Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (84), 2014

УДК 512.542

Сверхрадикальные формации

С.Ф. Каморников

*Светлой памяти дорогого учителя
Шеметкова Леонида Александровича
посвящается*

Предлагается обзор проблемы описания сверхрадикальных формаций и обсуждаются общие направления ее решения. Акцентируется внимание на связи теории наследственных насыщенных сверхрадикальных формаций с теорией критических групп. Приведена классификация таких групп. Описаны наследственные насыщенные сверхрадикальные формации со специальными классами критических групп. Отмечен большой вклад Л.А. Шеметкова в развитие теории сверхрадикальных формаций. Сформулирован ряд открытых вопросов и задач, стимулирующих дальнейшее развитие теории сверхрадикальных формаций.

Ключевые слова: конечная группа, формация, сверхрадикальная формация, критическая группа.

The problem of description of superradical formations is proposed. Some general directions of its solution are discussed. Attention is focused on the connection between the theory of hereditary saturated superradical formations with the theory of critical groups. A classification of such groups is given. Hereditary saturated superradical formations with special classes of critical groups are described. A great contribution of L.A. Shemetkov to the theory of superradical formations is marked. A number of open issues and challenges that stimulate the further development of the theory superradical formations are formulated.

Keywords: finite group, formation, superradical formation, critical group.

1. История вопроса. Формация $\mathfrak{F}$ называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация;

2) любая группа $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы является естественным обобщением понятия субнормальности. Для произвольных конечных групп оно впервые рассмотрено Л.А. Шеметковым.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех i = 1, 2, … , n.

Интерес к сверхрадикальным формациям и их важность в теории классов обусловлены следующими обстоятельствами.

Во-первых, сверхрадикальные формации заслуживают внимания своей тесной связью с формациями Шеметкова – формациями, у которых критические группы являются либо группами простого порядка, либо группами Шмидта. По сути, эта связь, открытая в работах [1] и [2], инициировала появление сверхрадикальных формаций, а затем на протяжении длительного периода стимулировала их развитие.

Во-вторых, сверхрадикальные формации, являясь расширением таких объектов как гиперрадикальные и решеточные формации, а также формации с условием Виландта [3], развивая собственный технический аппарат, позволяют использовать его для исследования последних.

В-третьих, как следует из определения, открытие каждой новой сверхрадикальной формации равносильно открытию нового свойства конечных групп, представимых в виде произведения подгрупп с ограничениями на сомножители [4].

В-четвертых, сверхрадикальные формации интересны как объекты, двойственные радикальным формациям (формациям Фиттинга) – нормально наследственным формациям, замкнутым относительно взятия произведений нормальных подгрупп. Дуализм, проявляющийся уже в определениях объектов, нашел свое отражение в терминологии: рассматриваемая как самостоятельный объект формация $\mathfrak{F}$, замкнутая относительно взятия произведений $\mathfrak{F}$-субномальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, первоначально называлась $\mathfrak{F}$-радикальной [5], а с 2000 г. с подачи Л.А. Шеметкова [6] за ней закрепился термин «сверхрадикальная формация».

Понимание значимости сверхрадикальных формаций привело к задаче их описания. В 1999 г. в *Коуровской тетради* [7] под номером 14.99 а) Л.А. Шеметковым был сформулирован ее частный случай: описать все насыщенные сверхрадикальные формации (в оригинальном изложении сверхрадикальные формации представлены под названием «суперрадикальные формации»).

Отдельные аспекты этой проблемы рассматривались в работах [8]–[11]. Сверхрадикальным формациям посвящен также специальный раздел книги [12]. Сегодня проблема 14.99 а) далека от своего полного решения. Однако значительные успехи, достигнутые в последние 2–3 года, позволяют надеяться на определенный прогресс уже в ближайшее время.

Отметим, что Л.А. Шеметков всегда живо интересовался состоянием вопроса. Его вклад в рассматриваемую тематику не ограничивался только постановкой соответствующих проблем и обсуждением их в обзорных докладах, посвященных развитию теории формаций. В совместной с В.Н. Семенчуком работе [6] им были построены новые примеры сверхрадикальных формаций в универсуме всех конечных групп (до 2000 г. рассматривались исключительно разрешимые сверхрадикальные формации).

