Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 5(32), 2005

УДК 517.925

О наличии первых интегралов у дифференциального уравнения третьего порядка

Г. Т. Можджер

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' = a_1\frac{y'y''}{y} + a_2\frac{y'^3}{y^2} + a_3yy'' + a_4y'^2 + a_5y^2y',\ a_5 \neq 0. \tag{1}$$

Найдем условия на коэффициенты уравнения (1), чтобы оно имело первый интеграл вида

$$\begin{gathered} y^{2k-9}y''^3 + \sum_{m=1}^{3} A_m y^{2(k+m-6)}y'^{3-m}y''^2 + \sum_{m=1}^{5} B_m y^{2(k+m)-13}y'^{5-m}y'' + \\ + \sum_{m=1}^{7} C_m y^{2(k+m-7)}y'^{7-m} = H, \end{gathered} \tag{2}$$

где A_m, B_m, C_m – постоянные коэффициенты, H – произвольная постоянная интегрирования, $k \in \mathbb{N}$.

Дифференцируя (2), с учетом (1) найдем следующие соотношения

$$\begin{gathered} a_2B_1 + 2C_1(k-6) = 0,\ a_2B_2 + 2C_2(k-5) + a_4B_1 = 0,\ a_2B_3 + 2C_3(k- \\ -4) + a_4B_2 + a_5B_1 = 0,\ a_2B_4 + 2C_4(k-3) + a_4B_3 + a_5B_2 = 0, \\ a_2B_5 + 2C_5(k-2) + a_4B_4 + a_5B_3 = 0,\ a_4B_5 + 2C_6(k-1) + a_5B_4 = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} & A_1 = -\frac{3a_1 + 2k - 9}{2},\ A_2 = -3a_3,\ B_1 = \frac{1}{4}((3a_1 + 2k - 9)(a_1 + k - 5) - 3a_2), \\ & B_2 = \frac{a_3(9a_1 + 8k - 33)}{3} - a_4,\ B_3 = 3a_3^2 - A_3(a_1 + k - 3) - \frac{3}{2}a_5,\ B_4 = -2A_3a_3, \\ & C_1 = \frac{1}{24}(a_2(15a_1 + 14k - 69) - (3a_1 + 2k - 9)(a_1 + k - 5)(a_1 + 2k - 11)),\ C_2 = \\ & = \frac{1}{60}(81a_2a_3 - a_3(4(a_1 + 2k - 9)(9a_1 + 8k - 33) + 3(3a_1 + 2k - 9)(a_1 + k - 5)) + \\ & + 24a_4(2a_1 + 2k - 9)),\ C_3 = \frac{1}{24}(42a_3a_4 + 3a_5(9a_1 + 10k - 39) - 4a_3^2(9a_1 + 13k - \\ & -48) + 6A_3((a_1 + k - 3)(a_1 + 2k - 7) - 2a_2)),\ C_4 = \frac{1}{6}(15a_3a_5 - 6a_3^3 + \\ & + 2A_3(a_3(3a_1 + 5k - 13) - 2a_4),\ C_5 = \frac{1}{2}(2A_3(a_3^2 - a_5) - B_5(a_1 + 2k - 3)), \\ & C_6 = -a_3B_5,\ C_7 = -\frac{a_5B_5}{2k}. \end{aligned} \tag{4}$$

Используя (4), найдем случаи совместности условий (3). В результате выделим все классы уравнений (1), имеющие первые интегралы вида (2). В частности, если положить $a_3 = 0$, $a_2 = (a_1 + 2k - 11)(a_1 + k - 5)$, $a_2 \neq 0$, то получим следующие первые интегралы уравнения (1):

$$\begin{gathered} 1)\ y^{2k-9}y''^3 - (\frac{3a_1 + 2k - 9}{2}y^{2k-10}y'^2 + \frac{a_5(3a_1 + 2k - 21)}{2(a_1 + 2k - 7)(a_1 + k - 7)}y^{2k-6})y''^2 - \\ - ((a_1 + k - 5)(k-6)y^{2k-11}y'^4 + \frac{2a_5(a_1(k-3) + k^2 - 9k + 21)}{(a_1 + 2k - 7)(a_1 + k - 7)}y^{2k-7}y'^2 + \end{gathered}$$

$$+\frac{a_5^2 k}{(a_1+2k-7)^2(a_1+k-7)}y^{2k-3})y'' + \frac{1}{2}(a_1+2k-11)(a_1+k-5)^2 y^{2k-12}y'^6 +$$
$$+\frac{a_5(a_1+k-5)}{2(a_1+2k-7)(a_1+k-7)}(3a_1^2+9a_1k-48a_1+6k^2-67k+189)y^{2k-8}y'^4 +$$
$$+\frac{a_5^2}{2(a_1+2k-7)^2(a_1+k-7)}(3a_1^2+9a_1k-42a_1+6k^2-59k+147)y^{2k-4}y'^2 +$$
$$+\frac{a_5^3}{2(a_1+2k-7)^2(a_1+k-7)}y^{2k} = H.$$

