазовой плоскости можно найти, исключив из системы (4) время $t$ и найдя ее первый интеграл:

$$b\cos x - a\cos y = C, \quad |C| \le |a| + |b|.$$

Уравнения сепаратрис седел в случае $ab > 0$ имеют вид:

$$b\cos x - a\cos y = \pm|a - b|,$$

а в случае, когда $ab < 0$, уравнения сепаратрис имеют вид: $b\cos x - a\cos y = \pm|a + b|$.

Если $|a| = |b|$, то легко видеть, что сепаратрисы седел образованы отрезками прямых:

$$y = \pm x + (2k-1)\pi,\ k \in Z,\ ab < 0;$$
$$y = \pm x + 2k\pi,\ k \in Z,\ ab > 0.$$

Рассмотрим, как возможные случаи поведения траекторий на фазовой плоскости характеризуют решения рассматриваемой системы. В случае $|a| = |b|$ все решения системы (4) ограничены. Если $|a| \neq |b|$, то среди решений системы (4) найдутся неограниченные решения, которым соответствуют уравнения траекторий $b\cos x - a\cos y = C$, $|C| < |a-b|$ при $ab > 0$ и $|C| < |a+b|$ при $ab < 0$. Причем, если $|a| > |b|$, то для указанных решений системы (4) $y(t)$ ограничен, а $|x(t)| \to \infty$ при $t \to +\infty$, если же $|a| < |b|$, то ограниченным окажется $x(t)$, а $|y(t)| \to \infty$ при $t \to +\infty$. Каждое решение, которое проходит через точки сепаратрисы седла на фазовой плоскости, будет стремиться к одному из постоянных решений.

**Теорема 1.** *Среди систем вида:*

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0 + a_1\cos x + a_2\sin x + a_3\cos y + a_4\sin y + a_5\cos 2x + a_6\sin 2x + a_7\cos 2y + \\ \quad + a_8\sin 2y + a_9\cos x\cos y + a_{10}\cos x\sin y + a_{11}\sin x\cos y + a_{12}\sin x\sin y, \\ \dot{y} = b_0 + b_1\cos x + b_2\sin x + b_3\cos y + b_4\sin y + b_5\cos 2x + b_6\sin 2x + b_7\cos 2y + \\ \quad + b_8\sin 2y + b_9\cos x\cos y + b_{10}\cos x\sin y + b_{11}\sin x\cos y + b_{12}\sin x\sin y; \end{cases}$$

*только системы дифференциальных уравнений вида*

$$\begin{cases} \dot{x} = a\sin y + \alpha(t)\,a\sin y + \beta(t)\left(\dfrac{a^2}{2}\sin 2y - ab\cos x\sin y\right), \\ \dot{y} = b\sin x - \alpha(t)\,b\sin x - \beta(t)\left(\dfrac{b^2}{2}\sin 2x - ab\cos y\sin x\right); \end{cases} \tag{5}$$

*где $\alpha(t), \beta(t)$ – любые нечетные непрерывные функции; имеют одну и ту же отражающую функцию, и она равна отражающей функции системы (4).*

*Доказательство.* Составим дифференциальное уравнение в частных производных

$$\Delta_t + \Delta_x X - X_x\Delta = 0, \tag{6}$$

где $X$ – правая часть заданной дифференциальной системы (4).

Решение этого уравнения $\Delta(x,y,t)$ будем искать в виде вектор-столбца, в каждой строке которого записана сумма нескольких последовательных членов ряда Фурье.

$$\Delta = \begin{cases} a_0 + a_1\cos x + a_2\sin x + a_3\cos y + a_4\sin y + a_5\cos 2x + a_6\sin 2x + a_7\cos 2y + \\ \quad + a_8\sin 2y + a_9\cos x\cos y + a_{10}\cos x\sin y + a_{11}\sin x\cos y + a_{12}\sin x\sin y, \\ b_0 + b_1\cos x + b_2\sin x + b_3\cos y + b_4\sin y + b_5\cos 2x + b_6\sin 2x + b_7\cos 2y + \\ \quad + b_8\sin 2y + b_9\cos x\cos y + b_{10}\cos x\sin y + b_{11}\sin x\cos y + b_{12}\sin x\sin y. \end{cases}$$

Подставим $\Delta(x,y,t)$ в уравнение (6) и сгруппируем слагаемые так, чтобы снова получить последовательность ряда Фурье для функции двух переменных. Коэффициенты при каждом из таких членов приравняем нулю. Получим смешенную систему из 24 дифференциальных и 32 линейных уравнений. Решив эту систему, получим два независимых решения уравнения (6) в виде:

$$\Delta_1 = \begin{cases} c_1\,a\sin y, \\ -c_1\,b\sin x; \end{cases} \qquad \Delta_2 = \begin{cases} \dfrac{c_2\,a^2}{2}\sin 2y - c_2\,ab\cos x\sin y, \\ -\dfrac{c_2 b^2}{2}\sin 2x + c_2\,ab\cos y\sin x; \end{cases}$$

Зная [2], что добавка $\alpha(t)\Delta_1 + \beta(t)\Delta_2$ не меняет отражающую функцию системы (4), ($\alpha(t), \beta(t)$ – нечетные непрерывные функции), делаем заключение, что системы (4) и (5) имеют одну и ту же отражающую функцию. Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Системы (4) и (5) имеют одно и то же отображение за период $[-\omega, \omega]$, если $\alpha(t), \beta(t)$ – $2\omega$-периодические нечетные непрерывные функции.*

*Доказательство.* Воспользуемся следствием из теоремы 1 [1, с. 23].