В данной работе предлагается краткий обзор состояния проблемы и обсуждаются общие направления ее решения. Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в монографиях [13], [14].

2. Критические группы наследственной насыщенной сверхрадикальной формации. Уже первые работы [1] и [2], посвященные наследственным насыщенным сверхрадикальным формациям, показали их тесную связь с теорией критических групп и тем самым определили «дорожную карту» решения проблемы 14.99а). Первый шаг ее – классификация всех критических групп наследственной насыщенной сверхрадикальной формации. Этот шаг был сделан в работе [15].

Напомним, что *критической группой* (*минимальной не* $\mathfrak{F}$*-группой*) формации $\mathfrak{F}$ называется группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Критическая группа формации всех нильпотентных групп – это группа Шмидта.

Теорема 2.1 ([15]). Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная сверхрадикальная формация и G – критическая группа формации $\mathfrak{F}$, имеющая единичную подгруппу Фраттини. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

(I) группа G имеет простой порядок p, причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;

(II) G – простая неабелева группа;

(III) группа G является группой Шмидта;

(IV) G – примитивная группа с абелевым цоколем N и $G=[N]M$, где $(|N|, |M|)=1$ и $M/\Phi(M)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, принадлежащая формации $\mathfrak{F}$;

(V) G – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и G/N – циклическая q-группа для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{F})$;

(VI) G – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и $(G/N)/\Phi(G/N)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Отметим, что под *нефакторизуемой* группой понимается любая группа G, которая не имеет факторизаций $G=AB$, где A и B – собственные подгруппы группы G. Максимальные факторизации почти простых групп представлены в работе [16]. Отсюда, в частности, получается перечень всех простых неабелевых нефакторизуемых групп. Таким свойством обладают, в частности, группы $Sz(2^n)$, $PSU_{2n+1}(q)$ и ряд других простых неабелевых групп.

Таким образом, теорема 2.1 выделяет 6 типов критических групп (с единичной подгруппой Фраттини) наследственной насыщенной сверхадикальной формации F. При этом их классификация осуществляется по трем дихотомическим признакам:

1) простота – непростота группы;

2) абелевость-неабелевость цоколя;

3) абелевость-неабелевость коцоколя.

Таблица 1 отражает логическое деление критических групп сверхрадикальной формации на основе этих признаков.

Таблица 1 – Схема классификация критических групп сверхрадикальной формации

<table>
<tr><td colspan="6">Критическая группа сверхрадикальной формации</td></tr>
<tr><td colspan="2">Простая</td><td colspan="4">Непростая</td></tr>
<tr><td>Абелева
тип (I)</td><td>Неабелева
тип (II)</td><td>Разрешимая
тип (III)</td><td colspan="3">Неразрешимая</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>Абелев цоколь
тип (IV)</td><td colspan="2">Неабелев цоколь</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td>Абелев коцоколь
тип (V)</td><td>Неабелев коцоколь
тип (VI)</td></tr>
</table>

Из теоремы 2.1, в частности, следует, что разрешимыми критическими группами наследственной насыщенной сверхрадикальной формации являются только группы типов (I) и (III).

Следствие 2.1. Пусть F – наследственная насыщенная сверхрадикальная формация и G – разрешимая критическая группа с единичной подгруппой Фраттини. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

1) группа G имеет простой порядок p, причем $p \notin \pi(\mathsf{F})$;

2) группа G является группой Шмидта.

Следующие примеры показывают, что в теореме 2.1 все типы (I)-(VI) критических групп являются непустыми.

Пример 2.1. Формация N всех нильпотентных групп является сверхрадикальной. Все критические группы формации N являются группами Шмидта, т.е. относятся к группам типа (III).

Пример 2.2. Формация N_p всех p-групп является сверхрадикальной. Все критические группы формации N_p являются группами простого порядка q ($q \neq p$), т.е. относятся к группам типа (I).

