Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(37), 2006

УДК 517.9

Применение метода канонических разложений при исследовании амплитуды установившихся колебаний в системах с одной степенью свободы

С. П. Жогаль, С. И. Жогаль, И. В. Сафонов

При изучении колебательных систем большое внимание уделяется исследованию амплитуды случайных колебаний. В том случае, когда ставится задача проведения качественных аналитических исследований, применение метода марковских диффузионных процессов даже в случае широкополосности шумов может оказаться невозможным из-за неинтегрируемости в квадратурах соответствующих уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка (КФП).

Применяя метод канонических разложений в том варианте, который был изложен в [1], на первый взгляд кажется естественным искать математическое ожидание $m_a(t)$ амплитуды колебаний a, исходя из следующего соотношения

$$m_x(t) = m_a(t)\cos(\omega t + m_\theta(t)). \tag{1}$$

Но в этом случае можно сделать вывод о том, что математическое ожидание амплитуды случайных колебаний не зависит от интенсивности шумов и совпадает с амплитудой детерминированных колебаний системы. Однако это не так, например, при возрастании интенсивности аддитивного шума в генераторе Ван–дер–Поля происходит рост как модального значения амплитуды колебаний, так и ее математического ожидания. Теоретически этот факт может быть подтвержден следующими математическими выкладками.

Пусть $x(t)$ является решением следующего квазилинейного дифференциального уравнения:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon}\, g(t, x, \dot{x})\xi(t), \tag{2}$$

где $\xi(t)$ – некоторый широкополосный случайный процесс, ε – малый положительный параметр. Тогда решение уравнения (2) можно искать в виде:

$$x(t) = a(t)\cos(\omega t + \theta(t)), \tag{3}$$

где $a(t)$ и $\theta(t)$ – медленно меняющиеся случайные функции.

Поскольку всякий случайный процесс может быть представлен в виде своего канонического разложения, то, с другой стороны, для $x(t)$ имеем:

$$x(t) = m_x(t) + \sum_k V_k x_k(t). \tag{4}$$

Тогда для

$$y(t) = \dot{x}(t) = -\omega a(t)\sin(\omega t + \theta(t)) \tag{5}$$

в силу линейности и однородности операции дифференцирования, получаем:

$$y(t) = \dot{m}_x(t) + \sum_k V_k \dot{x}_k(t). \tag{6}$$

Воспользовавшись обратным преобразованием для амплитуды колебаний, имеем:

$$\begin{aligned} E\{a^2(t)\} &= E\left\{\left(m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t)\right)^2 + \frac{1}{\omega^2}\left(m_y(t) + \overset{\circ}{Y}(t)\right)^2\right\} = \\ &= E\left\{\left(m_x t) + \overset{\circ}{X}(t)\right)^2\right\} + \frac{1}{\omega^2} E\left\{\left(m_y(t) + \overset{\circ}{Y}(t)\right)^2\right\} = \\ &= m_x^2(t) + \frac{1}{\omega^2} m_y^2(t) + D_x(t) + D_y(t) = m_x^2(t) + \frac{1}{\omega^2}\dot{m}_x^2(t) + \sum_k D_k\left(x_k^2(t) + \dot{x}_k^2(t)\right), \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\overset{\circ}{X} = \sum_k V_k x_k(t)$$
$$\overset{\circ}{Y} = \sum_k V_k \dot{x}_k(t). \tag{8}$$

Таким образом, из (7) непосредственно следует, что математическое ожидание $m_a(t)$ амплитуды случайных колебаний не совпадает с амплитудой детерминированных колебаний, а именно, превосходит ее, причем, чем больше интенсивность шумов в системе, тем значительнее прирост и $m_a(t)$ и модального значения амплитуды.

Итак, находить оценку $m_a(t)$, основываясь на соотношении (1), где $m_x(t)$ – решение соответствующего системе детерминированного уравнения, не совсем корректно. Поэтому желательно при использовании подхода, основанного на применении метода канонических разложений в сочетании с методом усреднения, при нахождении оценки $m_a(t)$ учесть ее зависимость от интенсивности случайных возмущений.