**Следствие 2.** *Если* $(\varphi(t),\psi(t))$ *– решения системы (4), а* $(u(t),v(t))$ *– решения системы (5), для которых выполняются равенства* $\varphi(-\omega)=u(-\omega)$, $\psi(-\omega)=v(-\omega)$, *то* $\forall\, k\in N$ *имеют место равенства*

$$\varphi((2k-1)\omega)=u((2k-1)\omega),\ \psi((2k-1)\omega)=v((2k-1)\omega) \qquad (7)$$

*Доказательство.* Поставим в соответствие каждому решению $(\varphi(t),\psi(t))$ автономной системы (4) решение $(u(t),v(t))$ неавтономной системы (5), такое, что $\varphi(-\omega)=u(-\omega)$, $\psi(-\omega)=v(-\omega)$. Как доказано выше системы (4) и (5) эквивалентны. Тогда, согласно лемме 4 [2] выполняются равенства (7) настоящего следствия. Следствие доказано.

**Теорема 2.** *Пусть* $\alpha(t),\beta(t)$ *–* $2\omega$*-периодические нечетные непрерывные функции, тогда:*

*I) если* $ab>0$, *то*

*1) решения* $\begin{cases} x(t)\equiv k\pi, \\ y(t)\equiv (k-1)\pi+n\pi,\ \ k,n\in Z \end{cases}$ *системы (5) неасимптотически устойчивы,*

*2) решения* $\begin{cases} x(t)\equiv k\pi, \\ y(t)\equiv k\pi+n\pi,\ \ k,n\in Z \end{cases}$ *системы (5) неустойчивы;*

*II) если* $ab<0$, *то*

*1) решения* $\begin{cases} x(t)\equiv k\pi, \\ y(t)\equiv (k-1)\pi+n\pi,\ \ k,n\in Z \end{cases}$ *системы (5) неустойчивы,*

*2) решения* $\begin{cases} x(t)\equiv k\pi, \\ y(t)\equiv k\pi+n\pi,\ \ k,n\in Z \end{cases}$ *системы (5) неасимптотически устойчивы.*

*Доказательство.* Пусть $(\varphi(t),\psi(t))$ – одно из указанных $2\omega$-периодическое неасимптотически устойчивое или неустойчивое решение системы (4). Согласно следствию 2 для соответствующих решений систем (4) и (5) верны равенства (7).

Очевидна выполнимость неравенств

$$\|\varphi(2k\omega-3\omega)\|\le\pi,\ \|\psi(2k\omega-3\omega)\|\le\pi\,.$$

Т.к. $\alpha(t),\beta(t)$ – непрерывная функция, то решения системы (4), для которых верны соотношения $\|\varphi(-\pi)\|\le\pi$, $\|\psi(-\pi)\|\le\pi$ продолжимы на $[-\pi,\pi]$.

Тогда, согласно теореме 5 [2] решение $(u(t),v(t))$ системы (5) соответственно $2\omega$-периодично и неасимптотически устойчиво или неустойчиво.

**Теорема 3.** *Пусть* $\alpha(t),\beta(t)$ *–* $2\omega$*-периодические нечетные непрерывные функции, тогда:*

*I) те решения системы (5), которые при* $t=\omega$ *проходят через точки области, задаваемой неравенством* $-|a+b|<b\cos x-a\cos y<|a+b|$, *если* $ab<0$, *либо неравенством* $-|a-b|<b\cos x-a\cos y<|a-b|$, *если* $ab>0$ *неограниченны, причем, если* $|a|>|b|$, *то для указанных решений системы (5)* $y(t)$ *ограничен, а* $|x(t)|\to\infty$ *при* $t\to+\infty$, *если же* $|a|<|b|$, *то ограниченным окажется* $x(t)$, *а* $|y(t)|\to\infty$ *при* $t\to+\infty$.

*II) те решения системы (5), которые при* $t=\omega$ *проходят через точки кривых, заданных неявно соотношением* $b\cos x-a\cos y=\pm|a+b|$, *если* $ab<0$, *и соотношением* $b\cos x-a\cos y=\pm|a-b|$, *если* $ab>0$ *ограничены и асимптотически устойчивы, каждое из эти решений стремится к одному из постоянных решений* $\begin{cases} x(t)\equiv k\pi, \\ y(t)\equiv k\pi+n\pi,\ \ k,n\in Z \end{cases}$ *при* $ab>0$ *либо* $\begin{cases} x(t)\equiv k\pi, \\ y(t)\equiv (k-1)\pi+n\pi,\ \ k,n\in Z \end{cases}$ *при* $ab<0$.

*III) те решения системы (5), которые при $t=\omega$ проходят через точки участков плоскости, задаваемых неравенствами* $-|a|-|b| \le b\cos x - a\cos y < -|a+b|$ *и* $|a+b| < b\cos x - a\cos y \le |a|+|b|$ *при* $ab<0$ *либо неравенствами* $-|a|-|b| \le b\cos x - a\cos y < -|a-b|$ *и* $|a-b| < b\cos x - a\cos y \le |a|+|b|$ *при* $ab>0$, *ограничены и неасимптотически устойчивы.*

**Abstract.** The periodic systems for which the reflecting function coincides with the RF of a stationary system the right-hand part of which is expressed by trigonometrical functions are investigated.

### Литература

1. В. И. Мироненко, *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений*, Минск, Университетское, 1986.

2. В. В. Мироненко, *Возмущения дифференциальных систем, не изменяющие временных симметрий*, Дифференциальные уравнения, **40**, № 10 (2004), 1325–1332.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 20.06.2005