Пример 2.3. Формация S всех разрешимых групп является сверхрадикальной. Все критические группы формации S, имеющие единичную подгруппу Фраттини, являются неабелевыми простыми группами, т.е. относятся к группам типа (II). Они принадлежат следующему списку: $PSL_2(2^p)$, p – простое число; $PSL_2(3^p)$, p – нечетное простое число; $PSL_2(p)$, p – простое число, большее 3, для которого $p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$; $Sz(2^p)$, p – нечетное простое число; $PSL_3(3)$ (в серии работ Дж. Томпсон установил, что только у данных групп все собственные подгруппы разрешимы).

Пример 2.4 ([15]). Пусть $G \cong PSL_2(7)$. Если $\pi = \{2,3,7\}$, а F – класс всех групп, являющихся расширением разрешимых π-групп с помощью конечных прямых произведений групп, изоморфных G, то:

1) F является наследственной насыщенной сверхрадикальной формацией;

2) если H – критическая группа формации F, имеющая единичную подгруппу Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

а) группа H имеет простой порядок p, причем $p \notin \pi$;

б) H – простая неабелева группа, изоморфная $PSL_2(8)$ либо $PSU_3(3)$;

в) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N (N – прямое произведение групп, изоморфных G) и H / N – группа простого порядка $q \in \pi$.

Таким образом, все критические группы наследственной насыщенной сверхрадикальной формации F из примера 2.4, имеющие единичную подгруппу Фраттини, относятся к группам типов (I), (II) и (V).

Пример 2.5 ([15]). Пусть $G \cong Sz(2^3)$ и $\pi = \pi(G) = \{2, 5, 7, 13\}$. Пусть F – формация, обладающая таким локальным экраном f, что $f(q)$ – класс всех групп, являющихся расширением разрешимых групп с помощью конечных прямых произведений групп, изоморфных G, если $q \in \pi$, и $f(q)$ – класс всех разрешимых групп, если $q \notin \pi$.

Тогда:

1) F является наследственной насыщенной сверхрадикальной формацией;

2) если H – критическая группа формации F, имеющая единичную подгруппу Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

а) H – простая неабелева группа из следующего списка: $PSL_2(2^p)$, p – простое число; $PSL_2(3^p)$, p – нечетное простое число; $PSL_2(p)$, p – простое число, большее 3, для которого $p^2 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$; $Sz(2^p)$, p – нечетное простое число; $PSL_3(3)$; $Sz(2^9)$;

б) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N (N – прямое произведение групп, изоморфных G) и H / N – группа простого порядка $q \in \pi(G)$;

в) H – примитивная группа с абелевым цоколем N и $H = [N]M$, где $(|N|, |M|) = 1$ и $M / \Phi(M) \cong G$.

Таким образом, все критические группы наследственной насыщенной сверхрадикальной формации F из примера 2.5, имеющие единичную подгруппу Фраттини, относятся к группам типов (II), (IV) и (V).

Пример 2.6 ([15]). Пусть $G \cong Sz(2^3)$ и $\pi = \pi(G)$. Если $\mathsf{F} = \mathsf{S}_\pi\, formG\mathsf{S}_\pi$, то:

1) F является наследственной насыщенной сверхрадикальной формацией;

2) если H – критическая группа формации F, имеющая единичную подгруппу Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

а) группа H имеет простой порядок q, причем $q \notin \pi(\mathsf{F})$;

б) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N (N – прямое произведение групп, изоморфных G) и $(H / N) / \Phi(H / N)$ – группа, изоморфная G.

Таким образом, все критические группы наследственной насыщенной сверхрадикальной формации F из примера 2.6, имеющие единичную подгруппу Фраттини, относятся к группам типов (I) и (VI).

3. Состояние проблемы. Когда мы говорим об описании некоторых объектов, мы должны, прежде всего, определиться с тем, что понимается под описанием. В случае насыщенных формаций (являющихся локальными, а потому обладающих локальными определениями), по мнению Л.А. Шеметкова, формации следует признать описанными, если описаны их локальные определения (или локальные экраны в терминологии книги [13]). Такой подход используется и при решении проблемы 14.99а).