Рассмотрим квазилинейную колебательную систему, подверженную аддитивному воздействию стационарного широкополосного шума. Математической моделью такой системы может служить уравнение:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi(t), \tag{9}$$

где $\xi(t)$ – гауссовский белый шум единичной интенсивности. Так как белый шум является стационарным случайным процессом, то его можно представить в виде канонического разложения [2]

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (V_k \cos v_k t + U_k \sin u_k t), \tag{10}$$

где V_k и U_k таковы, что для любых $k, i, j \ (i \neq j)$:

$$E\{V_k\} = E\{U_k\} = E\{V_k U_k\} = 0.$$
$$E\{V_i U_j\} = 0, D\{V_k\} = D\{U_k\} = D_k. \tag{11}$$

Решение уравнения (9) будем, как обычно принято, искать в виде:

$$x(t) = a(t)\cos\psi(t),$$
$$y(t) = \dot{x}(t) = -\omega a(t)\sin\psi(t), \tag{12}$$
$$\psi(t) = \omega t + \theta(t),$$

где $a(t), \theta(t)$ – медленно меняющиеся функции времени.

Применяя формулу Ито [3,4] дифференцирования сложной случайной функции и формулы обратного преобразования, получаем стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) Ито в нормальной форме, полагая в них $g(t, x, \dot{x}) = \sigma.$

Используя спектральное представление (10) белого шума $\xi(t)$ и канонические разложения амплитуды и фазы колебаний:

$$a(t) = m_a(t) + \sum_{k=0}^{\infty} V_k a_k(t),$$
$$\theta(t) = m_\theta(t) + \sum_{k=0}^{\infty} V_k \theta_k(t), \tag{13}$$

после их подстановки в соответствующие СДУ Ито, получаем:

$$\frac{dm_a}{dt} + \sum_{k=0}^{\infty} V_k \frac{da_k}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f\left(t, \left(m_a + \sum_k V_k a_k\right)\cos\psi, -\omega\left(m_a + \sum_k V_k a_k\right)\sin\psi\right)\sin\psi +$$
$$+ \frac{\varepsilon\sigma^2}{2\omega^2\left(m_a + \sum_k V_k a_k\right)}\cos^2\psi - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega}\sigma\sin\psi\sum_{k=0}^{\infty}(V_k\cos v_k t + U_k \sin u_k t),$$

$$\frac{dm_\theta}{dt}+\sum_{k=0}^{\infty}V_k\frac{d\theta_k}{dt}=-\frac{\varepsilon}{a\omega}f\left(t,\left(m_a+\sum_k V_k a_k\right)\cos\psi,-\omega\left(m_a+\sum_k V_k a_k\right)\sin\psi\right)\cos\psi+$$
$$+\frac{\varepsilon\sigma^2}{\omega^2\left(m_a+\sum_k V_k a_k\right)^2}\sin\psi\cos\psi-\frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma\cos\psi}{\omega\left(m_a+\sum_k V_k a_k\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(V_k\cos v_k t+U_k\sin u_k t\right). \quad (14)$$

Для определения оценок математических ожиданий амплитуды и фазы колебаний, игнорируя влияние членов, содержащих V_k и U_k, получаем следующие детерминированные уравнения:

$$\begin{aligned} m_a(t)\frac{dm_a(t)}{dt}&=-\frac{\varepsilon}{\omega}m_a(t)\,f(t,m_a(t),m_\theta(t))\sin\psi+\frac{\varepsilon\sigma^2}{2\omega^2}\cos^2\psi,\\ m_a^2(t)\frac{dm_\theta(t)}{dt}&=-\frac{\varepsilon}{\omega}m_a(t)\,f(t,m_a(t),m_\theta(t))\cos\psi-\frac{\varepsilon\sigma^2}{\omega^2}\cos\psi\sin\psi. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку полученные детерминированные уравнения (15) имеют стандартную по Н. Н. Боголюбову форму, то их правые части можно подвергнуть процедуре усреднения. Учитывая стационарность случайного воздействия, а также то, что коэффициенты усредненных уравнений (15) не будут явно зависеть от времени, представляется возможным исследовать стационарные режимы системы (9). Для их исследования, исходя из усредненных уравнений (15), получаем:

$$\begin{aligned} &m_a(t)\underset{t}{M}\left[f\left(t,m_a(t),m_\theta(t)\right)\sin\psi\right]=\frac{\sigma^2}{4\omega},\\ &\underset{t}{M}\left[f\left(t,m_a(t),m_\theta(t)\right)\cos\psi\right]=0. \end{aligned} \quad (16)$$

В качестве примера рассмотрим задачу оценки математического ожидания амплитуды стационарных колебаний следующей автономной системы Ван–дер–Поля, подверженной непараметрическому широкополосному стационарному случайному воздействию:

$$\ddot{x}+\omega^2x=\varepsilon\left[1-x^2\right]+\sqrt{\varepsilon}\sigma\xi(t). \quad (17)$$

После проведения описанной выше процедуры для получения оценки математического ожидания амплитуды случайных колебаний получаем уравнение

$$m_a(t)\frac{dm_a(t)}{dt}=\frac{\varepsilon}{2}m_a^2(t)-\frac{\varepsilon}{8}m_a^4(t)+\frac{\varepsilon\sigma^2}{4\omega^2}. \quad (18)$$

Для нахождения стационарного значения m_a полагаем $dm_a/dt=0$. Тогда, исходя из (18), несложно получить следующую оценку:

$$m_a^2=2+2\left(1+\frac{\sigma^2}{2\omega^2}\right)^{1/2}. \quad (19)$$

Данный результат не вызывал бы никаких сомнений в случае симметричности распределения амплитуды колебаний. Однако, асимметрия этого распределения отрицательна, и, следовательно, математическое ожидание амплитуды колебаний должно быть меньше ее модального значения. Таким образом, полученная с использованием соотношений (16) оценка m_a для системы (17) в точности совпала с оценкой модального значения амплитуды, основанной на применении аппарата уравнений КФП. Получение смещенной в сторону увеличения оценки математического ожидания амплитуды стационарных колебаний свидетельствует о неправомерности пренебрежения влиянием диффузионных членов уравнений (14) при выписывании соотношений (15).

Приведенные выше расчеты позволяют утверждать, что при применении приведенной выше методики получены приближенные верхние оценки математического ожидания m_a амплитуды стационарных колебаний систем с аддитивными шумами, совпадающие с наиболее вероятными значениями амплитуды. Основываясь на данном факте, сформулируем следующее утверждение.

Утверждение. *Наиболее вероятные значения амплитуды* a *и фазы* θ *стационарных колебаний в системах вида*

$$\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=\varepsilon f(t,x,\dot{x})+\sqrt{\varepsilon}\sigma\xi(t), \tag{20}$$

где $\xi(t)$ *– стационарный широкополосный процесс, определяются из следующих соотношений*

$$\begin{gathered} a\,\underset{t}{M}\left[f(t,a(t),\theta(t))\sin\psi\right]=\frac{\sigma^2}{4\omega}, \\ \underset{t}{M}\left[f(t,a(t),\theta(t))\cos\psi\right]=0. \end{gathered} \tag{21}$$

Доказательство. Докажем данное утверждение для систем, удовлетворяющих условиям потенциальности соответствующих уравнений КФП. В случае выполнения условия потенциальности решение уравнения КФП может быть записано в виде:

$$W(a,\theta)=C\exp\left\{2\int\frac{K_1}{K_{11}}da+\frac{K_2}{K_{22}}d\theta\right\}, \tag{22}$$