2) $y^{2k-9}y'''^3 + (2(k-3)y^{2k-10}y'^2 + by^{2k-6})y''^2 + ((k-2)(k-6)y^{2k-11}y'^4 + b(k-4)y^{2k-7}y'^2 +$
$+ cy^{2k-3})y'' - 2(k-2)^2y^{2k-12}y'^6 - 2b(k-2)y^{2k-8}y'^4 - 2cy^{2k-4}y'^2 = H.$

3) $y^{2k-9}y''^3 + ((k-6)y^{2k-10}y'^2 - \frac{9a_5}{2k}y^{2k-6})y''^2 + (\frac{(k-6)^2}{3}y^{2k-11}y'^4 - \frac{3}{k}a_5(k-6)y^{2k-7}y'^2 +$
$+ \frac{27a_5^2}{4k^2}y^{2k-3})y'' + \frac{(k-6)^3}{27}y^{2k-12}y'^6 - \frac{a_5(k-6)^2}{2k}y^{2k-8}y'^4 + \frac{9a_5^2(k-6)}{4k^2}y^{2k-4}y'^2 -$
$- \frac{27a_5^3}{8k^3}y^{2k} = H.$

4) $y^{2k-9}y''^3 + (\frac{11k-60}{10}y^{2k-10}y'^2 - \frac{55a_5}{12k}y^{2k-6})y''^2 + (\frac{2}{5}(k-5)(k-6)y^{2k-11}y'^4 - \frac{5}{3k}a_5(2k -$
$- 11)y^{2k-7}y'^2 + \frac{125}{18k^2}a_5^2y^{2k-3})y'' + \frac{2}{125}(k-5)^2(3k-20)y^{2k-12}y'^6 - \frac{a_5}{15k}(k-5)(9k -$
$- 55))y^{2k-8}y'^4 + \frac{5a_5^2(9k-50)}{18k^2}y^{2k-4}y'^2 - \frac{125a_5^3}{36k^3}y^{2k} = H.$

5) $y^{2k-9}y''^3 + (\frac{5k-24}{4}y^{2k-10}y'^2 + by^{2k-6})y''^2 + (\frac{1}{2}(k-4)(k-6)y^{2k-11}y'^4 - \frac{1}{2}(3a_5 - b(k -$
$- 8))y^{2k-7}y'^2 - \frac{2a_5}{k^2}(a_5+bk)y^{2k-3})y'' + \frac{1}{16}(k-4)^2(k-8)y^{2k-12}y'^6 + \frac{1}{16}(b(k-8)^2 -$
$- a_5(7k-48))y^{2k-8}y'^4 - \frac{a_5(bk(k-8) - a_5(k+8))}{2k^2}y^{2k-4}y'^2 + \frac{a_5^2(bk+a_5)}{k^3}y^{2k} = H.$

6) $y^{2k-9}y''^3 - ((k+6)y^{2k-10}y'^2 + \frac{a_5}{2k}y^{2k-6})y''^2 - ((k+2)(k-6)y^{2k-11}y'^4 +$
$+ \frac{a_5(k-2)}{k}y^{2k-7}y'^2 - cy^{2k-3})y'' + (k+2)^2(k-2)y^{2k-12}y'^6 + \frac{a_5(2+k)(3k-2)}{2k}y^{2k-8}y'^4 -$
$- \frac{1}{2k}(4ck + 2ck^2 - a_5^2)y^{2k-4}y'^2 - \frac{a_5c}{2k}y^{2k} = H.$

Таким образом верна следующая

Теорема *Пусть в уравнении (1) $k \in \mathbb{N}$. Если $a_2 = (a_1+k-5)(a_1+2k-11) \neq 0$, $a_3 = 0$, то уравнение (1) имеет первые интегралы вида 1)–6).*

Abstract. Sufficient conditions of first integrals existence in autonomous equation of third order are obtained.

Гродненский государственный
университет им. Янки Купалы

Поступило 30.06.05