Напомним определение локальной формации.

Пусть $\mathbf{P}$ – множество всех простых чисел. Тогда функция

$$f : \mathbf{P} \to \{\text{формации конечных групп}\}$$

называется *формационной функцией*.

Для формационной функции f главный фактор A / B группы G называется f-*центральным* (f-*эксцентральным*), если

$$G / C_G(A / B) \cong \mathrm{Aut}(A / B) \in f(p)$$

для всех простых $p \in \pi(A/B)$ (соответственно $G/C_G(A/B)$ не принадлежит $f(p)$ хотя бы для одного простого числа $p \in \pi(A/B)$). Класс групп $\mathsf{F} = LF(f)$ называется *локальной формацией*, если он состоит из всех групп G, таких, что либо $G = 1$, либо $G \neq 1$ и любой главный фактор A/B группы G является f-центральным. При этом говорят, что локальная формация F *определяется с помощью формационной функции* f, а f – *локальное определение* формации F.

Пусть G_p – класс всех p-групп, f – формационная функция и $\mathsf{F} = LF(f)$. Тогда функция f называется:

(а) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathsf{F}$ для всех $p \in \mathrm{P}$;

(в) *полной*, если $f(p) = \mathsf{G}_p f(p)$ для всех $p \in \mathrm{P}$;

(с) *канонической*, если она является полной и внутренней.

Как показано в [8, теорема IV.3.7], для любой локальной формации F существует единственная каноническая формационная функция f, такая, что $\mathsf{F} = LF(f)$. Эта функция называется *каноническим локальным определением* формации F.

Отметим, что на основании теоремы Гашюца-Любезедер-Шмида [8, теорема IV.4.6] формация F является насыщенной тогда и только тогда, когда она локальна. Отсюда, в частности, следует, что для любой насыщенной формации F существует каноническое локальное определение f, такое, что $\mathsf{F} = LF(f)$.

Как отмечено выше, изучение сверхрадикальных формаций начиналось с рассмотрения разрешимого случая.

Теорема 3.1 ([1], [2]). Пусть F – наследственная насыщенная формация разрешимых групп и $\pi = \pi(\mathsf{F})$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Формация F является сверхрадикальной.

2. Для каждого простого $p \in \pi$ существует множество простых чисел $\pi(p)$ с условием $p \in \pi(p)$, при этом $\mathsf{F} = LF(f)$, где f – такое локальное определение, что $f(p) = \mathsf{S}_{\pi(p)}$, если $p \in \pi$, и $f(p) = \varnothing$, если $p \notin \pi$.

В [5] было доказано, что любая разрешимая насыщенная сверхрадикальная формация является наследственной. Таким образом, в классе всех разрешимых групп теорема 14.99а) получила полное решение.

Теорема 3.1 в совокупности с [17] указывает на связь разрешимых сверхрадикальных формаций с формациями Шеметкова: любая разрешимая наследственная формация Шеметкова является сверхрадикальной. Обратное, конечно, неверно: формация S всех разрешимых групп является сверхрадикальной, но не является формацией Шеметкова.

В [5] была предложена следующая характеризация: разрешимая насыщенная формация F является сверхрадикальной тогда и только тогда, когда она представима в виде $\mathsf{F} = \bigcap_{i \in I, j \in J} \mathsf{S}_{\pi_i} \mathsf{S}_{\pi_j}$. Развитие этого результата привело к открытию в [6] серии неразрешимых сверхрадикальных формаций – формаций вида $\mathsf{F} = \bigcap_{i \in I, j \in J} \mathsf{G}_{\pi_i} \mathsf{G}_{\pi_j}$, где G – формация всех групп. Этот результат Л.А. Шеметкова и В.Н. Семенчука включает следующую теорему [12].