где $K_1(a,\theta), K_2(a,\theta), K_{11}(a,\theta), K_{22}(a,\theta)$ определяются из соотношений

$$K_1(a,\theta)=\underset{t}{M}\left[-\frac{1}{\omega}f\sin\psi+\frac{g^2\cos^2\psi}{2\omega^2 a}\right],$$

$$K_2(a,\theta)=\underset{t}{M}\left[-\frac{1}{a\omega}f\cos\psi+\frac{g^2\sin 2\psi}{2\omega^2 a^2}\right],$$

$$K_{11}(a,\theta)=\frac{\sigma^2}{2\omega^2}, K_{22}(a,\theta)=\frac{\sigma^2}{2\omega^2 a^2}.$$

Выписывая условие потенциальности

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{K_1}{K_{11}}\right)=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{K_2}{K_{22}}\right),$$

получаем

$$\begin{gathered} \frac{2\omega^2}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(K_1)=\frac{2\omega^2}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial a}\left(K_2 a^2\right), \\ \frac{\partial}{\partial\theta}(K_1)=\frac{\partial}{\partial a}\left(K_2 a^2\right). \end{gathered} \tag{23}$$

Таким образом, соотношение (23) является условием потенциальности для систем с непараметрическими широкополосными шумами, спектральная плотность которых изменяется медленно в достаточно большом диапазоне частот, включающем собственные частоты системы.

При выполнении условия (23) и в том случае, когда

$$\frac{K_2(0,\theta)}{K_{22}(0)}=0$$

(а это условие для реальных колебательных систем практически всегда имеет место), решение соответствующего уравнения КФП может быть представлено в виде:

$$W(a,\theta)=C\exp\left\{\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\int K_1(a,\theta)da\right\}. \tag{24}$$

Для нахождения наиболее вероятных значений амплитуды и фазы стационарных колебаний, вычисляя

$$\frac{\partial}{\partial a}W(a,\theta)=0, \frac{\partial}{\partial\theta}W(a,\theta)=0, \tag{25}$$

получаем

$$K_1(a,\theta)=0,$$
$$\int\frac{\partial}{\partial\theta}\left(K_1(a,\theta)\right)da=0. \tag{26}$$

С учетом приведенных соотношений, имеем:

$$K_1(a,\theta)=-\frac{1}{\omega}\underset{t}{M}\left[f\left(t,a\cos\psi,-a\omega\sin\psi\right)\sin\psi\right]+\frac{\sigma^2}{4\omega^2 a}=0,$$
$$\int\frac{\partial}{\partial a}\left(K_2(a,\theta)a^2\right)da=K_2(a,\theta)a^2=0,$$

или, окончательно,

$$a\underset{t}{M}\left[f\left(t,a(t),\theta(t)\right)\sin\psi\right]=\frac{\sigma^2}{4\omega},$$
$$\underset{t}{M}\left[f\left(t,a(t),\theta(t)\right)\cos\psi\right]=0,$$

что и требовалось доказать.

Несмотря на то, что доказательство утверждения проведено лишь для случая потенциальности соответствующего системе (20) уравнения КФП, соотношения (21) могут быть использованы для нахождения наиболее вероятных характеристик случайных колебаний и в общем случае, поскольку они получены без учета условий (23).

Abstract. The paper presents the most probable estimations of the amplitude and phase of stationary oscillations in quasi-linear systems subjected to the broadband additive noise.

Литература

1. В. П. Рубаник, Влияние запаздываний в связях на интенсивность шумов в сложных автогенераторах, Радиофизика, **30**, № 10 (1987), 1208–1212.
2. Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров, Теория случайных процессов и ее инженерные приложения, Москва, Наука, 1991.
3. Ю. А. Митропольский, Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань, Нелинейные колебания в системах произвольного порядка, Киев, Навукова думка, 1992.
4. С. П. Жогаль, С. И. Жогаль, Об интегрируемости уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка для неавтономных квазилинейных систем с параметрическим случайным воздействием, Известия вузов: Прикладная нелинейная динамика, **4**, № 6 (1996), 92–99.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 15.05.06