Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 5(32), 2005

УДК 512.542

О конечных группах с заданной системой сверхразрешимых максимальных подгрупп

А. Ф. Васильев

Рассматриваются только конечные группы. Используются определения, обозначения и результаты из [1] и [2]. В [3] В.А.Белоноговым было установлено, что конечная группа нильпотентна, если она имеет три попарно несопряженные нильпотентные максимальные подгруппы. В [4] нами было доказано, что если разрешимая группа содержит три попарно несопряженные абнормальные сверхразрешимые максимальные подгруппы, то она сверхразрешима.

Основная цель настоящей заметки — доказать следующий результат.

Теорема. *Если группа G имеет четыре попарно несопряженные сверхразрешимые максимальные подгруппы, из которых две нормальны, а две абнормальны в G, то группа G является сверхразрешимой.*

Доказательство. Пусть G — контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда в G имеются четыре попарно несопряженные сверхразрешимые максимальные подгруппы M_1, M_2, M_3, M_4. Причем, не теряя общности рассуждений, можно считать, что M_1 и M_2 нормальны, а M_3 и M_4 абнормальны в группе G. При этом сама группа G сверхразрешимой не является.

Так как $G = M_1M_2$, где M_1 и M_2 являются сверхразрешимыми (а значит, разрешимыми) нормальными подгруппами в G, то группа G разрешима.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Если $G = NM_i$ для некоторого $i = 1,2,3,4$, то из $G/N \simeq M_i/M_i \cap N$ следует сверхразрешимость G/N. Если $N \subseteq M_i$ для любого $i = 1,2,3,4$, то для факторгруппы G/N все условия теоремы выполняются. Поэтому G/N сверхразрешима для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G.

Так как класс всех сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию, то N — единственная минимальная нормальная подгруппа в группе G и $\Phi(G) = 1$. В этом случае $G = [N]R$, где N — p-группа (p — некоторое простое число), $N = C_G(N) = F(G)$, а R — некоторая сверхразрешимая максимальная подгруппа группы G.

Из единственности N следует, что $N \subseteq M_i$ для $i = 1,2$. Так как все дополнения к N являются максимальными подгруппами в G и сопряжены в ней, то, не теряя общности рассуждений, можно считать, что $N \subseteq M_3$. Согласно тождеству Дедекинда $M_i = M_i \cap [N]R = [N](M_i \cap R)$ для любого $i = 1,2,3$. Из $N = C_G(N)$ и $N \subseteq M_i$ следует, что $F_p(M_i)$ является p-группой для любого $i = 1,2,3$.

Согласно [1], формация всех сверхразрешимых групп имеет максимальный внутренний локальный экран h такой, что $h(q) = \mathfrak{N}_q\mathfrak{A}_{(q-1)}$ для любого простого q, где $\mathfrak{N}_q$ обозначает формацию всех q-групп, а $\mathfrak{A}_{(q-1)}$ — формацию всех абелевых групп экспоненты, делящей $q-1$. Поэтому из сверхразрешимости M_i и леммы 4.5 вытекает, что $M_i \cap R \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}_{(p-1)}$ для $i = 1,2,3$. Отсюда и из строения формации $h(p)$ следует, что $M_i \cap R$ является p-замкнутой группой для $i = 1,2,3$. Далее заметим, что $M_1 \cap R$, $M_2 \cap R$, $M_3 \cap R$ являются попарно несопряженными максимальными подгруппами в R. Следовательно, $R = (M_1 \cap R)(M_2 \cap R)$. Ввиду того, что формация всех p-замкнутых групп является формацией Фиттинга, то подгруппа R будет p-замкнутой. По лемме 3.9 из [1] получаем, что $O_p(R) = 1$. Следовательно, $O_p(M_i) \cap R = 1$, а значит, $M_i \cap R \in \mathfrak{A}_{(p-1)}$ для $i = 1,2,3$.

Так как M_i нормальна в G, то $M_i \cap R$ нормальна в R для $i = 1, 2$. Из $R = (M_1 \cap \cap R)(M_2 \cap R)$ и нильпотентности $M_i \cap R$ $(i = 1, 2)$ следует нильпотентность R. Ввиду того, что M_3 — абнормальная максимальная подгруппа в G и $N \subseteq M_3$, нетрудно видеть, что $M_3 \cap R$ — абнормальная максимальная подгруппа в R. Так как R нильпотентна и $M_3 \cap R \neq 1$, то получаем противоречие с тем, что $M_3 \cap R$ — абнормальная максимальная подгруппа в R. Теорема доказана.

Следующие примеры показывают существенность условий теоремы.

Пример 1. Пусть $G = [P]S$, где $P =< a_1 > \times < a_2 >$, $|a_i| = p, i = 1, 2,$, а S — группа кватернионов, причем $S =< b >< c >, |b| = |c| = 4$, и $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, $a_1^b = a_1^\alpha, a_2^b = = a_2^{\alpha^{-1}}, a_1^c = a_2, a_2^c = a_1^{-1}, |\alpha| = 4$. Согласно [5] G является минимальной несверхразрешимой группой, т.е/ G несверхразрешима, а любая ее собственная подгруппа является сверхразрешимой. Заметим, что P — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и G имеет единственный класс абнормальных максимальных подгрупп, которые изоморфны S. Подгруппы $[P] < b >$ и $[P] < c >$ являются нормальными сверхразрешимыми максимальными подгруппами в G. Следовательно, требование наличия двух несопряженных абнормальных сверхразрешимых максимальных подгрупп в нашей теореме является существенным.

Пример 2. Пусть $G = [P]S$. где $P =< a_1 > \times < a_2 > \times \ldots \times < a_k >$, $|a_i| = = p, 1 \leq i \leq k$, а подгруппа $S = [< b >] < c >$, причем $|b| = q, |c| = r, k = r, p \equiv 1(\mathrm{mod}\ qr), q \equiv 1(\mathrm{mod}\ r), a_i^b = a_i^{\alpha^{\beta^{i-1}}}, a_i^c = a_{i+1} (i < r), a_r^c = a_1, |\alpha| = q, |\beta| = r$. Используя [5], можно показать, что G является минимальной несверхразрешимой группой и P — ее единственная минимальная нормальная подгруппа, а S — абнормальная максимальная подгруппа. Несложно проверить, что в G имеется точно три класса максимальных подгрупп, из которых два класса состоят из абнормальных подгрупп и один класс — из нормальной максимальной подгруппы $[P] < b >$. Поэтому требование наличия двух нормальных сверхразрешимых максимальных подгрупп в нашей теореме не может быть ослаблено.

Abstract. It is proved that if a finite group G has two supersoluble normal maximal subgroups and two nonconjugate supersoluble abnormal maximal subgroups then G is supersoluble.

Литература

1. Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

2. K. Doerk, T. O. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, Berlin-New York: Walter De Gruyter, 1992.

3. В. А. Белоногов, *Конечные группы с парой несопряженных нильпотентных максимальных подгрупп*, ДАН СССР, **161**, № 6 (1965), 1255–1256.

4. А. Ф. Васильев, *О некоторых свойствах локальных формаций*, Вопросы алгебры, Минск, Университетское, Вып. 1 (1985), 4–9.

5. В. Т. Нагребецкий, *О конечных минимальных несверхразрешимых группах*, В книге "Конечные группы", Минск, Наука и техника, 1975, 104–108.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 06.09.05