Теорема 3.2 ([12]). Пусть F – наследственная насыщенная формация и $\pi = \pi(\mathsf{F})$. Предположим, что для каждого простого $p \in \pi$ существует множество простых чисел $\pi(p)$ с условием $p \in \pi(p)$, при этом $\mathsf{F} = LF(f)$, где f – такое локальное определение, что $f(p) = \mathsf{G}_{\pi(p)}$, если $p \in \pi$, и $f(p) = \varnothing$, если $p \notin \pi$. Тогда формация F является сверхрадикальной.

В [9] и [10] было доказано, что формациями вида $\bigcap_{i \in I, j \in J} \mathsf{G}_{\pi_i} \mathsf{G}_{\pi_j}$ с разрешимыми критическими группами исчерпываются все наследственные насыщенные сверхрадикальные формации, критические группы которых разрешимы (в этом случае на основании следствия 2.1 они являются либо группами Шмидта, либо группами простого порядка).

Формация F называется *решеточной*, если в любой группе множество всех ее F-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп. В [18] доказано, что каждая наследственная насыщенная решеточная формация является сверхрадикальной. Поэтому приведенное в [18] описание всех наследственных насыщенных решеточных формаций дает еще одну серию сверхрадикальных формаций.

Теорема 3.3. Пусть формация F обладает следующими свойствами: 1) $\mathsf{F} = D_0(\mathsf{M} \cup \mathsf{H})$, $\pi(\mathsf{M}) \cap \pi(\mathsf{H}) = \varnothing$; 2) существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathsf{H})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathsf{H} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathsf{S}_{\pi_i})$; 3) $\mathsf{M} = \mathsf{S}_{\pi(\mathsf{M})}\mathsf{M}$ – наследственная насыщенная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в M^2; 4) всякая нециклическая критическая группа G формации M, имеющая единичную подгруппу Фраттини, является монолитической с неабелевым монолитом $N = G^{\mathsf{M}}$, причем G/N – циклическая примарная группа. Тогда F является сверхрадикальной формацией.

Практика рассмотрения частных случаев проблемы 14.99а) показывает, что при ее решении важную роль играют критические группы сверхрадикальных формаций. В теоремах 3.1 и 3.2 эти группы устроены несложно. Поэтому структура значений локальных определений устанавливается достаточно оперативно. Если же критические группы устроены более сложно, то возрастает и сложность соответствующих сверхрадикальных формаций. Это хорошо видно из теоремы 3.3, где в качестве критических групп появляются группы типа (V).

Теоремы 3.1 и 3.2 не описывают наследственные насыщенные сверхрадикальные формации, у которых все критические группы исчерпываются группами типа (I), (II) и (III). Такая задача решена в следующей теореме.

Теорема 3.4. Пусть F – наследственная насыщенная формация. Положим, что каждая критическая группа формации F, имеющая единичную подгруппу Фраттини, является простой (абелевой или неабелевой) группой или группой Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если формация F является сверхрадикальной и f – ее каноническое локальное определение, то формация F представима в следующем виде:

$$\mathsf{F} = \bigcap_{p \in \pi(\mathsf{F})} \mathsf{G}_{p'} \mathrm{ECom}(f(p)) \cap \mathsf{G}_{\pi(\mathsf{F})};$$

2) если $\mathsf{F} = \bigcap_{p \in \pi(\mathsf{F})} \mathsf{G}_{p'} \mathrm{ECom}(f(p)) \cap \mathsf{G}_{\pi(\mathsf{F})}$, где f – полное локальное определение формация F, то формация F является сверхрадикальной.

В теореме 3.4 через $\mathrm{ECom}(f(p))$ обозначается формация всех групп, все композиционные факторы которых принадлежат $f(p)$.

Отметим, что теоремы 3.1 и 3.2 являются частными проявлениями теоремы 3.4, а серия сверхрадикальных формаций из теоремы 3.4 шире. Например, формация $\mathsf{F} = \mathrm{E}(PSL_2(7), Z_2, Z_3, Z_7)$ всех групп, все композиционные факторы которых изоморфны группам из множества $\{PSL_2(7), Z_2, Z_3, Z_7\}$, является сверхрадикальной. При этом если G – критическая группа формации F, имеющая единичную подгруппу Фраттини, то либо $|G| = q$, где $q \notin \{2,3,7\}$, либо $G \cong PSL_2(8)$, либо $G \cong PSU_3(3)$. Так как $PSL_2(8) \in \mathsf{G}_{\{2,3,7\}}$, то формация F отлична от формации G_π, где $\pi = \{2,3,7\}$.

Следующий результат ослабляет условие теоремы 3.4, добавляя к критическим группам типа (I), (II) и (III) критические группы типа (V).

Теорема 3.5 ([19]). Пусть f – такая полная формационная функция, что $f(p) = \mathrm{ECom}(f(p))$ и $f(p)$ – наследственная формация для любого $p \in Supp(f)$. Если формация $\mathsf{F} = LF(f)$ не имеет критических групп типа (IV), то F является сверхрадикальной.

Как отмечено в [19], формация $\mathsf{F} = LF(f)$ из теоремы 3.5 не может иметь критических групп типа (VI).

Наконец выделим наиболее широкий класс сверхрадикальных формаций.

Теорема 3.6 [20]. Пусть F – наследственная насыщенная сверхрадикальная формация. Положим, что каждая критическая группа формации F, имеющая единичную подгруппу Фраттини, является группой типа (I)-(III), (V) или (VI). Тогда формация F имеет такое каноническое локальное определение f, что $f(p) = \mathsf{F} \cap \mathsf{G}_{\pi(f(p))} = \mathsf{F}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathsf{F})$, и $f(p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(\mathsf{F})$.

Теорема 3.7 [20]. Пусть F – наследственная насыщенная формация Фиттинга и каждая критическая группа формации F, имеющая единичную подгруппу Фраттини, является группой типа (I)-(V). Положим, что формация F имеет такое каноническое локальное определение f, что $f(p) = \mathsf{F}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathsf{F})$, и $f(p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(\mathsf{F})$. Тогда формация F является сверхрадикальной.

На основании теорем 3.6 и 3.7 процедура тестирования наследственной насыщенной формации на сверхрадикальность предполагает выявление структуры ее критических групп и канонического локального определения.

4. Открытые вопросы. Сформулируем ряд открытых вопросов и задач, которые, по нашему мнению, будут стимулировать дальнейшее развитие сверхрадикальных формаций. Частично они обсуждались на научном семинаре кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины при участии Л.А. Шеметкова. Эти задачи и вопросы, конечно, имеют разную сложность. Возможно, среди них есть и такие, которые не потребуют значительных усилий и будут решены построением соответствующих контрпримеров.

4.1. Существует ли ненаследственная сверхрадикальная формация?

4.2. Существует ли ненасыщенная сверхрадикальная формация?

4.3. Доказать, что всякая наследственная сверхрадикальная формация является разрешимо насыщенной формацией.

Задача 4.3 принадлежит Л.А. Шеметкову. Она известна как задача 14.99б) из [7]. Правда, в связи с задачей 4.3 возникает следующий естественный вопрос.

4.4. Существует ли наследственная сверхрадикальная формация, которая является разрешимо насыщенной, но не является насыщенной?

В связи с результатами, изложенными в третьем разделе, возникают следующие две задачи, с решением которых будет завершено описание всех наследственных насыщенных сверхрадикальных формаций.

4.5. Описать все наследственные насыщенные сверхрадикальные формации, имеющие критические группы типа (IV).

4.6. Описать все наследственные насыщенные сверхрадикальные формации, имеющие критические группы типа (VI).

Напомним, что формация F называется *гиперрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) F – нормально наследственная формация;

2) любая группа $G = \langle A, B \rangle$, где A и B – F-субнормальные F-подгруппы из G, принадлежит F.

Очевидно, каждая гиперрадикальная формация является сверхрадикальной (обратное неверно).

4.7. Описать все гиперрадикальные формации.

4.8. Описать все наследственные гиперрадикальные формации.

4.9. Существует ли ненаследственная гиперрадикальная формация?

Говорят, что формация F *индуцирует функтор Виландта на* F*-субнормальных подгруппах*, если $\langle A, B \rangle^{\mathsf{F}} = \langle A^{\mathsf{F}}, B^{\mathsf{F}} \rangle$ для любых двух F-субнормальных подгрупп A и B каждой группы G. В книге [12] такая формация называется *формацией, обладающей обобщенным свойством Виландта для корадикалов,* или *GWP-формацией*.

Как отмечено в [21] [см. также 12, теорема 6.5.34], каждая GWP-формация является наследственной решеточной формацией Фиттинга. В частности, она является сверхрадикальной. Достаточно широкий класс GWP-формаций описан в [21]. В то же время остается нерешенной следующая задача.

4.10. Описать все GWP-формации.

В связи с задачей 4.10 отметим следующий вопрос из [12, с. 302].

4.11. Существуют ли решеточные формации, которые не являются GWP-формациями?

Литература

1. Ballester-Bolinches, A. A note on saturated formations / A. Ballester-Bolinches // Arch. Math. – 1992. – Vol. 58, № 2. – P. 110–113.

2. Семенчук, В.Н. Характеризация $\mathfrak{F}$-формаций / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1992. – Вып. 7. – С. 103–107.

3. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 2003. – 256 с.

4. Амберг, Б. Конечные группы с кратными факторизациями / Б. Амберг, Л.С. Казарин, Б. Хефлинг // Фундам. и прикл. мат. – 1998. – Т. 4. – № 4. – С. 1251–1263.

5. Семенчук, В.Н. Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации / В.Н. Семенчук // Математические заметки. – 1996. – Т. 59. – № 2. – С. 261–266.

6. Семенчук, В.Н. Сверхрадикальные формации / В.Н. Семенчук, Л.А. Шеметков // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44. – № 5. – С. 24–26.

7. Нерешенные вопросы теории групп: Коуровская тетрадь. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2006. – 194 с.

8. Семенчук, В.Н. Конечные группы, факторизуемые $\mathfrak{F}$-достижимыми подгруппами / В.Н. Семенчук, С.А. Мокеева // Изв. Гомельского гос. университета им. Ф. Скорины. – 2002. – № 5. – С. 47–49.

9. Семенчук, В.Н. О проблеме классификации сверхрадикальных формаций / В.Н. Семенчук, О.А. Мокеева // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 12. – С. 70–75.

10. Семенчук, В.Н. Произведение обобщенно субнормальных подгрупп в конечных группах / В.Н. Семенчук, С.А. Мокеева, О.А. Мокеева // Сиб. мат. журнал. – 2009. – Т. 50, № 4. – С. 890–901.

11. Семенчук, В.Н. О конечных группах, факторизуемых обобщенно субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук, В.Ф. Велесницкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4. – С. 58–60.

12. Ballester-Bolinches, A. Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p.

13. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

14. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

15. Каморников, С.Ф. Критические группы наследственной локальной сверхрадикальной формации / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 2. – С. 66–75.

16. Liebeck, M.W. The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups / M.W. Liebeck, C.E. Prager, J. Saxl // Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 86, № 432. – P. 1–150.

17. Семенчук, В.Н. Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп / В.Н. Семенчук, А.Ф. Васильев // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск : Наука и техника, 1984. – С. 175–181.

18. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические системы. – Киев : Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 27–54.

19. Каморников, С.Ф. Об одном классе наследственных насыщенных сверхрадикальных формаций / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2014. – Т. 55. – № 1. – С. 97–108.

20. Ballester-Bolinches, A. On a problem of L.A. Shemetkov on superradical formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // J. Algebra. – 2014. – Vol. 403. – P. 69–76.

21. Каморников, С.Ф. Перестановочность подгрупп и $\mathfrak{F}$-субнормальность / С.Ф. Каморников // Сиб. мат. журнал. – 1996. – Т. 37. – № 5. – С. 1065–1080.

Международный университет «МИТСО» Поступила в редакцию 29.01.2014